PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

ИЗОМОРФИЗМ ПОЛУПРОСТЫХ ГРУППОВЫХ АЛГЕБР АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

САМУИЛ Д. БЕРМАН, ТОДОР Ж. МОЛЛОВ

Пусть G — абелева группа, p — простое число, K — поле, характеристика которого отлична от p, KG — групповая алгебра группы G над K, ε_i — первообразный корень степени p^i из единицы в алгебраическом замыкании $\overline{K}$ поля K. В статье находится полная система инвариантов алгебры KG, когда: 1) G — такая абелева p-группа, что ее фактор-группа G/G^1 по подгруппе G^1 елементов бесконечной высоты в G разлагается в прямое произведение циклических групп; 2) когда периодическая часть группы G является p-группой и степень $(K(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots) : K) < \infty$, т. е. когда K — поле второго рода относительно p.

Пусть H — группа, K — поле, характеристика которого не делит порядки периодических элементов группы H. Полная система инвариантов алгебры KH построена в [1] и [2], когда H — соответственно, конечная p-группа и счетная абелева p-группа. Используя результаты статьи [2], в [8] рассматривается тот же самый вопрос для полупростой алгебры KG, когда периодическая часть tG группы G — p-группа, а K — алгебраически замкнутое поле. Полная система инвариантов полупростой алгебры KG построена в [7], когда G — счетная периодическая абелева группа с конечным числом примарных компонент и в [3] — когда K — поле вещественных чисел, а G — абелева группа. Здесь продолжается изучение полупростой групповой алгебры абелевой группы G. Результаты статьи опубликованы в [6].

Поле K, характеристика которого отлична от p, называется полем первого рода относительно p, если $(K(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots) : K) = \infty$ [2]. Множество $s_p(K) = \{i \in \mathrm{N}_0 | K(\varepsilon_i) \neq K(\varepsilon_{i+1})\}$, где N_0 — множество неотрицательных целых чисел (ε_i — первообразный корень степени p^i из 1), называется спектром поля K относительно p [9]. Если K — поле первого рода относительно p, то существует такое натуральное число $\varkappa$ [2], которое называется константой поля K относительно p, что $K(\varepsilon_q) = K(\varepsilon_\varkappa) \subset K(\varepsilon_{\varkappa+1}) \subset \dots$, где $q=1$ при $p \neq 2$ и $q=2$ при $p=2$. Введем обозначения: $G^{p^i} = \{g^{p^i} | g \in G, i \in \mathrm{N}_0\}$; $\aleph_0$ — первое бесконечное кардинальное число; $|G|$ — мощность G; $\Pi_\alpha A$ — ограниченное прямое произведение α групп A, где α — кардинальное число, A — группа; (p^i) — циклическая группа порядка p^i; N — множество натуральных чисел; $M_j = \{r \in s_p(K) | r > j\}$: j' — наибольшее число $s_p(K)$, если оно существует, которое меньше $j \in s_p(K)$; $\langle \dots \rangle$ — подгруппа, порожденная...

Предложение 1. *Пусть G — периодическая абелева группа, H — ее подгруппа, R — коммутативное кольцо с 1 и I — идеал алгебры RG, порожденный элементами $h-1$, где h пробегает H. Если $|H| \geq \aleph_0$, то I не обладает системой образующих меньшей мощности, чем $|H|$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 [4]. Допустим, что I обладает такой системой M образующих, что $|M|<|H|$. Пусть $x \in M$. Тогда

$$x=\Sigma_{h \in H}\alpha_h(h-1), \tag{1}$$

где $\alpha_h \in RG$. Пусть F — множество всех h, участвующих в записях вида (1), когда x пробегает M и $H'=\langle F\rangle$, т. е. H' — подгруппа G, порожденная множеством F. Тогда $|H'|<|H|$ и $\{h-1|h \in H'\}$ — система образующих I. Пусть $g \in H\setminus H'$. Тогда $g-1 \in I$ и, следовательно, $g-1=\Sigma_{h \in H'}\alpha_h(h-1)$, что есть противоречие.

Следствие 2. *Пусть G — абелева p-группа. Тогда a) если K—поле первого рода относительно p, то алгебра $K(G/G^1)$, а кроме того и $|G^1|$, если $|G^1|\geqq\aleph_0$ или $G^1=1$, определяются инвариантным образом алгеброй KG, т. е. независимо от выбора базисов KG; b) если $p=2$, K — поле второго рода относительно 2 и $K\neq K(\varepsilon_2)$, то $K(G/G^2)$ и $|G^2|$ определяются инвариантно алгеброй KG.*

Докажем утверждение a). Пусть H — второй базис KG. Ввиду [5, лемма 4], идеал I алгебры KG, порожденный элементами $g-1$, $g \in G^1$, определяется инвариантно в KG. Следовательно, $I=0$ тогда и только тогда, когда $G^1=H^1=1$. Если $|G^1|\geqq\aleph_0$, то, ввиду предложения 1 $|G^1|$ — инвариант KG. Кроме того, имеет место $K(G/G^1)\cong KG/I=KH/I\cong K(H/H^1)$, где изоморфизмы следуют из леммы 1.1 [2]. Доказательство b) аналогично a).

В следующих утверждениях, если не оговорено противное, K будет полем первого рода относительно p. Аналогично лемме 2.10 [2], лемме 4 [5] и следствию 2 доказывается

Лемма 3. *Пусть G — абелева p-группа и $m \in s_p(K)$. Тогда идеал I_m, порожденный елементами $g-1$, где g пробегает G^{p^m}, определяется инвариантно в KG, а именно I_m является пересечением ядер всех неприводимых конечномерных K-представлений алгебры KG, для которых соответствующие поля характеров изоморфны подполям поля $K(\varepsilon_m)$. Кроме того, $K(G/G^{p^m})$ и $|G^{p^m}|$, если $|G^{p^m}|\geqq\aleph_0$ или $G^{p^m}=1$ — инварианты в KG.*

Лемма 4. *Если G и H — бесконечные сепарабельные абелевы p-группы и $KG\cong KH$, т. е. KG и KH K-изоморфны, то G и H имеют одновременно бесконечные или конечные показатели, причем во втором случае, если p^α и p^β — показатели соответственно G и H, то $(K(\varepsilon_\alpha):K)=(K(\varepsilon_\beta):K)$.*

Доказательство аналогично лемме 2.11 [2].

Пусть G — прямое произведение циклических p-групп и

$$G=\Pi_{i=1}^{\infty}G_i, \quad G_i\cong\Pi_{n_i}(p^i), \tag{2}$$

где n_i — кардинальное число. Для каждого $i \in s_p(K)$ определяем: $m_i=n_i$, если $i\neq\varkappa$ ($\varkappa$ — константа K относительно p) и $m_\varkappa=n_k+n_{k+1}+\ldots+n_\varkappa$, где $k=1$, если a) $p\neq2$ или b) $p=2$ и $K=K(\varepsilon_2)$, а $k=2$, если $p=2$ и $K\neq K(\varepsilon_2)$. Тогда, если $i_\lambda, i_{\lambda+1},\ldots$ являются элементами $s_p(K)\cap\mathbf{N}$, взятые в возрастающем порядке, то последовательность

$$m_{i_\lambda}, m_{i_{\lambda+1}}, m_{i_{\lambda+2}},\ldots \tag{3}$$

называется корректированной последовательностью группы G (при помощи поля K).

Определение 5. *Неединичная абелева p-группа G называется предельной группой, если* $|G^{p^i}|=|G|$ *для каждого* $i\in\mathbf{N}$. *В противном случае G называется непредельной группой.*

Если G — группа вида (2) с корректированной последовательностью (3), $|G^{p^j}|\geq|\aleph_0|$, где $j\in s_p(K)$ или $j=0$, то

$$|G^{p^j}|=\Sigma_{r\in M_j} m_r. \tag{4}$$

Лемма 6. *Пусть G — прямое произведение циклических p-групп с корректированной последовательностью* (3), $k\in s_p(K)$ *или* $k=0$ *и* $|G^{p^k}|\geq\aleph_0$. *Группа* G^{p^k} *непредельна тогда и только тогда, когда существует такое* $j\in s_p(K)\cap(k,\ \infty)$, *что* $m_j=|G^{p^k}|$ *и* $m_j>\Sigma_{r\in M_j} m_r$.

Доказательство. Необходимость. Из определения 5 следует, что существует $j\in s_p(K)\cap(k,\ \infty)$, так что $|G^{p^j}|<|G^{p^k}|$. Пусть j — наименьшее целое число с этим свойством. Так как $|G^{p^j}|\geq\Sigma_{r\in M_j} m_r$, то

$$|G^{p^k}|>\Sigma_{r\in M_j} m_r. \tag{5}$$

Действительно, $|G^{p^k}|=\Sigma_{r\in M} m_r$, где $M=s_p(K)\cap(k,\ \infty)$. Так как $|G^{p^k}|\geq\aleph_0$, то из (5), обозначая $N_j=\{r\in s_p(K)|k<r\leq j\}$, вытекает

$$|G^{p^k}|=\Sigma_{r\in N_j} m_r. \tag{6}$$

1) Пусть $j-1\in s_p(K)$. Тогда $|G^{p^k}|=|G^{p^{j-1}}|$. Следовательно, ввиду формулы (4), примененной для $j-1$, получается $|G^{p^k}|=m_j+\Sigma_{r\in M_j} m_r$. Из этого равенства, имея ввиду (5), следует $|G^{p^k}|=m_j$. 2) Пусть $j-1\notin s_p(K)$. Тогда или 2.1) $j=i_0$, или 2.2) $j=i_1$, где i_0 и i_1 — соответственно первое и второе числа спектра $s_p(K)$. 2.1) Пусть $j=i_0$. Тогда (6) дает $|G^{p^k}|=m_{i_0}=m_j$. 2.2). Пусть $j=i_1$. Если $k=i_0$, то из (6) получается $|G^{p^k}|=m_{i_1}=m_j$. Пусть $k=0\notin s_p(K)$. Тогда из (4) следует $m_{i_1}+m_{i_2}+\ldots=|G^{p^{i_0}}|=|G|$ и, имея ввиду (5), получается $m_{i_1}=|G|$, т. е. $m_j=|G^{p^k}|$.

Достаточность. Имеет место равенство (5). Если $|G^{p^k}|\geq\aleph_0$, то из (5) и (4) следует $|G^{p^k}|>|G^{p^j}|$. Последнее равенство очевидно, если G^{p^j} — конечная группа. Следовательно, G^{p^k} — непредельная группа.

Определение 7. *Пусть G — бесконечное прямое произведение циклических p-групп с корректированной последовательностью* (3) *при помощи поля K. Обозначим через* Card$|G|$ *множество всех кардинальных чисел, которые не превосходят* $|G|$. *Если G — предельная группа, то положим* $s_p(K,G)=\varnothing$. *Если G — непредельная группа, то положим* $s_p(K,G)=\{j\in s_p(K)\cap\mathbf{N}|m_j>\Sigma_{r\in M_j} m_r,\ m_j\geq\aleph_0\}$ *и в этом случае обозначим через τ наибольшее число* $s_p(K,G)$. *Пусть* $s_p[K,G]=s_p(K,G)\cup\{a\}$, *где $a=1$, если* $s_p(K,G)=\varnothing$, *и* $a=\tau+1$, *если* $s_p(K,G)\neq\varnothing$. *Если G имеет конечный показатель, то его обозначаем через* p^a. *Отображение* $f_{KG}: s_p[K,G]\to$ Card$|G|$, *определенное следующим образом:* $f_{KG}(j)=m_j$, *если* $j\in s_p(K,G)$; $f_{KG}(a)=|G^{p^{a-1}}|$, *если* $|G^{p^{a-1}}|\geq\aleph_0$; $f_{KG}(a)=(K(\varepsilon_a):K)$, *если* $|G^{p^{a-1}}|<\aleph_0$; *назовем характеристической или определяющей функцией алгебры KG.*

Функцию f_{KG} будем обозначать еще коротко через f_G. Определение корректно. Действительно, если G — непредельная группа, то из леммы 6 при $k=0$ получается $s_p(K, G)\neq\emptyset$. Так как каждая строго моннотонно убывающая последовательность кардинальных чисел имеет конечное число членов, то $s_p(K, G)$ — конечное множество. Следовательно, $s_p(K, G)$ обладает самым большим числом τ. Кроме того $s_p[K, G]$ — конечная область. Функция f_G строго монотонно убывает.

Лемма 8. *Пусть G — прямое произведение циклических p-групп, G^{p^k} — бесконечная непредельная группа, где $k\in s_p(K)$ или $k=0$ и $j\in s_p(K)$. Тогда следующие условия эквивалентны: a) j—наименьшее число $s_p(K, G)$, которое больше k;* b) *$j\in s_p(K, G)$ и $f_G(j)=|G^{p^k}|$;* c) *j — наименьшее число $s_p(K)$ со свойством $|G^{p^j}|<|G^{p^k}|$.*

Доказательство. Из a) следует b). Действительно, ввиду леммы 6, существует такое $t\in s_p(K)\cap(k, \infty)$, что $m_t=|G^{p^k}|>\Sigma_{r\in M_t}m_r$. Следовательно, $t\in s_p(K, G)$ и $t\geqq j$. Если допустим, что $t>j$, то из $j\in s_p(K, G)$ вытекает $m_j>\Sigma_{r\in M_j}m_r$, откуда, ввиду формулы (4), получится противоречие $m_j>|G^{p^k}|$. Следовательно, $j=t$ и $f_G(j)=m_j=|G^{p^k}|$.

Из b) следует a). Допустим противное, что существует такое $s\in s_p(K, G)$, что $k<s<j$. Тогда $m_j=f_G(j)=|G^{p^k}|=\Sigma_{r\in M_k}m_r\geqq m_s=f_G(s)>f_G(j)=m_j$, что есть противоречие.

Из b) следует c). Действительно, если G^{p^j} — конечная группа, то $|G^{p^k}|>|G^{p^j}|$. Если G^{p^j} бесконечна, то $|G^{p^k}|=f_G(j)=m_j>\Sigma_{r\in M_j}m_r=|G^{p^j}|$, т. е. $|G^{p^j}|<|G^{p^k}|$. Допустим, что существует такое $l\in s_p(K)$, что $l<j$ и $|G^{p^l}|<|G^{p^k}|$. Тогда $|G^{p^l}|\geqq\Sigma_{r\in M_l}m_r$. Так как $m_j=|G^{p^k}|$ и $j>l$, то в правой части вышеполученного неравенства участвует $|G^{p^k}|$, т. е. $|G^{p^l}|=|G^{p^k}|$, что есть противоречие'

Из c) следует b). Действительно, $j\in s_p(K)\cap\mathbf{N}$. Из

$$(7)\qquad |G^{p^k}|>|G^{p^j}|\geqq\Sigma_{r\in M_j}m_r,$$

обозначая $N_j=\{r\in s_p(K)|k<r\leqq j\}$, следует

$$(8)\qquad |G^{p^k}|=\Sigma_{r\in N_j}m_r.$$

1) Пусть существует j' и $j'\in s_p(K)\cap\mathbf{N}$. Тогда, согласно условию и (4) получается $|G^{p^k}|=|G^{p^{j'}}|=m_j+\Sigma_{r\in M_j}m_r$. Из этого равенства и из (7) следует $m_j=|G^{p^k}|$ и $m_j>\Sigma_{r\in M_j}m_r$, т. е. $j\in s_p(K, G)$ и $f_G(j)=m_j=|G^{p^k}|$. 2) Пусть или не существует j', или $j'\notin\mathbf{N}$. Тогда j — наименьшее число $s_p(K)\cap\mathbf{N}$, $k=0$ и (8) дает $|G^{p^k}|=m_j$. Следовательно, имея ввиду (7), получим $m_j>\Sigma_{r\in M_j}m_r$, т. е. $j\in s_p(K, G)$ и $f_G(j)=|G|=|G^{p^k}|$.

Предложение 9. *Пусть K — поле первого рода относительно простого числа p и $f: D\to M$ — функция. Существует такое бесконечное прямое произведение G циклических p-групп, что соответствующая функция f_G алгебры KG совпадает с f тогда и только тогда, когда:* 1) *D — конечное подмножество множества $\mathbf{N}$ и или $D=\{1\}$, или D — по крайней мере двухэлементное множество и $D=C\cup\{a\}$, где $C\subseteq s_p(K)$ и* $\max C=a-1$; 2) *область значений функции f — множество кардинальных чисел и если j_1 — наименьшее число D, то $f(j_1)\geqq\aleph_0$,* 3) *f — строго моно-*

монно убывающая функция; 4) *не больше одного из значений функции f — конечное кардинальное число и если m — такое значение, то D — по крайней мере двухэлементное множество и для предпоследнего числа $j \in D$ уравнение $(K(\varepsilon_\alpha):K)=n$ относительно α обладает решением $\alpha_0 \in \mathbf{N}$, такое, что $\alpha_0 > j'$, если j' существует.*

Доказательство вытекает из определения 7.

Лемма 10. *Пусть G и H — бесконечные прямые произведения циклических p-групп и $KG \cong KH$. Тогда G и H одновременно предельные или непредельные группы и если j и i — наименьшие числа соответственно $s_p[KG]$ и $s_p[K, H]$, то $j=i$ и $f_G(i)=f_H(i)=|G|$.*

Доказательство. Если G — предельная группа, то утверждение вытекает из леммы 3 и из определения 5. Пусть G — непредельная группа. Тогда H — также непредельная группа. Если допустим, что, например, $j<i$, то $|H|=|G|=|G^{p^j}|=|H^{p^j}|$, т. е. $|H^{p^i}|=|H|$, что противоречит лемме 8 для $k=0$. Следовательно, $j=i$. Тогда из леммы 8, полагая $k=0$, вытекает $f_G(i)=|G| =|H|=f_H(i)$.

Лемма 11. *Если G и H — абелевы p-группы, K — поле первого рода относительно p и $KG \cong KH$, то G — прямое произведение циклических групп тогда и только тогда, когда H — прямое произведение циклических групп.*

Доказательство. Пусть G — прямое произведение циклических p-групп. Так как $S^*(KG)=S(KG)\times K_p$, где $S^*(KG)$ и $S(KG)$ — силовские p-подгруппы соответственно мультипликативной группы $U(KG)$ и нормированной мультипликативной группы $V(KG)$ алгебры KG, и K_p — силовская p-подгруппа мультипликативной группы K^* поля K, $S(KG)$ — прямое произведение циклических групп [9] и K_p — циклическая группа, то $S^*(KG)$ — прямое произведение циклических групп. Следовательно, $S^*(KH)$, а также и H — прямые произведения циклических групп.

Пусть I — бесконечное множество, K — поле, A_i — коммутативные K-алгебры, $i \in I$, и $K(I)$ — множество всех конечных подмножеств множества I. В $K(I)$ существует естественный порядок по включению, который является направленным. Для каждого $T \in K(I)$ определено тензорное произведение $A_T=\bigotimes_{r \in T} {}_K A_r$. Если $\{e_r^j | j \in S_r\}$ — базис алгебры A_r, $r \in T$, то всевозможные тензорные произведения $\bigotimes_{r \in T} e_r^j$, где $j \in S_r$, образуют базис алгебры A_T. Для каждой пары подмножеств $T, T' \in K(I)$, $T \subseteq T'$, определяем гомоморфизм $\varphi_{T,T'}\colon A_T \to A_{T'}$, при помощи формулы $\varphi_{T,T'}\colon \bigotimes_{r \in T} e_r^j \to \bigotimes_{r \in T} e_r^j \bigotimes_{m \in T' \setminus T} 1_{A_m}$, где 1_{A_m} — единица A_m. Тогда система $A=\{A_T (T \in K(I));\ \varphi_{T,T'}\colon A_T \to A_{T'}\ (T \subseteq T' \subseteq K(I)\}$ образует прямой спектр тензорных произведений A_T по направленному множеству $K(I)$ [10, с. 68]. Предел прямого спектра A называется тензорным произведением алгебр A_i над K, $i \in I$, и обозначаем его через $\bigotimes_{i \in I} {}_K A_i$. Нетрудно увидеть, используя это определение, что если $A_i \cong B_i$, $i \in I$, то их тензорные произведения над K изоморны как K-алгебры и если $G_i (i \in I)$ — абелевы группы, то $K(\prod_{i \in I} G_i) \cong \bigotimes_{i \in I} {}_K KG_i$. Эти свойства будем использовать в следующих утверждениях.

Теорема 12. *Пусть G — бесконечное прямое произведение циклических p-групп, K — поле первого рода относительно p и H — p-группа. Алгебры KG и KH изоморфны как K-алгебры тогда и только тогда, когда H — прямое произведение циклических p-групп и совпадают характеристические функции f_G и f_H абгебр KG и KH.*

Доказательство. Пусть $KG \cong KH$. Тогда, ввиду леммы 11, H — прямое произведение циклических p-групп. Пусть $\{\overline{m}_j | j \in s_p(K) \cap \mathrm{N}\}$ — ее соответствующая корректированная последовательность (3). Если G — предельная группа, то, ввиду леммы 10, H — также предельная группа. Тогда $s_p[K, G] = s_p[K, H] = \{1\}$ и из леммы 10 получается $f_G(1) = f_H(1) = |G|$, т. е. $f_G = f_H$. Пусть G — непредельная группа. Тогда H — также непредельная группа. Пусть $s_p[K, G] = \{j_1, \ldots, j_s, j_s+1\}$ и $s_p[K, H] = \{k_1, \ldots, k_l, k_l+1\}$. Из леммы 10 следует, что $k_1 = j_1$ и $f_G(j_1) = f_H(j_1)$. Допустим, что $k_2 = j_2, \ldots, k_t = j_t$, $t \geq 1$, $f_H(k_2) = f_G(j_2), \ldots, f_H(k_t) = f_G(j_t) \geq \aleph_0$.

а) Если $\overline{G}_{j_t} = \Pi_{r > j_t} G_r$—конечная или единичная группа, то из леммы 3 вытекает, что $\overline{H}_{j_t} = \Pi_{r > j_t} H_r$— соответственно конечная или единичная группа. Тогда $j_t + 1$ — последнее число областей $s_p[K, G[$ и $s_p[K, H]$, $f_G(j_t+1) = (K(\varepsilon_\alpha) : K)$ и $f_H(j_t+1) = (K(\varepsilon_\beta) : K)$, где p^α и p^β — показатели соответственно G и H и, ввиду леммы 4, имеет место $f_G(j_t+1) = f_H(j_t+1)$, т. е. $f_G = f_H$.

б) Пусть $|\overline{G}_{j_t}| \geq \aleph_0$. Из леммы 3 следует, что $|\overline{H}_{j_t}| \geq \aleph_0$, причем $\overline{G}_{j_t}$ и $\overline{H}_{j_t}$ — одновременно предельные или непредельные группы.

b1) Пусть $\overline{G}_{j_t}$ — предельная группа. Тогда $\overline{H}_{j_t}$ предельна, $j_t + 1$ — последнее число соответственно $s_p[K, G]$ и $s_p[K, H]$ и из определения 7 видно, что $f_G(j_t+1) = |G^{p^{j_t}}|$, а $f_H(j_t+1) = |H^{p^{j_t}}|$, т. е. $f_G = f_H$.

b2) Пусть $\overline{G}_{j_t}$ и $\overline{H}_{j_t}$ — непредельные группы. Тогда $G^{p^{j_t}}$ и $H^{p^{j_t}}$ — бесконечные непредельные группы. Пусть j—первое число $s_p(K)$ после j_t, для которого $|G^{p^j}| < |G^{p^{j_t}}|$. Тогда из леммы 3 следует, что $|G^{p^{j_t}}| = |H^{p^{j_t}}|$ и, что j — первое число $s_p(K)$ после j_t, для которого $|H^{p^j}| < |H^{p^{j_t}}|$. Из леммы 8 получается, что $j \in s_p[K, G]$, $j \in s_p[K, H]$ и $f_G(j) = |G^{p^{j_t}}| = |H^{p^{j_t}}| = f_H(j)$, т. е. $j_{t+1} = k_{t+1} = j$ и $f_G(j_{t+1}) = f_H(j_{t+1})$. Индукция закончена, т. е. $f_G = f_H$.

Наоборот, пусть G и H — прямые произведения циклических p-групп и $f_G = f_H$. Рассмотрим сначала случай, когда $s_p[K, G] = s_p[K, H] = \{1\}$. Пусть $f_G(1) = f_H(1)$. Тогда G и H — предельные группы и $|G| = |H|$. Если $|G| = \aleph_0$, то $|H| = \aleph_0$, G и H имеют неограниченные показатели и, ввиду п. 1 теоремы 2.2 [2], следует $KG \cong KH$. Пусть $|G| > \aleph_0$. Тогда $|H| > \aleph_0$. Каждая из групп G_i равенства (2) ($i = 1, 2, \ldots$) представим в виде $G_i = \Pi_{s \in I} \langle g_{is} \rangle$ ($|I| = |G|$) таким образом, что ее нетривиальные циклические прямые множители $\langle g_{is} \rangle$ (если $G_i \neq 1$) занимали начальные места в этом разложении. Тогда группа $A_s = \Pi_{i=1}^{\infty}$, $\langle g_{is} \rangle$ ($s \in I$) очевидно счетна с неограниченным показателем и $G = \Pi_{s \in I} A_s$. Аналогично $H = \Pi_{s \in I} B_s$, где каждая группа B_s счетна и с бесконечным показателем. Тогда, ввиду п. 1 теоремы 2.2 [2], имеет место $KA_s \cong KB_s$, $s \in I$, откуда тензорным умножением алгебр KA_s и KB_s над K вытекает $KG \cong KH$.

Пусть $s_p[K, G] = s_p[K, H] = \{j_1, \ldots, j_s, j_s+1\}$, $s \geq 1$. Введем обозначения $f_G(j) = f_H(j) = m_j$ ($j = j_1, \ldots, j_s$) и $f_G(j_s+1) = f_H(j_s+1) = m$. Пусть $G = U_1 \times \ldots \times U_s \times U_{s+1}$, где $U_t = G_{j_{t-1}+1} \times \ldots \times G_{j_t}$ ($t = 1 \ldots, s$; $j_0 = 0$) и $U_{s+1} = G_{j_s+1} \times G_{j_s+2} \ldots$ Исходя из разложения H вида (2), построим разложение $H = V_1 \times \ldots \times V_s \times V_{s+1}$, где V_t определяются аналогично группам U_t. Докажем, что $KU_t \cong KV_t$. Именно, используя равенства $m_{j_t} = m_{j_t} \aleph_0$, $t = 1, \ldots, s$, видно, что циклические прямые множители разложений групп U_t и V_t в прямые произведения циклических групп можно перегруппировать таким образом, что U_t и V_t будут прямыми произведениями m_{j_t} экземпляров счетных групп, т.е. $U_t = \Pi_{\lambda \in \Lambda} A_{t\lambda}$ и $V_t = \Pi_{\lambda \in \Lambda} B_{t\lambda}$, где $|\Lambda| = m_{j_t}$ и $|A_{t\lambda}| = |B_{t\lambda}| = \aleph_0$. Так как выполнено и $K(\varepsilon_r) = K(\varepsilon_{j_t})$, для каждого натурального r, для которого $j_{t-1} < r \leqq j_t$, то из п. 2 теоремы 2.2 [2] следует $KA_{t\lambda} \cong KB_{t\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$. Отсюда получится

$$(9) \qquad KU_t \cong KV_t, \quad i = 1, \ldots, s.$$

1) Пусть $m \geqq \aleph_0$. Тогда U_{s+1} и V_{s+1} — предельные группы с мощностью m и, ввиду высшесказанного, $KU_{s+1} \cong KV_{s+1}$. Отсюда и из (9) следует $KG \cong KH$.

2) Пусть $m < \aleph_0$. Тогда G и H имеют конечные показатели p^α и p^β и $m = (K(\varepsilon_\alpha) : K) = (K(\varepsilon_\beta) : K)$. Пусть $U_s = U'_s \times U''_s$ и $V_s = V'_s \times V''_s$, так что $|U''_s| = |V''_s| = \aleph_0$, $|U'_s| \geqq \aleph_0$, и $|V'_s| \geqq \aleph_0$. Аналогично равенству (9) устанавливается, что $KU'_s \cong KV'_s$. Тогда из $(K(\varepsilon_\alpha) : K) = (K(\varepsilon_\beta) : K)$ и из п. 2 теоремы 2.2 [2] следует $K(U''_s \times U_{s+1}) \cong K(V''_s \times V_{s+1})$. Отсюда, из $KU'_s \cong KV'_s$ и из (9) для $t = 1, \ldots, s-1$, получится $KG \cong KH$.

Теорема 13. *Пусть бесконечные абелевы p-группы G и H — прямые произведения счетных групп и K — поле первого рода относительно p. Имеет место K-изоморфизм $KG \cong KH$ тогда и только тогда, когда:* 1) $K(G/G^1) \cong K(H/H^1)$; 2) $|G^1| = |H^1|$, *если одна из этих мощностей бесконечна или единична;* 3) *если подгруппа G^1 элементов бесконечной высоты в G изоморфна квазициклической группе $Z(p^\infty)$ и G/G^1 — конечная группа, то $H^1 \cong Z(p^\infty)$.*

Доказательство. Пусть $KG \cong KH$. Из следствия 2 получаются условия 1) и 2) теоремы, а условие 3) — из п. 5 теоремы 2.2 [2].

Наоборот, пусть выполнены условия 1), 2), 3) теоремы. Пусть $|G| = \aleph_0$. Из $K(G/G^1) \cong K(H/H^1)$ и из теоремы 2.2 [2] следует K-изоморфизм $KG \cong KH$.

Пусть $|G| > \aleph_0$. Из условий 1) и 2) получается $|G| = |H| = n$, откуда вытекает, что

$$(10) \qquad G = \Pi_{i \in I} G_i, \quad H = \Pi_{i \in I} H_i, \quad |G_i| = |H_i| = \aleph^0, \quad |I| = n,$$
$$G^1 = \Pi_{i \in I} G^1_i, \quad H^1 = \Pi_{i \in I} H^1_i.$$

1) Если $G^1 = H^1 = 1$, то условие 1) теоремы дает $KG \cong KH$.

2) Пусть G^1 и H^1 — конечные неединичные группы. Следовательно, G и H — редуцированные группы, G/G^1 и H/H^1 — прямые произведения циклических групп с неограниченными показателями, $|G/G^1| = |H/H^1| > \aleph_0$ и в (10) только конечное число из групп G^1_i и H^1_i отличны от 1. Пусть

$$(11) \qquad G = F_1 \times T_1, \quad H = F_2 \times T_2,$$

где F_1 и F_2 содержат все множители G_i и H_j в (10), для которых $G^1_i \neq 1$ и $H^1_j \neq 1$. Следовательно, $|F_r| = \aleph_0$, F_r/F^1_r имеет бесконечный показатель и $|T_r| = n > \aleph_0$, $r = 1, 2$. Очевидно

$$(12) \qquad G/G^1 \cong (F_1/F^1_1) \times T_1, \quad H/H^1 \cong (F_2/F^1_2) \times T_2.$$

Из п. 2 теоремы 2.2 [2] следует $KF_1 \cong KF_2$. Из условия 1) и из (12) получается $K((F_1/F^1_1) \times T_1) \cong K((F_2/F^1_2) \times T_2)$.

2.1) Пусть G/G^1 — предельная группа. Следовательно, ввиду леммы 10, H/H^1 — предельная группа, $s_p[K, G/G^1] = s_p[K, H/H^1] = \{1\}$ и $f_{G/G^1}(1) = |G/G^1|$. Так как G/G^1 и H/H^1 — несчетные предельные группы, а $|F_1/F^1_1| = |F_2/F^1_2|$,

$=\aleph_0$, то из (12) следует, что T_1 и T_2 — предельные несчетные группы, причем $|T_1|=|G_1/G_1^1|=|H_1/H_1^1|=|T_2|$, т. е. $f_{T_1}=f_{G/G^1}=f_{T_2}$. Следовательно, ввиду теоремы 12, имеет место $KT_1\cong KT_2$. Отсюда, из $KF_1\cong KF_2$ и из (11) получается $KG\cong KH$.

2.2) Пусть G/G^1 и H/H^1 — непредельные группы. Введем обозначения $f=f_{G/G^1}$, $s_p[K, G/G^1]=\{j_1, \ldots, j_s, j_s+1\}$, $f(j)=m_j$ $(j=j_1, \ldots, j_s)$ и $f(j_s+1)=m$. Тогда $m\geqq\aleph_0$ и $s\geqq 1$. Кроме того, ввиду (12) и теоремы 12, f — определяющая функция алгебр $K((F_i/F_i^1)\times T_i)$, $i=1, 2$.

2.2.1) Пусть $m>\aleph_0$. Из этого неравенства, из $|F_i/F_i^1|=\aleph_0$ и из (12) следует, что $f_{T_i}=f$, $i=1, 2$, т. е., ввиду теоремы 12, что $KT_1\cong KT_2$. Отсюда и из $KF_1\cong KF_2$ вытекает $KG\cong KH$.

2.2.2) Пусть $m=\aleph_0$. Тогда $m_{j_s}>\aleph_0$. Из (12) следует, что $s_p[K, T_1]=s_p[K, T_2]=s_p[K, G/G^1]$ и $f_{T_i}(j_r)=m_{j_r}$, $r=1, \ldots, s$ $(i=1, 2)$. Пусть $T_i=T_i^*\times\overline{T}_i$, где T_i^* — произведение циклических прямых множителей группы T_i, порядки которых не превышают p^{j_s}, а $|\overline{T}_i|\leqq\aleph_0$. Тогда (11) принимают вид $G=T_1^*\times F_1\times\overline{T}_1$ и $H=T_2^*\times F_2\times\overline{T}_2$. Из теоремы 12 следует $KT_1^*\cong KT_2^*$, так как $s_p[K, T_1^*]=s_p[K, T_2^*]=s_p[K, T_1]$, $f_{T_i^*}(j_r)=m_r$, $r=1, \ldots, s$, и $f_{T_i^*}(j_r+1)=(K(\varepsilon_{j_s}):K)$ $(i=1, 2)$. Кроме того, ввиду п. 8 теоремы 2.2 [2], имеет место $K(F_1\times\overline{T}_1)\cong K(F_2\times\overline{T}_2)$. Отсюда и из $KT_1^*\cong KT_2^*$ следует $KG\cong KH$.

3) Пусть $|G^1|=|H^1|\geqq\aleph_0$. Введем обозначения $G=P\times R$ и $H=P_1\times R_1$, где P и P_1 — максимальные полные подгруппы групп G и H. Так как $R/R^1\cong G/G^1$ и $R_1/R_1^1\cong H/H^1$, то $K(R/R^1)\cong K(R_1/R_1^1)$. Отсюда и из леммы 4 заключаем, что R и R_1 имеют одновременно конечные или бесконечные показатели.

3.1) Пусть R и R_1 не имеют конечных показателей. Докажем, что

$$(13)\qquad KG\cong K(\Pi_{|G^1|}Z(p^\infty))\otimes_K K(G/G^1),\quad KH\cong K(\Pi_{|H^1|}Z(p^\infty))\otimes_K K(H/H^1),$$

откуда, ввиду условия 1) теоремы и $|G^1|=|H^1|\geqq\aleph_0$ будет вытекать, что $KG\cong KH$. Пусть

$$(14)\qquad R=\Pi_{i\in I}A_i\times\Pi_{j\in J}B_j\times\Pi_{s\in S}C_s,\quad |I|=\mu,\quad |J|=\nu,\quad |S|=\tau,$$

где $A_i^1=1$, $1<|B_j^1|<\aleph_0$ и $|C_s^1|=\aleph_0$, соответственно для всех $i\in I$, $j\in J$ и $s\in S$. Введем обозначения $\Pi_{i\in I}A_i=A$, $\Pi_{j\in J}B_j=B$ и $\Pi_{s\in S}C_s=C$. Очевидно можно предполагать, что μ и τ равны 0, 1 или несчетной мощности, а ν равно 0, 1 или бесконечной мощности.

3.1.1) Пусть a) $\tau\neq 0$ или b) $\tau=0$, но $\nu\geqq\aleph_0$. Докажем, что для R можно получить такую формулу вида (14), что в ней $\nu=0$ и $\tau\geqq 1$. Действительно, если $\tau\geqq\nu$, то при помощи множества T, для которого $|T|=\tau$, перенумеруем группы C_s и B_j (эвентуально некоторые $B_j=1$), так что

$$(15)\qquad R=\Pi_{i\in I}A_i\times\Pi_{t\in T}(B_t\times C_t),$$

где $B_t\times C_t$ — группа первоначального типа C_s, т. е. $|(B_t\times C_t)^1|=\aleph_0$. Если же $\tau<\nu$, то B можно представить в виде $B=\Pi_{t\in T}B_t$, $|T|=\nu$, так что $|B_t^1|=\aleph_0$, а C — в виде $C=\Pi_{t\in T}C_t$ (эвентуально некоторые $C_t=1$). Тогда имеет место (15) и $B_t\times C_t$ — группа первоначального типа C_s. Таким образом в (14) можно предполагать, что $\nu=0$ и $\tau\geqq 1$. Так как группы C_s в (14) удовлетворяют условиям п. 9 теоремы 2.2 [2], то, по той же теореме

(16) $$KC_s \cong K((\Pi_{\aleph_0} Z(p^\infty)) \times C_s/C_s^1).$$

Кроме того, если $P \neq 1$, то по п. 4 теоремы 2.2 [2] получится

(17) $$KP \cong \begin{cases} K(\Pi_{|P|} Z(p^\infty)), & \text{если } P \cong Z(p^\infty) \times Z(p^\infty) \times \ldots, \\ K(Z(p^\infty)), & \text{если } P \cong Z(p^\infty). \end{cases}$$

Из (16), (17) и из $KA \cong KA$ получится $KG \cong K(A \times \Pi_{s \in S} C_s/C_s^1 \times \Pi_\varepsilon Z(p^\infty))$, где $\varepsilon = \tau\aleph_0 + |P|$. Так как в (14) считаем, что $\nu = 0$, то $\tau\aleph_0 + |P| = |G^1|$ и $A \times \Pi_{s \in S} C_s/C_s^1 \cong G/G^1$. Таким образом, первая формула (13) доказана.

3.1.2) Пусть $\tau = 0$ и $\nu = 1$. Следовательно, $|R^1| < \aleph_0$. Так как $|G^1| \geqq \aleph_0$, то $P \neq 1$. Пусть $P \cong Z(p^\infty) \times P'$. Тогда $G \cong A \times B \times Z(p^\infty) \times P'$. Группа $B \times Z(p^\infty)$ удовлетворяет условиям п. 9 теоремы 2.2 [2], следовательно,

(18) $$K(B \times Z(p^\infty)) \cong K(B/B^1) \times \Pi_{\aleph_0} Z(p^\infty)).$$

Если $P' \neq 1$, то для KP' имеет место формула вида (17). Тогда из этой формулы, из (18) и из $KA \cong KA$ получится $KG \cong K(A \times (B/B^1)) \otimes_K K(\Pi_{\aleph_0 + \lambda} Z(p^\infty))$, где $\lambda = |P'|$, $\lambda = 1$ или $\lambda = 0$. Так как $\aleph_0 + \lambda = |G^1|$ и $A \times (B/B^1) \cong G/G^1$, то первая формула в (13) доказана.

3.1.3) Пусть $\tau = \nu = 0$. Тогда A имеет бесконечный показатель и $P \neq 1$. Разложим A в виде $A = A' \times \bar{A}$, где A' и $\bar{A}$ — прямые произведения циклических групп с бесконечными показателями и $\bar{A}$ — счетная группа. Пусть $P \cong Z(p^\infty) \times P'$. Тогда $G \cong A' \times \bar{A} \times Z(p^\infty) \times P'$. Так как $\bar{A} \times Z(p^\infty)$ удовлетворяет п. 9 теоремы 2.2 [2], то

(19) $$K(\bar{A} \times Z(p^\infty)) \cong K(\bar{A} \times \Pi_{\aleph_0} Z(p^\infty)).$$

Если $P' \neq 1$, то для KP' имеет место формула вида (17). Из этой формулы и из (19) и из $KA' \cong KA'$ получается $KG \cong K(\Pi_{\aleph_0 + \lambda} Z(p^\infty)) \otimes_K K(\bar{A} \times A')$, где $\lambda = |P'|$, $\lambda = 1$ или $\lambda = 0$. Так как $\aleph_0 + \lambda = |G^1|$ и $\bar{A} \times A' = A \cong G/G^1$, то этим первая формула (13) доказана.

3.2) Пусть R и R^1 имеют конечные показатели. Тогда R и R_1 — прямые произведения циклических групп и условие 1) теоремы получает вид $KR \cong KR_1$. Кроме того, $|P| = |G^1| = |H^1| = |P_1| \geqq \aleph_0$.

3.2.1) Пусть $|P| > \aleph_0$. Тогда $P \cong \Pi_{|P|} Z(p^\infty) \cong P_1$, $KP \cong KP_1$ и $KR \cong KR_1$ дают $KG \cong KH$.

3.2.2) Пусть $|P| = \aleph_0$. Тогда $|R| = |R_1| = n > \aleph_0$. Из $KR \cong KR_1$, ввиду теоремы 12, следует, что $f_R = f_{R_1} = f$. Пусть j_1 — первое число $s_p[K, R]$. Представим R и R_1 в виде $R = R^* \times B$, $R_1 = R_1^* \times B_1$, где $B \cong B_1 \cong \Pi_{\aleph_0}(p^{j_1})$. Тогда $G = P \times B \times R^*$, $H = P_1 \times B_1 \times R_1^*$ и $f_{R^*} = f_{R_1^*} = f$. Следовательно, $KR^* \cong KR_1^*$. Так как $P \times B$ и $P_1 \times B_1$ удовлетворяют п. 7 теоремы 2.2 [2], то $K(P \times B) \cong K(P_1 \times B_1)$. Отсюда и из $KR^* \cong KR_1^*$ получается $KG \cong KH$.

Лемма 14. *Пусть G — абелева p-группа и K — поле, характеристика которого отлична от p, причем*: 1) *если K — поле первого рода относительно p, то $G \neq G^1$ и*

(20) $$G/G^1 = \Pi_{i \in I} \langle b_i G^1 \rangle;$$

2) *если K — поле второго рода относительно $p=2$ и $K\neq K(\varepsilon_2)$, то $G\neq G^2$ и $G/G^2=\Pi_{i\in I}\langle b_iG^2\rangle$. Тогда для каждой подгруппы B группы G, порожденной конечным или счетным подмножеством элементов b_i, $i\in I$, существует такая подгруппа A, $A\supseteq B$, что $|A|\leq\aleph_0$, и такое подмножество J множества I, что если имеют место условия 1), то $A\cap G^1=A^1$ и*

$$A/A^1=\Pi_{i\in J}\langle b_iA^1\rangle, \tag{21}$$

а если имеют место условия 2), то $A\cap G^2=A^2$ и $A/A^2=\Pi_{i\in J}\langle b_iA^2\rangle$.

Доказательство проведем только в случае 1). Фиксируем b_i в (20). Положим $B_0=B$. Допустим, что уже построена возрастающая последовательность $B=B_0\subseteq B_1\subseteq\ldots\subseteq B_n$, $n\geq 0$, таких подгрупп B_j группы G, что $|B_j|\leq\aleph_0$ ($j=0, 1,\ldots, n$) и $B^1_{j+1}\supseteq B_j\cap G^1$, $j=0, 1,\ldots, n-1$. Для каждого $q_i\in B_n\cap G^1$ и для каждого $m_i\in\mathbb{N}$, существует такое $x_{m_i}\in G$, что $x_{m_i}^{p^{m_i}}=q_i$. Элементы x_{m_i}, ввиду (20), однозначно записываются в виде

$$x_{m_i}=b_{j_1}^{t_{j_1}}\ldots b_{j_s}^{t_{j_s}}h_r,\quad h_r\in G^1,\quad j_k\in I,\quad k=1,\ldots, s. \tag{22}$$

Пусть B_{n+1} — подгруппа G, порожденная B_n и элементами b_{j_k} и h_r из (22), когда q_i пробегает $B_n\cap G^1$. Тогда $|B_{n+1}|\leq\aleph_0$ и $B^1_{n+1}\supseteq B_n\cap G^1$. Положим $\bigcup_{n=0}^{\infty}B_n=A$. Очевидно $|A|\leq\aleph_0$. Легко видеть, что $A\cap G^1=A^1$. Пусть $J=\{i\in I|b_i\in A\}$. Тогда $A=\langle A^1, b_i\, i\in J\rangle$. Следовательно, имеет место (21).

Лемма 15. *Пусть G — абелева p-группа, H и F — подгруппы G и K — поле, характеристика которого отлична от p. Предположим, что: 1) если K — поле первого рода относительно p, то $H\cap G^1=H^1$ и $F\subseteq G^1$ и 2) если K — поле второго рода относительно $p=2$ и $K\neq K(\varepsilon_2)$, то $H\cap G^2=H^2$ и $F\subseteq G^2$. Тогда* a) *$K(HF)$ обладает базисом $H\times T$, где T — подгруппа максимальной полной подгруппы $dS(KG)$ группы $S(KG)$, $S(KH)\cap T=1$ и каждый элемент $f\in F$ имеет вид $f=\tilde{f}s$, где $\tilde{f}\in T$, а $s\in dS(KH)$;* b) *если K — поле первого (второго) рода относительно p и H содержит полную систему $\Pi(G/G^1)$ представителей G по G^1 (соответственно, $H\supseteq\Pi(G/G^2)$), то KG обладает базисом $H\times T$, где T — полная p-подгруппа $V(KG)$ и $S(KH)\cap T=1$.*

Доказательство проведем только в случае 1). Докажем а). Пусть $F=\{g_i/i\in I\}$ и I — вполне упорядоченное множество. Тогда $HF=\langle H, g_0, g_1,\ldots, g_i,\ldots|\, i\in I\rangle$. Введем обозначения $G_0=H$, $G_\alpha=\langle G_{\alpha-1}, g_{\alpha-1}\rangle$, если порядковое число $\alpha-1$ существует ($\alpha\geq 1$), и $G_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}G_\beta$, если $\alpha-1$ не существует. Тогда $HF=\bigcup_{\alpha\in I}G_\alpha$. Докажем методом индукции в I, что для каждого $\alpha\in I$ алгебра KG_α обладает базисом $\tilde{G}_\alpha=H\times T_\alpha$, $T_\alpha\subseteq dS(K(HG))$, $S(KH)\cap T_\alpha=1$ и если $\alpha\geq 1$, то $T_\alpha=\langle g_\gamma|\gamma<\alpha\rangle$, где

$$\tilde{g}_\gamma=g_\gamma s_\gamma,\quad s_\gamma\in dS(KH), \tag{23}$$

$\gamma<\alpha$, причем $T_\gamma\subseteq T_\alpha$, если $\gamma<\alpha$ и любой элемент $f_\alpha\in G_\alpha\cup F$ имеет вид $f_\alpha=\tilde{g}_\alpha s_\alpha$, $\tilde{g}_\alpha\in T_\alpha$, $s_\alpha\in dS(KH)$. Если $\alpha=0$, то, ввиду предложения **5** [9], утверждение имеет место. Допустим, что утверждение справедливо для всех $\beta<\alpha$, $\alpha\in I$.

1) Пусть $\alpha-1$ не существует. Положим $\tilde{G}_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}\tilde{G}_\beta$ и $T_\alpha=U_{\beta<\alpha}T_\beta$. Тогда $\tilde{G}_\alpha=H\times T_\alpha$ является базисом KG_α и остальные требования выполнены.

2) Пусть $\alpha-1$ существует. Если индекс $(G_\alpha : G_{\alpha-1})=1$, то утверждение справедливо. Пусть $(G_\alpha : G_{\alpha-1})=p^m>1$. Очевидно $g_{\alpha-1}^{p^m}=hg_{r_1}^{t_1}\dots g_{r_q}^{t_q}$, где $r_j<\alpha-1$ $(j=1,\dots,q)$ и $h\in H^1$. Следовательно, ввиду предложения 5 [9], $h\in dS(KH)$. Отсюда, в силу (23), получится $\tilde{g}_{\alpha-1}^{p^m}=\tilde{g}_{r_1}^{t_1}\dots\tilde{g}_{r_q}^{t_q}\in T_{\alpha-1}$, где $\tilde{g}_{\alpha-1}=g_{\alpha-1}s_{\alpha-1}$ для некоторого $s_{\alpha-1}\in dS(KH)$. Следовательно, для $\tilde{g}_{\alpha-1}$ справедливо (23). Из $g_{\alpha-1}^{p^{m-1}}\notin G_{\alpha-1}$ следует $\tilde{g}_{\alpha-1}^{p^{m-1}}=(g_{\alpha-1}s_{\alpha-1})^{p^{m-1}}\notin S(K(H\times T_{\alpha-1}))$, т. е. $\tilde{g}_{\alpha-1}^{p^m}\notin S(KH)\cap T_{\alpha-1}$. Тогда $\langle S(KH)\times T_{\alpha-1}, \tilde{g}_{\alpha-1}\rangle = S(KH)\times\langle T_{\alpha-1}, \tilde{g}_{\alpha-1}\rangle$ и полагая $T_\alpha=\langle T_{\alpha-1}, g_{\alpha-1}\rangle$, получим $S(KH)\cap T_\alpha=1$ и $T_\alpha\supseteqq T_{\alpha-1}$. Легко видеть, что $\tilde{G}_\alpha=H\times T_\alpha$ является базисом KG_α. Покажем, что для любого $f_\alpha\in G_\alpha\cap F$ выполнено упомянутое требование. Действительно, $G_\alpha\cap F=(G_{\alpha-1}\cap F)\langle g_{\alpha-1}\rangle$. Следовательно, $f_\alpha=ag_{\alpha-1}^{-k}$, где $a\in G_{\alpha-1}\cap F$. Тогда, в силу индуктивного предположения, $a=\tilde{a}s$, где $\tilde{a}\in T_{\alpha-1}$, а $s\in dS(KH)$ и $f_\alpha=\tilde{a}s\tilde{g}_{\alpha-1}^k s_{\alpha-1}^k$. Следовательно, $f_\alpha=s_\alpha\tilde{f}_\alpha$, где $s_\alpha\in dS(KH)$ и $\tilde{f}_\alpha\in T_\alpha$. Полагая $T=U_{\alpha\in I}T_\alpha$, получится что $H\times T$ — базис $K(HF)$ и что требования для T, $S(KH)$ и для элементов F выполнены.

Докажем b). Применим a), полагая $F=G^1$. Тогда, ввиду a) KG имеет базис $H\times T$, где $T\subseteqq dS(KG)$ и $S(KH)\cap T=1$. Следовательно, каждый элемент $\tilde{f}\in T$ имеет бесконечную высоту в $KG=K(H\times T)$ [4]. Отсюда вытекает, что $\tilde{f}$ имеет бесконечную высоту и в $H\times T$, т. е. в T, или T — полная p-группа.

Лемма 16. *Пусть G — абелева p-группа, H и F — подгруппы G, K — поле, характеристика которого отлична от p, причем:* 1) *если K — поле первого рода относительно p, то для G/G^1 имеет место* (20) *и*

$$H\cap C^1=H^1,\ F\cap G^1=F^1,\ H/H^1=\Pi_{j\in J}\langle b_jH^1\rangle,\ F/F^1=\Pi_{k\in A}\langle b_kF^1\rangle, \tag{24}$$

где $J\subseteqq I$ и $A\subseteqq I$; 2) *если K — поле второго рода относительно $p=2$ и $K\neq K(\varepsilon_2)$, то имеют место* (20) *и* (24), *причем G^1, H^1 и F^1 заменены, соответственно, через G^2, H^2 и F^2. Тогда* a) *$K(HF)$ имеет базис $H\times T$, где $T\subseteqq S(KG)$, и* b) *если выполнено* 1), *то*

$$HF\cap G^1=H^1F^1=(HF)^1, \tag{25}$$

а если выполнено 2), *то $HF\cap G^2=(HF)^2$.*

Доказательство проведем в случае 1). Любой элемент $g\in HF$ можно представить в виде $g=b_{j_1}^{t_1}\dots b_{j_r}^{t_r}b_{k_1}^{l_1}\dots b_{k_r}^{l_r}\bar{h}\bar{f}_{l_\mu}$, где $\bar{h}\in H^1$, $\bar{f}\in F^1$, $j_\lambda\in J$, $k_\mu\in A$, $b_{j_\lambda}^{t_\lambda}\notin G^1$ и $b_{k_\mu}^{l_\mu}\notin G^1$. Пусть $g\in HF\cap G^1$. Тогда, для фиксированного j_λ, в последнем равенстве могут участвовать только такие пары $(b_{j_\lambda}^{t_\lambda}, b_{k_\mu}^{t_\mu})$, $j_\lambda\in J_\lambda$, $k_\mu\in A$, для которых $k_\mu=j_\lambda$ и $h_\lambda=b_{j_\lambda}^{t_\lambda+l_\mu}\in G^1$. Ввиду того, что $h_\lambda\in H\cap G^1=H^1$, $g\in H^1F^1$, т. е. $HF\cap G^1\subseteqq H^1F^1$. Этим доказана первая формула (25), откуда следует $H^1F^1=(HF)^1$.

Ввиду утверждения a) леммы 15 $K(HF^1)$ имеет базис $H\times\tilde{F}$, где $\tilde{F}\subseteqq dS(KG)$, причем любой элемент F^1 имеет вид $\tilde{f}s$, где $\tilde{f}\in\tilde{F}$ и $s\in dS(KH)$. Очевидно $HF=\langle HF^1, b_j \mid j\in A\rangle$. Введем полный порядок множества A. Положим $G_0=HF^1$, $b_0=1$, $G_\alpha=\langle G_{\alpha-1}, b_\alpha\rangle$, если $\alpha-1$ существует, $\alpha\geqq 1$ и $G_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}G_\beta$, если $\alpha-1$ не существует. Тогда $HF=\bigcup_{\alpha\in A}G_\alpha$. Методом индукции в A, как в лемме 15, доказывается, что для каждого $\alpha\in A$, KG_α имеет базис $\tilde{G}_\alpha=H$

$\times T_\alpha$, $T_\alpha \supseteq \tilde{F}$, $T_\alpha \subseteq S(KG)$ и $T_\beta \subseteq T_\alpha$, если $\beta < \alpha$. Для этой цели, в случай непредельного α, доказывается, что если $(G_\alpha : G_{\alpha-1}) = p^m > 1$, то m — минимальное натуральное число со свойством $b_\alpha^{p^m} \in F^1$. Отсюда вытекает, что $b_\alpha^{p^m} = \tilde{f}_\alpha s_\alpha$, где $\tilde{f}_\alpha \in \tilde{F}$ и $s_\alpha \in dS(KH)$. Следовательно, $s_\alpha = a_\alpha^{p^m}$ и, полагая $b_\alpha a_\alpha^{-1} = \tilde{b}_\alpha$, получается $b_\alpha^{p^m} = \tilde{f}_\alpha \in \tilde{F} \subseteq T_{\alpha-1}$. Аналогично лемме 15 доказывается $\tilde{b}_\alpha^{p^{m-1}} \notin H \times T_{\alpha-1}$ и остальная часть леммы.

Предложение 17. *Пусть G — абелева p-группа, K — поле, характеристика которого отлична от p, и если K — поле первого рода относительно p, то G/G^1 — прямое произведение циклических групп. Тогда алгебра GK обладает базисом $G' \subseteq V(KG)$, который разлагается в прямое произведение счетных p-групп.*

Доказательство. Пусть K — поле первого рода относительно p и $G \neq G^1$. Пусть для G/G^1 имеет место (20) и B_0 — подгруппа G, порожденная счетным множеством $\bar{B}_0$ элементов $b_i (|\bar{B}_0| = |I|$, если $|I| < \aleph_0)$. Введем полный порядок в I. Ввиду леммы 14, существует такая подгруппа A_0 в G, что $A_0 \supseteq B_0$, $|A_0| \leq \aleph_0$, $A_0 \cap G^1 = A_0^1$ и $A_0/A_0^1 = \Pi_{i \in I_0} \langle b_i, A_0 \rangle$, где $I_0 \supseteq I$. Построим индуктивно последовательность подгрупп A_γ. Предположим, что для всех $\alpha < \gamma$, $\gamma \geq 1$ уже построены такие подгруппы A_α, что: 1) $A_\alpha \supseteq A_\beta$ для всех $\beta < \alpha$; 2) $A_\alpha \cap G^1 = A_\alpha^1$; 3) $A_\alpha / A_\alpha^1 = \Pi_{j \in I_\alpha} \langle b_j A_\alpha^1 \rangle$, $I_\alpha \subseteq I$ и при $\beta < \alpha$ справедливо $I_\beta \subseteq I_\alpha$; 4) KA_α имеет базис C_α, являющийся прямым произведением счетных p-групп, $C_\alpha \subseteq V(KG)$, причем, если $\alpha \geq 1$ и $\alpha - 1$ существует, то $C_\alpha = C_{\alpha-1} \times T_\alpha$.

I) Пусть $\gamma - 1$ существует. Если $I_{\gamma-1} = I$, то A_γ не строится. Пусть $I_{\gamma-1} \subsetneq I$. Образуем подгруппу B_γ, порожденную счетным множеством $\bar{B}_\gamma$ элементов b_i, $i \in X_\gamma \subseteq I \setminus I_{\gamma-1}$. Ввиду леммы 14 существует такая подгруппа $D_\gamma \subseteq G$, что $D_\gamma \supseteq B_\gamma$, $D_\gamma \cap G^1 = D_\gamma^1$, $|D_\gamma| \leq \aleph_0$ и $D_\gamma / D_\gamma^1 = \Pi_{j \in J_\gamma} \langle b_j D_\gamma^1 \rangle$. Положим $A_\gamma = A_{\gamma-1} D_\gamma$. Следовательно, *1)* $A_\gamma \supseteq A_\beta$ для $\beta < \gamma$. Так как, ввиду леммы 16, $A_{\gamma-1}^1 D_\gamma^1 = A_\gamma$, то $A_\gamma = \langle A_\gamma^1, b_s | s \in I_\gamma \rangle$, где $A_\gamma = A_{\gamma-1} D_\gamma$, откуда вытекает условие 3) для A_γ. Тройка $(A_\gamma, A_{\gamma-1}, D_\gamma)$ удовлетворяет лемме 16, следовательно, $A_\gamma \cap G^1 = A_\gamma^1$, т. е. выполнено условие 2) для A_γ и KA_γ имеет базис $A_{\gamma-1} \times T_\gamma$, где $T_\gamma \subseteq S(KG)$ и $|T_\gamma| \leq |D_\gamma| \leq \aleph_0$. Из существования $A_{\gamma-1} \times T_\gamma$ и из $T_\gamma \subseteq V(KG)$ вытекает, что $(KA_{\gamma-1}) \cap T_\gamma = 1$. Ввиду индуктивного предположения $KA_{\gamma-1}$ имеет такой базис $C_{\gamma-1} \subseteq V(KG)$, что $C_{\gamma-1}$ — прямое произведение счетных p-групп. Тогда C_γ — искомый базис KA_γ, т. е. для A_γ выполнено 4).

II) Пусть $\gamma - 1$ не существует. Положим $A_\gamma = \bigcup_{\alpha < \gamma} A_\alpha$. Легко заметить, что выполняются условия 1), 2) и 3) для A_γ. Пусть $C_\gamma = \bigcup_{\gamma < \alpha} C_\alpha$. Так как для каждого непредельного $\alpha < \gamma$ выполнено $C_\alpha = C_{\alpha-1} \times T_\alpha$, то $C_\gamma = C_0 \times \Pi T_\beta$, где β пробегает множество непредельных чисел интервала $(0, \gamma)$, C_γ — базис KA_γ и выполнено 4) для KA_γ. Пусть τ — первое порядковое число, для которого $A_{\tau+1}$ не существует. Тогда $A_\tau G^1 = G$ и KA_τ имеет базис C_τ. Так как $A_\tau \supseteq \Pi(G/G^1)$ то, ввиду утверждения b) леммы 15, KG имеет базис $A_\tau \times T$, где T — полная p-подгруппа $V(KG)$ и $S(KA_\tau) \cap T = 1$. Следовательно, $S(KC_\tau) \cap T = 1$ и $C_\tau \times T$ — искомый базис KG.

Теорема 18. *Пусть G — такая бесконечная абелева p-группа, что G/G^1 — прямое произведение циклических групп, H — p-группа и K — поле первого рода относительно p. Алгебры KG и KH изоморфны как K-алгебры тогда и только тогда, когда: 1) H — абелева группа; 2) H/H^1 — прямое произведение циклических групп; 3) $K(G/G^1) \cong K(H/H^1)$; 4) если G^1 — бесконечная группа или $G^1 = 1$, то $|G^1| = |H^1|$; 5) если G^1 — квазициклическая группа $Z(p^\infty)$ и G/G^1 — конечная группа, то $H^1 \cong Z(p^\infty)$.*

Доказательство. Пусть $KG \cong KH$. Очевидно тогда H — абелева группа и, ввиду следствия 2, $K(G/G^1) \cong K(H/H^1)$ а, в силу леммы 11, H/H^1 — прямое произведение циклических групп. Из следствия 2 прямо получается условие 4) теоремы, а из п. 2 теоремы 2.2 [2] — условие 5).

Наоборот, пусть выполнены условия 1) — 5) теоремы. Ввиду предложения 17, KG и KH имеют базисы G_1 и H_1, являющиеся прямыми произведениями счетных абелевых p-групп. Докажем, что $KG_1 \cong KH_1$. Для этой цели установим, что для групп G_1 и H_1 выполнены условия 1), 2) и 3) теоремы 13. Действительно, ввиду следствия 2, $K(H_1/H_1^1) \cong K(H/H^1) \cong K(G/G^1) \cong K(G_1/G_1^1)$, т. е. выполнено условие 1) теоремы 13. Пусть $G_1^1 = 1$ или $|G_1^1| \geq \aleph_0$. Тогда $|G_1^1| = |G^1| = |H^1| = |H_1^1|$, т. е. выполнено условие 2) теоремы 13 для групп G_1 и H_1. Если $G_1^1 \cong Z(p^\infty)$ и $|G_1/G_1^1| < \aleph_0$, то, используя, что $KG = KG_1$, $K(G/G^1) \cong K(H/H^1)$, $KH = KH_1$ и п. 5 теоремы 2.2 [2], получится $H_1^1 \cong Z(p^\infty)$, т. е. выполнено условие 3) теоремы 13. Следовательно, $KG_1 \cong KH_1$, откуда вытекает $KG \cong KH$.

Предложение 19. *Пусть A — абелева группа, периодическая часть которой является p-группой. Если K — поле второго рода относительно p, то KA обладает расщепляемым групповым базисом, периодическая часть которой совпадает с периодической частью группы A.*

Доказательство. Пусть $\{g_i | i \in I\} = \Pi(A/tA)$, где tA — периодическая часть A. Рассмотрим три случая.

1) $p \neq 2$ или 2) $p = 2$, но $K = K(\varepsilon_2)$. Тогда $tA \subseteq P = dS(KtA)$ [9]. Пусть $F = \langle P, g_i | i \in I\rangle$. Очевидно $F \subseteq V(KA)$ и $A \subseteq F$. Кроме того, $tF = P$. Действительно, $P \subseteq tF$ и, наоборот, если $f \in tF$, то $f = g_i p$, $i \in I$, $p \in P$, следовательно, $g_i \in tA \subseteq P$, т. е. $f \in P$ или $tF \subseteq P$. Отсюда и из того, что P — полная группа, вытекает $F = P \times A'$, где A' — подгруппа F без кручения. Нетрудно видеть, что $tA \times A'$ — искомый базис KA.

3) $p = 2$ и $K \neq K(\varepsilon_2)$. Тогда $(tA)^2 \subseteq P = dS(KtA)$ [9] и для $L = \langle P, tA\rangle$ имеет место $L = P \times T$, где T — группа, показатель которой не превышает 2 Пусть $F = \langle L, g_i | i \in I\rangle$. Очевидно $tF = F \cap tU(KA) \subseteq F \cap KtA = L$, где включение следует из леммы 9 [5], т. е. $tF = L$. Следовательно, F — расщепляемая группа, т. е. $F = L \times A'$. Тогда $tA \times A'$ будет искомый базис.

Теорема 20. *Пусть A и B — абелевы группы, их соответственные периодические части G и H — p-группы и K — поле второго рода относительно p. Алгебры KA и KB изоморфны как K-алгебры тогда и только тогда, когда:* 1) $A/G \cong B/H$; 2) $|G| = |H|$; 3) *если $p = 2$ и $K \neq K(\varepsilon_2)$, где ε_2 — первообразный корень степени 4 из 1 в алгебраическом замыкании $\bar{K}$ поля K, то:* 3.1) $(G : G^2) = (H : H^2)$, 3.2) *мощности $|G^2|$ и $|H^2|$ совпадают, если одна из них бесконечна или равна* 1.

Доказательство. Пусть а) $A = G$. Если $KA \cong KB$, то $A/G \cong B/H$ (см., например, лемму 1 [3]), т. е. $B = H$. Наоборот, если выполнены условия 1), 2) и 3) теоремы, то $B = H$. Следовательно, в доказательстве а) можем предполагать, что $B = H$ (и $A = G$). Если G — конечная группа, то случай рассмотрен в предложении 12 [9]. Поэтому можем предполагать, что $|G| \geq \aleph_0$.

Пусть a1) $p \neq 2$ или a2) $p = 2$ и $K = K(\varepsilon_2)$. Если $KG \cong KH$, то, очевидно, $|G| = |H|$, т. е. выполнено условие 2) теоремы. Наоборот, пусть $|G| = |H|$. Ввиду предложения 17, KG и KH имеют базисы G^* и H^*, являющиеся прямыми произведениями счетных p-групп. Тогда $G^* = \Pi_{i \in I} G_i$ и $H^* = \Pi_{i \in I} H_i$, где $|G_i| = |H_i| = \aleph_0$ для каждого $i \in I$. Ввиду теорем 2.3 и 2.4 [2], имеет место $KG_i \cong KH_i$, откуда вытекает $KG \cong KH$.

а3) Пусть $p=2$ и $K\neq K(\varepsilon_2)$. Если $KG\cong KH$, то $|G|=|H|$ и условие 3) доказывается аналогично следствию 2 [3]. Наоборот, пусть выполнены условия 2) и 3) теоремы. Ввиду предложения 17, KG обладает базисом $G^*=\Pi_{i\in I}G_i$, где $|G_i|=\aleph_0$. Имея в виду, что $G_i\subseteq S(KG)$ и что $KG^*\cong\bigotimes_{i\in I}{}_K KG_i$, из теоремы 2.4 [2] следует, что KG обладает базисом G' следующего вида:

$$G'\cong\Pi_{n_1}Z(2^\infty)\times\Pi_{n_2}(4)\times\Pi_{n_3}(2). \tag{26}$$

Докажем, что из базиса G' можно перейти к одному из следующих трех типов базисов:

$$\Pi_{n_3}(2),\quad n_3\geq\aleph_0\,; \tag{27}$$

$$\Pi_{n_1}Z(2^\infty)\times\Pi_{n_3}(2),\quad n_1\geq 1\,; \tag{28}$$

$$(4)\times\Pi_{n_3}(2),\quad n_3\geq\aleph_0. \tag{29}$$

Рассмотрим следующие подслучаи случая а3):

1) Пусть $n_2\geq\aleph_0$. Если $C\cong\Pi_{\aleph_0}(4)$, то

$$K(\Pi_{n_2}(4))\cong K(\Pi_{n_2}C)\cong\bigotimes_{n_2}{}_K KC\cong\bigotimes_{n_2}{}_K K(Z(2^\infty)\times\Pi_{\aleph_0}(2))\cong K(\Pi_{n_2}Z(2^\infty)\times\Pi_{n_2}(2)),$$

где третий изоморфизм вытекает из п. 3 теоремы 2.4 [2] (через $\bigotimes_{n_2}{}_K A$ обозначено тензорное произведение n_2 копией K-алгебр A над K). Следовательно, KG имеет базис типа (28).

2) Пусть $0\leq n_2\leq\aleph_0$ и 2.1) $n_1\neq 0$. Из (26) выделим один множитель $Z(2^\infty)$. Изпользуя п. 5 теоремы 2.4 [2], получится $K(Z(2^\infty)\times\Pi_{n_2}(4))\cong K(Z(2^\infty)\times\Pi_{n_2}(2))$. Следовательно, тензорное произведение над K полученной алгебры и алгебры $K(\Pi_{n_1-1}Z(2^\infty)\times\Pi_{n_3}(2))$ будет алгеброй с базисом, не содержащим циклических групп порядка 4, т. е. KG имеет базис вида (28).

2.2) Пусть $n_1=0$. Тогда $n_3\geq\aleph_0$, т. е. $G'\cong\Pi_{n_2}(4)\times\Pi_{n_3}(2)$, где $n_2\in N_0$. Если $n_2=0$, то KG имеет базис вида (27). Пусть $n_2\geq 1$. Из G' выделим прямой множитель $U\cong\Pi_{n_2}(4)\times\Pi_{\aleph_0}(2)$. Тогда, ввиду п. 2 теоремы 2.4 [2], $KU\cong K((4)\times\Pi_{\aleph_0}(2))$. Следовательно, $KG\cong K((4)\times\Pi_{n_3}(2))$, т. е. KG имеет базис вида (29).

Таким образом KG обладает базисом (27), (28) или (29), который назовем каноническим. Докажем, что KH имеет базис того же самого вида. Рассмотрим три подслучая.

I) Пусть KG имеет базис типа (27). Тогда $G'^2=1$ и, ввиду следствия 2, получится $|G'^2|=|G^2|$, т. е. базис G имеет вид (27). Из услови $|H^2|=|G^2|$ вытекает $H^2=1$, т. е. H имеет вид (27). Следовательно, $KG\cong KH$.

II) Пусть KG имеет базис G' вида (28). Тогда $|G'^2|\geq\aleph_0$ и, ввиду следствия 2, $|G'^2|=|G^2|$. Условие 3.2 теоремы дает $|H^2|=|G^2\geq\aleph_0$. Это означает, что канонический базис H' алгебры KH может иметь только вид (28), так как если H' имеет вид (27) или (29), то $|H'^2|<\aleph_0$, т. е. $|H^2|<\aleph_0$, что есть противоречие. Пусть $G'\cong P\times\Pi_{n_3}(2)$ и $H'\cong P'\times\Pi_{n_3'}(2)$, где P и P' — максимальные полные подгруппы, соответственно, G' и H'. Тогда $|P|=|G'^2|=|G^2|=|H_2|=|H'^2|=|P'|$. Если $n_1\geq\aleph_0$, то $P\cong P'$ и $KP\cong KP'$. Если $n_1<\aleph_0$, то последний изоморфизм имеет место ввиду п. 4 теоремы 2.4 [2]. Кроме того, $(G':G'^2)=(G:G^2)=(H:H^2)=(H':H'^2)$, где первое и третье равенство вытекают из следствия 2. Следовательно, $(G':G'^2)=(H':H'^2)$. Если $(G':G'^2)\geq\aleph_0$, то из (28) следует $n_3=(G':G'^2)=(H':H'^2)=n_3'$, а если $(G':G'^2)<\aleph_0$, то из (28) получится n_3

$=\log_2(G':G'^2)=\log_2(H':H'^2)=n_3'$. Следовательно, $K(\Pi_{n_3}(2))\cong K(\Pi_{n_3'}(2))$. Из этого изоморфизма и из $KP\cong KP'$ вытекает $KG\cong KH$.

III) Пусть KG имеет базис G' вида (29). Ввиду рассмотренных случаев I) и II), KH будет обладать каноническим базисом H' вида (29) с соответствующим кардинальным числом $n_3'\geq\aleph_0$. При этом, как в случае II, видно, что $n_3=(G':G'^2)=(H':H'^2)=n_3'$, т. е. $G'\cong H'$ и $KG'\cong KH'$. Следовательно, $KG\cong KH$ и случай a) закончен.

b) Пусть $G\neq A$. Предположим, что $KA\cong KB$. Ввиду леммы 1 [3], имеет место $A/G\cong B/H$. Из следствия из леммы 9 [5] получится $KB\cong KH$. Следовательно, $|G|=|H|$. Если $p=2$ и $K\neq K(\varepsilon_2)$, то из $KG\neq KH$, применяя теорему для доказанного случая a), получатся условия 3.1) и 3.2).

Наоборот, пусть выполнены условия 1), 2) и 3) теоремы. Ввиду предложения 19, алгебра KA обладает расщепляемым базисом $A'=tA'\times F'$, $tA'=G$, т. е. $KA=KA'$ и аналогично $KB=KB'$, где $B'=tB'\times U'$ и $tB'=H$. Из $KA=KA'$, ввиду леммы 1 [3], получится $A/G\cong A'/tA'\cong F'$ и аналогично $B/H\cong B'/tB'\cong U'$. Доказанный случай a) дает $KG\cong KH$, т. е. $K(tA')\cong K(tB')$. Так как $A/G\cong B/H$, то $F'\cong U'$ и $KF'\cong KU'$. Отсюда и из $K(tA')\cong K(tB')$ получится $KA'=K(tA'\times F')\cong K(tA')\otimes_K KF'\cong K(tB')\otimes_K KU'\cong K(tB'\times U')=KB'$, т. е. $KA'\cong KB'$. Следовательно, $KA\cong KB$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Д. Берман. Об изоморфизме центров групповых колец p-групп. *Доклады АН СССР*, **91**, 1953, 185—187.
2. С. Д. Берман. Групповые алгебры счетных абелевых p-групп. *Publ. Math.*, **14**, 1967, 365—405.
3. С. Д. Берман, В. Г. Богдан. Об изоморфизме вещественных групповых алгебр абелевых групп. *Мат. заметки*, **21**, 1977, №2, 229—238.
4. С. Д. Берман, Т. Ж. Моллов. О групповых кольцах абелевых p-групп любой мощности. *Мат. заметки*, **6**, 1969, 381—392.
5. С. Д. Берман, Т. Ж. Моллов. Расщепляемость базисов и изоморфизм групповых колец абелевых групп. *Плиска*, **2**, 1981, 6—22.
6. С. Д. Берман, Т. Ж. Моллов. Об изоморфизме полупростых групповых алгебр несчетных абелевых p-групп. *Доклады БАН*, **35**, 1982, 869—871.
7. С. Д. Берман, А. Р. Росса. О. групповых алгебр счетных периодических абелевых групп. *Доповiдi АН УРСР*, №5, серия А, 1971, 387—390.
8. W. May. Invariants for commutative group algebras. *Ill. J. Math.*, **15**, 1971, 525—531.
9. Т. Ж. Моллов. О мультипликативных группах полупростых групповых алгебр абелевых p-групп. *Доклады БАН*, **35**, 1982, 1619—1622.
10. Л. Фукс. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. Москва, 1974.

Харьковский институт радиоэлектроники, Харьков, СССР
Пловдивский университет, 4000 Пловдив, Болгария

Поступила 6. 9. 1983