PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

КОНЕЧНЫЕ НЕМИКЕЛЕВЫ ИНВЕРСНЫЕ ПЛОСКОСТИ

ЧАВДАР ЛОЗАНОВ, ГЕРГАНА ЕНЕВА

Рассматриваются конечные немикелевы инверсные плоскости $S(q)$ порядка q. Окружности в этих плоскостях представлены специальными овалами в аффинной плоскости $A(2, q)$ порядка q. Группа автоморфизмов $S(q)$ описана посредством специальных нелинейных преобразований в $A(2, q)$.

Инверсной плоскостью называется структура инцидентности $I=(\mathscr{P}, \mathscr{B}, \mathrm{Z})$, блоки которой названы окружностями и в которой выполняются следующие аксиомы:

1. Для трех различных точек O, R, Q выполнено $[O, R, Q]=1$.

2. Если O, $R \in \mathscr{P}$ и $c \in \mathscr{B}$, так что $O \mathrm{Z} c$, R неинцидентное c, то существует одна и только одна окружность $d \in \mathscr{B}$, так что $\{O\}=c \cap d$ и $O \mathrm{Z} d \mathrm{Z} R$.

3. Существуют неинцидентные точки и окружности, каждая окружность инцидентна с некоторой точкой и $|\mathscr{P}| \geqq 4$.

Система аксиом 1. — 3. эквивалентна следующему свойству:

4. Для каждой $P \in \mathscr{P}$ внутренняя структура I_P является аффинной плоскостью.

Если $I=(\mathscr{P}, \mathscr{B}, \mathrm{Z})$ — конечная структура инцидентности, порядок n аффинной плоскости I_p называется порядком конечной инверсной плоскости I [1, гл. 6]. Для конечных инверсных плоскостей есть и другие системы аксиом, использующие порядок плоскости [2].

Если O — овоид в трехмерном проективном пространстве P и назовем точками точки O, окружностями — плоскости, которые пересекают O, а инцидентность та же как в P, то полученная структура инцидентности является инверсной плоскостью I(O). Инверсные плоскости, изоморфные некоторой I(O), называются овоидальными.

В $P(3, q)$, если O — невырожденная квадрика индекса 1, соответствующая инверсная плоскость является микелевой — $M(q)$ [3], а если O — овоид типа $t(\psi)$ [4], соответствующая инверсная плоскость является немиклевой типа $S(q)$.

В плоскостях $M(q)$ выполняются теорема Микеля и теорема о связках, а в плоскостях $S(q)$ выполняется только теорема о связках [1, гл. 6],

Овоидальные плоскости обычно исследуют посредством соответствующего овоида в $P(3, q)$. Микелевы плоскости можно представить через элементы поля Галуа $GF(q^2)$ и группой подстановок в нем: $P\Gamma L_2(q^2)$ [5].

Цель настоящей работы являются представление окружностей плоскости $S(q)$ специальными овалами в аффинной плоскости $A(2, q)$ и описание группы автоморфизмов $S(q)$ специальными нелинейными преобразованиями в $A(2, q)$. Таким образом можно изучать непосредственно геометрические свойства плоскостей $S(q)$, не используя овоидов в $P(3, q)$ и соответствующих аффинных плоскостей I_P.

Пусть $GF(q)$ — поле Галуа, где $q=2^e$, $e>1$, e — нечетное. Обозначим $\psi(x, y) = x^{\sigma+2}+y^{\sigma}+xy$, где x, $y \in GF(q)$, а σ — автоморфизм $GF(q)$, для которого $x^{\sigma^2}=x^2$ для каждого $x \in GF(q)$. Отметим, что $\psi(x, y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$ и $y=0$.

Рассмотрим конечную структуру инцидентности $S=(\mathscr{P}, \mathscr{B}, Z)$. Множество точек $\mathscr{P}$ состоит из упорядоченных пар (x, y), $x, y \in GF(q)$, и символ (∞). Множество окружностей $\mathscr{B}$ состоит из подмножеств $\mathscr{P}$, удовлетворяющих уравнению вида

$$(1) \qquad \Omega(x, y)=D\psi(x, y)+Ax+By+C=0,$$

где $D, A, B, C \in GF(q)$ и $\psi(B, AD^\sigma)\neq CD^{\sigma+1}$, если $D\neq 0$ и $\psi(B, A)\neq 0$, если $D=0$.

Если $D^*=\lambda D^*$, $A^*=\lambda A$, $B^*=\lambda B$, $C^*=\lambda C$, где $\lambda\neq 0$, $\lambda \in GF(q)$, то уравнение

$$D^*\psi(x, y)+A^*x+B^*y+C^*=0$$

определяет ту же самую окружность (1).

Точка (∞) инцидентна с окружностями, для которых $D=0$, и только с ними.

Теорема 1. *Структура инцидентности* $S=(\mathscr{P}, \mathscr{B}, Z)$ *является инверсной плоскостью* $I(q)$.

Покажем, что S удовлетворяет аксиомам [2]

(i) $|\mathscr{P}|=n^2+1$;

(ii) $|\mathscr{B}|=n(n^2+1)$;

(iii) $|Z|=n(n+1)(n^2+1)$;

(iiii) $[O, P, Q]\leq 1$ для $O\neq P\neq Q\neq 0$; $O, P, Q \in \mathscr{P}$,

которые определяют конечную инверсную плоскость. Действительно:

а) так как в $GF(q)$ есть q^2 упорядоченных пар, а $(\infty)\in\mathscr{P}$, то $|\mathscr{P}|=q^2+1$,

б) имея в виду, что в $GF(q)$ — q^4 упорядоченных четверок (D, A, B, C), и условия для коэффициентов окружности, получаем, что $|\mathscr{B}|=\{q^4-[q^2(q-1)+q]\}/(q-1)$ $=q(q^2+1)$;

в) по определению, (∞) инцидентна с $(q^3-q)/(q-1)=q(q+1)$ окружностями (для которых $D=0$). С каждой точкой (x_0, y_0) инцидентны окружности, для которых

$$D\psi(x_0, y_0)+Ax_0+By_0+C=0.$$

Если $A=Dy_0$ и $B=Dx_0$, это не является уравнением окружности, так $\psi(Dx_0, Dy_0D^\sigma)$ $=D^{\sigma+2}\psi(x_0, y_0)=D^{\sigma+1}C$, когда $D\neq 0$ и $\psi(Dy_0, Dx_0)=0$, когда $D=0$. Следовательно, (x_0, y_0) тоже инцидентна с $(q^3-q)/(q-1)=q(q+1)$ окружностями. Имея в виду а), получаем

$$|Z|=(q^2+1)\ (q+1)q.$$

г) пусть (x_i, y_i), $i=1, 2, 3$, — три различные точки. Окружность $D\psi(x, y)+Ax$ $+By+C=0$, где D, A, B, C — решение системы

$$D\psi(x_i, y_i)+Ax_i+By_i+C=0, \quad i=1, 2, 3,$$

инцидентна с точками (x_i, y_i). Так как

$$\operatorname{rank}\|\ \psi(x_i, y_i)\quad x_i\quad y_i\quad 1\ \|=3,$$

эта система имеет единственное с точностью до множителя решение.

Точки (∞) и (x_i, y_i), $i=1, 2$, инцидентны с окружностью $Ax+By+C=0$, где A, B, C — решение системы

$$Ax_i+By_i+C=0, \quad i=1, 2.$$

Так как $\operatorname{rank}\|\ x_i\quad y_i\quad 1\ \|=2$, это решение единственно с точностью до множителя. Следовательно, каждые три точки инцидентны с одной и только одной окружностью.

Так, получаем, что структура инцидентности S является инверсной плоскостью $I(q)$.

Обозначим

$$h(p,\ x)=p+x,\ g(p,\ s,\ x,\ y)=p^\sigma h(p,\ x)+h(s,\ y),$$

$$f(p,\ s,\ x,\ y)=h^{\sigma+2}(p,\ x)+g^\sigma(p,\ s,\ x,\ y)+h(p,\ x)g(p,\ s,\ x,\ y)$$
$$=\psi(x,\ y)+sx+py+\psi(p,\ s).$$

Отметим, что $f(p,\ s,\ x,\ y)=0$ только тогда, когда $x=p,\ y=s$.

Пусть ψ^α_{abpsr} и τ^β_{klm} — отображения в $I(q)$, сопоставляющие каждой точке (x, y) точку $(x',\ y')$, определенную следующим образом:

(2)
$$\varphi^\alpha_{abpsr}\begin{cases} x'=[a+rg(p,\ s,\ x,\ y)/f(p,\ s,\ x,\ y)]^\alpha, \\ y'=\{b+r[r^\sigma h(p,\ x)+a^\sigma g(p,\ s,\ x,\ y)]/f(p,\ s,\ x,\ y)\}^\alpha \end{cases}$$

для $(x,\ y)\neq(p,\ s)$ и

$$(p,\ s)\varphi^\alpha_{abpsr}=(\infty),$$

$$(\infty)\,\varphi^\alpha_{abpsr}=(a^\alpha,\ b^\alpha),$$

(3)
$$\tau^\beta_{klm}\begin{cases} x'=[kh(l,\ x)]^\beta, \\ y'=[k^{\sigma+1}\,g(l,\ m,\ x,\ y)]^\beta \end{cases}$$

и $(\infty)\ \tau^\beta_{klm}=(\infty)$. Коэффициенты $a,\ b,\ p,\ s,\ r\neq 0,\ k\neq 0, l,\ m$ — элементы $GF(q)$, а α и β — внутренние автоморфизмы $GF(q)$.

Так как (2) и (3) можно решить относительно x и y:

(2′)
$$(\varphi^\alpha_{abpsr})^{-1}\begin{cases} x=[p^\alpha+r^\alpha g(a^\alpha,\ b^\alpha,\ x',\ y')/f(a^\alpha,\ b^\alpha,\ x',\ y')]^{q/\alpha}, \\ y=\{s^\alpha+r^\alpha[r^{\sigma\alpha}h(a^\alpha,\ x')+p^{\sigma\alpha}g(a^\alpha,\ b^\alpha, x',\ y')]/f(a^\alpha,\ b^\alpha, x',\ y')\}^{q/\alpha}, \end{cases}$$

$$(a^\alpha,\ b^\alpha)\,(\varphi^\alpha_{abpsr})^{-1}=(\infty),\ (\infty)\ (\varphi^\alpha_{abpsr})=(p,\ s);$$

(3′)
$$(\tau^\beta_{klm})^{-1}\begin{cases} x=[k^{-\beta}h(l^\beta k^\beta,\ x')]^{q/\beta}, \\ y=[k^{-(\sigma+1)\beta}g(l^\beta k_1^\beta)(l^{\sigma+1}+m)^\beta k^{(\sigma+1)\beta},\ x',\ y')]^{q/\beta}, \end{cases}$$

и $(\infty)\ (\tau^\beta_{klm})^{-1}=(\infty)$, то φ^α_{abpsr} и τ^β_{klm} являются взаимно однозначными отображениями в $I(q)$.

Теорема 2. *Отображения* (2) *и* (3) *являются автоморфизмами* $I(q)$.

Пусть c — окружность с уравнением (1). Тогда φ^α_{abpsr} отображает точки c в точки, которые удовлетворяют уравнению

(4)
$$\Omega'(x',\ y')=D'\psi(x',\ y')+A'x'+B'y'+C'=0,$$

где:

$$D'=r^{-(\sigma+2)\alpha}\Omega^\alpha(p,\ s),$$
$$A'=r^{-(\sigma+2)\alpha}\{\Omega(p,\ s)b+r^{\sigma+1}(Dp+B)+a^\sigma r[p^\sigma(Dp+B)+(Ds+A)]\}^\alpha,$$
$$B'=r^{-(\sigma+2)\alpha}\{\Omega(p,\ s)a+r[p^\sigma(Dp+B)+(Ds+A)]\}^\alpha,$$
$$C'=r^{-(\sigma+2)\alpha}\{\Omega(p,\ s)\psi(a,\ b)+ar^{\sigma+1}(Dp+B)+r[p^\sigma(Dp+B)+(Ds+A)]\,(a^{\sigma+1}+b)$$
$$+Dr^{\alpha+2}\}^\alpha.$$

В действительности, если $\Omega(x_0,\ y_0)=0$, имея в виду, что

$$x_0'=[a+rg(p,\ s,\ x_0,\ y_0)/f(p,\ s,\ x_0,\ y_0)]^\alpha,$$

$$y_0'=\{b+r[r^\sigma h(p,\ x_0)+a^\sigma g(p,\ s,\ x_0,\ y_0)]/(f(p,\ s,\ x_0,\ y_0)\}^\alpha,$$

получаем

$$\Omega^1(x_0', y_0') = \{[\Omega(p, s) + (Dp+B)(y_0+s) + Df(p, s, x_0, y_0)$$
$$+ (Ds+A)(x_0+p)]/f(p, s, x_0, y_0)\}^{\alpha} = [\Omega(x_0, y_0)/f(p, s, x_0, y_0)]^{\alpha} = 0.$$

Покажем, что (4) — уравнение окружности. Действительно:

1. Пусть $D \neq 0$.

а) $\Omega(p, s) \neq 0$, т. е. $D' \neq 0$ и

$$\psi(B', A', D'^{\sigma}) + D'^{\sigma+1}C' = r^{-(3\sigma+4)\alpha}\{\psi[p^{\sigma}(Dp+B)$$
$$+(Ds+A), (Dp+B)\Omega^{\alpha}(p, s)] + \Omega^{\sigma+1}(p, s)D\}^{\alpha},$$

но $\psi[p^{\sigma}(Dp+B)+(Ds+A), (Dp+B)\Omega^{\sigma}(p, s)] + \Omega^{\sigma+1}(p, s)D = 0$

тогда и только тогда, когда

$$\psi\{(Dp+B), [p^{\sigma}(Dp+B)+(Ds+A)]D^{\sigma}\} + \Omega(p, s)D^{\sigma+1} = 0,$$

а, с другой стороны,

$$\psi\{(Dp+B), [p^{\sigma}(Dp+B)+(Ds+A)]D^{\sigma}\} + \Omega(p, s)D^{\sigma+1} = \psi(B, AD^{\sigma}) + D^{\sigma+1}C;$$

б) $\Omega(p, s) = 0$, т. е. $D' = 0$.

Здесь $\psi(B', A') = 0$ тогда и только тогда, когда $A = Ds$, $B = Dp$, что вместе с $\Omega(p, s) = 0$ приводит к уравнению

$$\psi(B, BD^{\sigma}) + D^{\sigma+1}C = 0.$$

2. Пусть $D = 0$.

а) $\Omega(p, s) \neq 0$, т. е. $D' \neq 0$. Тогда

$$\psi(B', A'D'^{\sigma}) + D'^{\sigma+1}C' = r^{-(3\sigma+4)\alpha}\{\psi[p^{\sigma}B+A, B\Omega^{\sigma}(p, s)]\}^{\alpha}.$$

Но $\psi[p^{\sigma}B+A, B\Omega^{\sigma}(p, s)] = 0$ только если $\psi(B, A) = 0$.

б) $\Omega(p, s) = 0$, т. е. $D' = 0$. Здесь $\psi(B', A') = 0$ только тогда, когда $\psi(B, A) = 0$.

Таким образом мы показали, что, если (1) — уравнение окружности, то и (4) является уравнением окружности.

Отображения τ_{klm}^{β} отображают точки окружности c с уравнением (1) в точки, которые удовлетворяют следующему уравнению:

$$\Omega_1(x', y') = D_1\psi(x', y') + A_1x' + B_1y' + C_1 = 0, \tag{5}$$

где

$$D_1 = k^{-\beta(\sigma+2)}D^{\beta},$$
$$A_1 = k^{-\beta}(A + Bl^{\sigma} + Dl^{\sigma+1} + Dm)^{\beta},$$
$$B_1 = k^{-\beta(\sigma+1)}(B + Dl)^{\beta},$$
$$C_1 = \Omega^{\beta}(l, m).$$

В действительности, если $\Omega(x_0, y_0) = 0$, имея в виду, что

$$x_0' = [kh(l, x_0)]^{\beta},$$
$$y_0' = [k^{\sigma+1}g(l, m, x_0, y_0)]^{\beta},$$

получаем: $\Omega_1(x_0', y_0') = \Omega^{\beta}(x_0, y_0) = 0$.

Притом, если $D \neq 0$, то $D_1 \neq 0$ и $\psi(B_1, A_1 D_1^\sigma)+D_1^{\sigma+1} C_1 = k^{-\beta(3\sigma+4)}[\psi(B, AD^\sigma)+D^{\sigma+1}C]^\beta$, а если $D=0$, то $D_1=0$ и $\psi(B_1, A_1)=0$ тогда и только тогда, когда $\psi(B, A)=0$. Следовательно, если (1) — уравнение окружности, то и (5) является уравнением окружности.

Таким образом мы показали, что отображения (2) и (3) сохраняют инцидентность точек и окружностей и отображают окружность в окружность, т. е. ψ^α_{abpsr} и τ^β_{klm} — автоморфизмы плоскости $I(q)$.

Теорема 3. *Множество Φ отображений φ^α_{abpsr} и τ^β_{klm} — группа.*

Имея в виду, что (2′) и (3′), обратные к (2) и (3), отображения того же самого вида, остается доказать, что их произведения — отображения вида (2) и (3):

1) $\tau^{\beta_1}_{k_1 l_1 m_1} \circ \tau^{\beta_2}_{k_2 l_2 m_2} = \tau^{\beta_1\beta_2}_{k' l' m'}$, где $k' = k_1 k_2^{q/\beta_2}$, $l' = k_1^{-1} h(l_2^{q/\beta_1}, k_1 l_1)$, $m' = k_1^{-(\sigma+1)} g/l_2^{q/\beta_1}, l_1^{\sigma+1}, k_1 l_1, m_1 + m_2^{q/\beta_1})$, и $k' \neq 0$, а $\beta_1\beta_2 = \beta$ — внутренний автоморфизм $GF(q)$, то $\tau^{\beta_1\beta_2}_{k' l' m'}$ — автоморфизм вида (3);

2) $\varphi^\alpha_{abpsr} \circ \tau^\beta_{klm} = \varphi^{\alpha\beta}_{cdpsr'}$, где $r' = rk^{q/\alpha}$, $c = [kh(l, a^\alpha)]^{q/\alpha}$, $d = [k^{\sigma+1} g(l, m, a^\alpha, b^\alpha)]^{q/\alpha}$, а $\tau^\beta_{klm} \circ \varphi^\alpha_{abpsr} = \varphi^{\beta\alpha}_{uvp's'r^*}$, где

$$r^* = k^{-(\sigma+2)} r^{q/\beta},\ u = a^{q/\beta},\ v = b^{q/\beta},\ p' = k^{-1}[h(l^\beta k^\beta, p)]^{q/\beta},$$
$$s' = k^{-(\sigma+1)}[g(l^\beta k^\beta, m^\beta k^\beta, p, s)]^{q/\beta},$$

и так как $r' \neq 0$, $r^* \neq 0$ и $\alpha\beta = \gamma$ — внутренний автоморфизм поля $GF(q)$, то $\varphi^{\alpha\beta}_{cdpsr'}$ и $\varphi^{\beta\alpha}_{uvp's'r^*}$ — автоморфизмы вида (2).

Имея в виду 1) и 2) и что каждый автоморфизм φ^α_{abpsr}, можно представить как произведение:

$$\varphi^\alpha_{abpsr} = \tau^1_{1ps}\, \varphi^1_{0000r} \circ \tau^1_{1ab_1}\, \tau^\alpha_{100},$$

где $b_1 = a^{\sigma+1} + b$, то произведение $\varphi^{\alpha_1}_{a_1 b_1 r_1 s\, r_1} \varphi^{\alpha_2}_{a_2 b_2 p_2 s_2 r_2}$ — автоморфизм вида (2) или (3).

Теорема 4. *Группа Φ автоморфизмов $I(q)$ транзитивна на множестве окружностей и дважды транзитивна на множестве точек $I(q)$.*

Достаточно показать, что:

1. Для каждой окружности c существует автоморфизм $\psi \in \Phi$ такой, что $(c)\psi = c'$, где $c' : x = 0$;

2. Для каждой пары точек M, N существует автоморфизм $\chi \in \Phi$, такой что $(M)\chi = (\infty)$ и $(N)\chi = (0, 0)$.

Доказательство 1.

а) пусть $D \neq 0$. Имея в виду, что (1) посредством φ^α_{abpsr} преобразуется в (4) и что система

$$\Omega(p, s) = 0,$$
$$p^\sigma h(Dp, B) + h(Ds, A) = 0,$$
$$ah(Dp, B) + Dr = 0,$$

имеет решение

$$p_0 = D^{-1}\{(\psi(B, AD^\sigma) + CD^{\sigma+1}]^{(2-\sigma)/2} + B\},$$
$$s_0 = D^{-1}[p^\sigma(B + Dp) + A],\ a_0 = rD[\psi(B, AD^\sigma) + CD^{\sigma+1}]^{(\sigma-2)/2},$$

для которого $D'=B'=C'=0$, а $A'=\{[\psi(B, AD^{\sigma})+CD^{\sigma+1}]^{(2-\sigma)/2}(Dr^{-1})\}^{\alpha}$, то $(c)\psi^{\alpha}_{a_0b_0p_0s_0r}=c'$, ($b$, r, d — произвольные), где $c':x'=0$,

б) пусть $D=0$, но $B\neq 0$. В этом случае $(c)\varphi^{\alpha}_{0bp_1s_1r}=c'$, $s_1=A^{(\sigma+2)/2}B^{-(\sigma+2)/2}+CB^{-1}$ $p_1=A^{\sigma/2}B^{-\sigma/2}$, где b, r, α — произвольные, а $c':Brx'=0$, т. е. $c':x'=0$.

в) пусть $D=0$, $B=0$. Здесь $A\neq 0$, $(c)\tau^{\beta}_{kl_0m}=c'$, где k, m и β произвольные $l_0=k^{-1}(CA^{-1})^{q/\beta}$, $c':A(k'x')^{\beta}=0$, т. е. $c':x'=0$.

Следовательно, группа Φ транзитивна на множестве окружностей.

Доказательство 2.

а) Пусть $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)\in\mathscr{P}$. Тогда

$$(M)\varphi^{\alpha}_{a_0b_0p_0s_0r}=(\infty),\quad (N)\varphi^{\alpha}_{a_0b_0p_0s_0r}=(0,\ 0),$$

где

$$a_0=rg(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2)/f(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2),$$

$$b_0=r[r^{\sigma}h(x_1,\ x_2)+a^{\sigma}g(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2)]/f(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2),$$

$p_0=x_1$, $s_0=y_1$, r и α произвольные.

б) Пусть $M=(\infty)$, $N(x_0, y_0)\in\mathscr{P}$. Тогда

$$(M)\,\tau^{\beta}_{b_0x_0y_0}=M,\quad (N)\,\tau^{\beta}_{kx_0y_0}=(0,\ 0),$$

где k и β произвольные.

Следовательно, группа Φ дважды транзитивна на множестве точек.

Теорема 5. *Плоскость $I(q)$ является плоскостью типа $S(q)$.*

Из теорем 2, 3 и 4 следует, что рассматриваемая инверсная плоскость $I(q)$ обладает группой автоморфизмов, транзитивна на множестве окружностей. Из этого, согласно [6], следует, что $I(q)$ является микелевой плоскостью $M(q)$ или немикелевой плоскостью $S(q)$.

Рассмотрим 4-цепь окружностей (c_i) где $c_i\cap c_{i+1}=\{A_i,\ B_i\}$, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$, где

$$c_1:x=0,\ c_2:y=0,$$

$$c_3:(a+1)\psi(x,\ y)+(a^{\sigma+2}+a)y+a^{\sigma+2}+1=0,$$

$$c_4:\psi(x,\ y)+(a^{\sigma+1}+1)x+a^{\sigma+1}=0,$$

$$A_1(\infty),\ A_2(0,\ 1),\ A_3(a+1,\ a),\ A_4(1,\ 0),$$

$$B_1(0,\ 0),\ B_2(0,\ [a^{\sigma+1}+a(a+1)^{\sigma-1}]^{\sigma+1}),$$

$$B_3(1,\ 1),\ B_4(a^{\sigma+1}\psi^{1-\sigma}(a+1,\ a^{\sigma}),\ 0),$$

$$a\in GF(q),\ a\neq 0,\ 1.$$

Здесь точки A_i инцидентны с окружностью $c:x+y+1=0$, а для точек B_i не существует такая окружность, так как точки B_1, B_2, B_4 инцидентны с окружностью

$$c^*:\psi(a+1,a^{\sigma})\,(a+1)\psi(x,\ y)+a^{2\sigma+3}(a+1)x+a(a^{\sigma+1}+1)\psi(a+1,\ a^{\sigma})y=0,$$

а точка $B_3(1,\ 1)$ не инцидентна с c^*, так как

$$\psi\,(a+1,\ \ a^{\sigma})\ (a+1)\,\psi\,(1,\ 1)\ +\ a^{2\sigma+3}\,(a+1)\ +\ a\,(a^{\sigma+1}\ +\ 1)\,\psi\,(a\ +\ 1,\ \ a^{\sigma})\ =\ 1\ +\ a^{\sigma+1}\neq 0.$$

Следовательно, для 4-цепи (c_i) не выполняется теорема Микеля.

Таким образом мы показали, что плоскость $I(q)$ является немикелевой конечной инверсной плокостью типа $S(q)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Dembowski. Finite Geometries. Berlin, Heidelberg, New York, 1968.
2. P. Biscarini. Sets of axioms for finite inversive plane. *Atti Ist. veneto sci lett. ed arti mat. e natur*, 132, 1973/1974, 231—237.
3. B. van der Waerden, J. Schmidt. Eine Axiomatik der Kreise-geometrie und der Laguerre-Geometrie. *Math. Ann.*, **110**, 1935, 753—776.
4. J. Tits. Ovoides et groupes de Suzuki. *Arch. Math.*, **13**, 1960, 187—198.
5. W. Benz. Über Möbiusebenen. *Ein Bericht Jahr. Deutsche Math. Ver.*, **63**, 1960, 1—27.
6. H. Lüneburg. On Möbius-Planes of even order. *Math. Z.*, **92**, 1966, 187—193.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 8. II. 1983