PLISKA
STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

ОБ ОДНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ КРИВЫХ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ОБОБЩЕННОМ БИАКСИАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ДИМИТЪР Г. МЕКЕРОВ, РУМЯНА Т. КОЖУХАРОВА

В четырехмерном проективном пространстве группа коллинеаций, сохраняющих прямую и скрещенную с ней плоскостью, определяет одно обобщенное биаксиальное пространство. В этом пространстве множество кривых распадаются на 6 непересекающихся классов. Каждый из этих классов определен аналитически и интерпретирован геометрически. Классификация несет инвариантный характер относительно произвольного элемента фундаментальной группы пространства, относительно произвольного нормирования точки, описывающей кривую, и относительно произвольной замены параметра кривых.

Пространство Клейна с фундаментальным пространством — n-мерное проективное пространство P_n, и с фундаментальной группой, состоящей из коллинеаций в P_n, сохраняющих p-плоскость j и q-плоскость k без общих точек, причем $p+q=n-1$, называется обобщенным биаксиальным пространством $\mathrm{P}_n^{p,q}$. Теории кривых в трехмерном биаксиальном пространстве $P_3^{1,1}$ посвящены ряд работ, например [1—4]. Некоторые вопросы, связанные с дифференциальной геометрией кривых в $\mathrm{P}_3^{1,1}$, рассмотрены и в [5—7].

Объектом настоящего исследования являются кривые в четырехмерном обобщенном биаксиальном пространстве $\mathrm{P}_4^{1,2}$. В этом пространстве изучены однопараметрические и двупараметрические системы прямых [8—10] и поверхностей [11]. В связи с этими исследованиями получены и некоторые частичные результаты для кривых в $\mathrm{P}_4^{1,2}$, но полное исследование дифференциальной геометрии кривых в этом пространстве до сих пор не сделано. В этой работе дается одна классификация кривых в $\mathrm{P}_4^{1,2}$, причем каждый из указанных шесть классов определен аналитически и интерпретиран геометрически.

1. Пусть P_4 — вещественное четырехмерное проективное пространство. В P_4 будем рассматривать только вещественные точки, прямые, вообще линейные подпространства, вещественные проективные координатные системы, вещественные коллинеации и т. д.

Фундаментальная группа $G_4^{1,4}$ обобщенного биаксиального пространства $\mathrm{P}_4^{1,2}$, сохраняющая одну прямую $j\subset\mathrm{P}_4$ и скрещенную с ней плоскость $k\subset\mathrm{P}_4$, является 12-параметрической. Обозначаем через $(x^1, x^2; y^1, y^2, y^3)\equiv(x; y)$ координаты произвольной точки относительно проективного репера $(A; B)$ в P_4 с вершинами $A_l\in j$ и $B_\lambda\in k$. Везде в описаниях для индексов l, m и λ, μ предполагаем, что $l, m\in\{1; 2\}$ и $\lambda, \mu\in\{1; 2; 3\}$. Произвольный элемент группы $G_4^{1,2}$ относительно $(A; B)$ имеет представление

$$\rho\overline{x}^l = a_m^l x^m,\ \rho\overline{y}^\lambda = b_\mu^\lambda y^\mu, \tag{1}$$

где $\rho\neq0$, $\det(a_m^l)\neq0$, $\det(b_\mu^\lambda)\neq0$. Разумеется, (1) являются и формулами замены координатного репера $(A; B)$ новым координатным репером $(A; B)$. Вообще, будем говорить, что формулами (1) определяется B-замена в $\mathrm{P}_4^{1,2}$. Далее, если $x=(x_l^1,\ x_l^2)$ и $y_\lambda=(y_\lambda^1,\ y_\lambda^2,\ y_\lambda^3)$ — соответственно две упорядоченные пары и три упорядоченые тройки, будем использовать обозначения

(2)
$$x_1x_2:=\begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^1 & x_2^2 \end{vmatrix},\quad y_1y_2y_3:=\begin{vmatrix} y_1^1 & y_1^2 & y_1^3 \\ y_2^1 & y_2^2 & y_2^3 \\ y_3^1 & y_3^2 & y_3^3 \end{vmatrix}.$$

Каждую точку из j или k будем называть бесконечной точкой соответственно первой или второй системы, а каждую гиперплоскость, содержащую j или k — бесконечной гиперплоскостью первой или второй системы. Остальные точки и гиперплоскости будем называть конечными. Через каждую конечную точку проходит одна и только одна трансверсальная прямая j или k. Общие точки этой прямой с j или k будем называть соответственно первой и второй проекцией конечной точки.

Каждая прямая (соотв. плоскость), отличная от j (соотв. k), является прямой (плоскостью) одного и только одного из следующих типов прямых (плоскостей): а) первый тип — прямые (плоскости), неинцидентные с бесконечными точками (гиперплоскостями); б) второй тип — прямые (плоскости), инцидентные с по одной бесконечной точкой (гиперплоскостью) из каждой системы; в) третий тип — прямые (плоскости), инцидентные с одной и только одной бесконечной точкой (гиперплоскостью), и она из первой (второй) системы; г) четвертый тип — прямые (плоскости), инцидентные с одной и только с одной бесконечной точкой (гиперплоскостью), и она из второй (первой) системы; д) пятый тип — прямые (плоскости), инцидентные только с бесконечными точками (гиперплоскостями), и они из второй (первой) системы.

2. Пусть дана конечная точка в $\mathrm{P}_4^{1,2}$, координаты которой относительно фиксированного репера $(A\,;\,B)$ являются

(3)
$$(x\,;\,y)\equiv(x^1,\ x^2\,;\ y^1,\ y^2,\ y^3).$$

Предположим, что x^l и y^λ — вещественнозначные функции вещественного переменного t, определенные на интервале T, и гладкие до третьего порядка на нем. Очевидно, когда t меняется в T, точка (3) постоянна тогда и только тогда, когда ранг матрицы

(4)
$$\left\|\begin{matrix} x & y \\ \dot x & \dot y \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} x^1 & x^2 & y^1 & y^2 & y^3 \\ \dot x^1 & \dot x^2 & \dot y^1 & \dot y^2 & \dot y^3 \end{matrix}\right\|$$

равен 1 (через $\cdot=d/dt$ обозначаем дифференцирование по t).

Будем предполагать, что ранг матрицы (4) равняется 2. Тогда, когда t меняется в T, точка (3) описывает кривую c.

В дифференциальной геометрии кривой в $\mathrm{P}_4^{1,2}$ должны быть учтены следующие инвариантности: а) B-инвариантность относительно произвольной B-замены (1); б) D-инвариантность относительно произвольной замены координат (3) новыми $(\bar x\,;\,\bar y)$:

(5)
$$x=\xi\bar x,\quad y=\xi\bar y,\ \text{где}\ \xi=\xi(t)\ \text{за}\ t\in T;$$

в) P-инвариантность относительно произвольной замены параметра t новым параметром $\bar t$ посредством уравнения вида

$$(6) \qquad t = t(\bar{t}),$$

где $t(\bar{t})$ — функция $\bar{t}$, определенная на некотором интервале $\bar{T}$ при естественных предположениях, специально $dt/d\bar{t} \neq 0$ для $\bar{t} \in \bar{T}$.

Определяем величины I_λ следующим образом:

$$(7) \qquad I_1 := x\dot{x}, \quad I_2 := y\dot{y}\ddot{y}, \quad I_3 := y\dot{y}\overset{*}{y},$$

где использовали обозначения (2), а $\overset{*}{y}$ — упорядоченная тройка $(\overset{*}{y}{}^1, \overset{*}{y}{}^2, \overset{*}{y}{}^3)$, определенная однозначно требованием, чтобы ее элемент $\overset{*}{y}{}^\lambda$ равнялся своему алгебраическому дополнению в определителе I_3.

Теорема 1. *Равенства $I_\lambda = 0$ являются B-, D-* и *P-инвариантными.*

Доказательство. а) B-инвариантность. Пусть относительно одного репера $(A; B)$ — точка, описывающая кривую c, имеет координаты (3), а относительно другого репера $(\bar{A}; \bar{B})$ — координаты $(\bar{x}; \bar{y})$. С помощью формул (1) получаем

$$\rho^2 . \bar{I}_1 = \rho^2 . \bar{x}\dot{\bar{x}} = \det(a^l_m) . x\dot{x} = \det(a^l_m) . I_1,$$

$$\rho^3 . \bar{I}_2 = \rho^3 . \bar{y}\dot{\bar{y}}\ddot{\bar{y}} = \det(b^\lambda_\mu) . y\dot{y}\ddot{y} = \det(b^\lambda_\mu) . I_2.$$

Равенства $p^2 . \bar{I}_1 = \det(a^l_m) . I_1$ и $\rho^3 . \bar{I}_2 = \det(b^\lambda_\mu) . I_2$ показывают B-инвариантность равенств $I_1 = 0$ и $I_2 = 0$, поскольку $\rho \neq 0$, $\det(a^l_m) \neq 0$ и $\det(b^\lambda_m) \neq 0$.

Теперь покажем и B-инвариантность равенства $I_3 = 0$. Пусть при B-замене (1) тройка $\overset{*}{y} = (\overset{*}{y}{}^1, \overset{*}{y}{}^2, \overset{*}{y}{}^3)$ преобразуется в тройку $\overline{\overset{*}{y}} = (\overline{\overset{*}{y}}{}^1, \overline{\overset{*}{y}}{}^2, \overline{\overset{*}{y}}{}^3)$. Но

$$\overline{\overset{*}{y}}{}^1 = \begin{vmatrix} \bar{y}^2 & \bar{y}^3 \\ \dot{\bar{y}}^2 & \dot{\bar{y}}^3 \end{vmatrix}, \quad \overline{\overset{*}{y}}{}^2 = \begin{vmatrix} \bar{y}^3 & \bar{y}^1 \\ \dot{\bar{y}}^3 & \dot{\bar{y}}^1 \end{vmatrix}, \quad \overline{\overset{*}{y}}{}^3 = \begin{vmatrix} \bar{y}^1 & \bar{y}^2 \\ \dot{\bar{y}}^1 & \dot{\bar{y}}^2 \end{vmatrix}.$$

Учитывая в этих равенствах формулы (1), получаем

$$\rho^2 \overline{\overset{*}{y}}{}^1 = B^1_3 \overset{*}{y}{}^1 + B^1_2 \overset{*}{y}{}^2 + B^1_1 \overset{*}{y}{}^3,$$

$$(8) \qquad \rho^2 \overline{\overset{*}{y}}{}^2 = B^2_3 \overset{*}{y}{}^1 + B^2_2 \overset{*}{y}{}^2 + B^2_1 \overset{*}{y}{}^3,$$

$$\rho^2 \overline{\overset{*}{y}}{}^3 = B^3_3 \overset{*}{y}{}^1 + B^3_2 \overset{*}{y}{}^2 + B^3_1 \overset{*}{y},$$

где B^λ_μ — алгебраическое дополнение элемента b^λ_μ в $\det(b^\lambda_\mu)$. Согласно определения I_3 (соотв. $\bar{I}_3$), имеем

$$I_3 = (\overset{*}{y}{}^1)^2 + (\overset{*}{y}{}^2)^2 + (\overset{*}{y}{}^3)^2 \ (\text{соотв. } \bar{I}_3 = (\overline{\overset{*}{y}}{}^1)^2 + (\overline{\overset{*}{y}}{}^2)^2 + (\overline{\overset{*}{v}}{}^3)^2).$$

Тогда, если $I_3 = 0$, то $\overset{*}{y}{}^1 = \overset{*}{y}{}^2 = \overset{*}{y}{}^3 = 0$ и, согласно (8), имеем $\overline{\overset{*}{y}}{}^1 = \overline{\overset{*}{y}}{}^2 = \overline{\overset{*}{y}}{}^3 = 0$. Следовательно $\bar{I}_3 = 0$, а это означает, что равенство $I_3 = 0$ — B-инвариантно.

б) D-инвариантность. Из (5) имеем

(9) $$\dot{x}=\dot{\xi}\bar{x}+\xi\dot{\bar{x}},$$

(10) $$\dot{y}=\dot{\xi}\bar{y}+\xi\dot{\bar{y}},$$

(11) $$\ddot{y}=\ddot{\xi}\bar{y}+2\dot{\xi}\dot{\bar{y}}+\xi\ddot{\bar{y}}.$$

С помощью (5) и (10) находим $\overset{*}{y}{}^{\lambda}$. Так, для $\overset{*}{y}{}^{1}$ имеем

$$\overset{*}{y}{}^{1}=\begin{vmatrix} y^2 & y^3 \\ \dot{y}^2 & \dot{y}^3 \end{vmatrix}=y^2\dot{y}^3-\dot{y}^2y^3=\xi\bar{y}^2.(\dot{\xi}\bar{y}^3+\xi\dot{\bar{y}}{}^3)-(\dot{\xi}\bar{y}^2+\xi\dot{\bar{y}}{}^2).\xi\bar{y}^3$$

$$=\xi^2.(\bar{y}^2\dot{\bar{y}}{}^3-\dot{\bar{y}}{}^2\bar{y}^3)=\xi^2.\begin{vmatrix} \bar{y}^2 & \bar{y}^3 \\ \dot{\bar{y}}{}^2 & \dot{\bar{y}}{}^3 \end{vmatrix}=\xi^2.\overset{*}{\bar{y}}{}^3.$$

Аналогично находим, что $\overset{*}{y}{}^2=\xi^2\overset{*}{\bar{y}}{}^2$ и $\overset{*}{\bar{y}}{}^3=\xi^2\overset{*}{\bar{y}}{}^3$, т. е. имеем

(12) $$\overset{*}{y}=\xi^2.\overset{*}{\bar{y}}.$$

Используя равенства (5), (9)—(12), получаем

$$I_1=x\dot{x}=\xi^2.\bar{x}\dot{\bar{x}}=\xi^2.\bar{I}_1,$$

$$I_2=y\dot{y}\ddot{y}=\xi^3.\bar{y}\dot{\bar{y}}\ddot{\bar{y}}=\xi^3.\bar{I}_2,$$

$$I_3=y\dot{y}\overset{*}{y}=\xi^4.\bar{y}\dot{\bar{y}}\overset{*}{\bar{y}}=\xi^4.\bar{I}_3,$$

откуда из-за того, что $\xi\neq 0$ для $t\in T$, следует D-инвариантность равенств $I\lambda=0$.

в) P-инвариантность. При P-замене (6) функции x и y параметра t заменяются новым функциями $\bar{x}$ и $\bar{y}$ параметра $\bar{t}$:

(13) $$\bar{x}=x(t(\bar{t})),\quad \bar{y}=y(t(\bar{t})).$$

Имеем

(14) $$\dot{\bar{x}}=\dot{x}\frac{dt}{d\bar{t}},\quad \dot{\bar{y}}=\dot{y}\frac{dt}{d\bar{t}},\quad \ddot{\bar{y}}=\ddot{y}\left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)^2+\dot{y}\frac{d^2t}{d\bar{t}^2}.$$

Вычисляем $\overset{*}{\bar{y}}{}^1=\bar{y}^2\dot{\bar{y}}{}^3-\dot{\bar{y}}{}^2\bar{y}^3$, имея в виду (14), получаем $\overset{*}{\bar{y}}{}^1=\overset{*}{y}{}^1.dt/d\bar{t}$. Вообще находим, что $\overset{*}{\bar{y}}{}^\lambda=\overset{*}{y}{}^\lambda.dt/\bar{t}$, т. е.

(15) $$\overset{*}{\bar{y}}=\overset{*}{y}\frac{dt}{d\bar{t}}.$$

Из (13), (14) и (15) получаем

$$\bar{I}_1=\bar{x}\dot{\bar{x}}=x\dot{x}\frac{dt}{d\bar{t}}=I_1\frac{dt}{d\bar{t}},$$

$$\bar{I}_2=\bar{y}\dot{\bar{y}}\ddot{\bar{y}}=y\dot{y}\ddot{y}\left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)^3=I_2\left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)^3,$$

$$\bar{I}_3=\bar{y}\dot{\bar{y}}\overset{*}{\bar{y}}=y\dot{y}\overset{*}{y}\left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)^3=I_3\left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)^3,$$

откуда следует и P-инвариантность $I_\lambda=0$, поскольку по предположению $dt/d\bar{t}\neq 0$ для $\bar{t}\in\bar{T}$.

Все комбинации для значений величин I_λ для $t\in T$ следующие:

1) $I_1\neq 0,\quad I_2\neq 0,\quad I_3\neq 0$; 5) $I_1=0,\quad I_2=0,\quad I_3\neq 0$;

2) $I_1=0,\quad I_2\neq 0,\quad I_3\neq 0$; 6) $I_1\neq 0,\quad I_2=0,\quad I_3=0$;

3) $I_1\neq 0,\quad I_2=0,\quad I_3\neq 0$; 7) $I_1=0,\quad I_2\neq 0,\quad I_3=0$;

4) $I_1\neq 0,\quad I_2\neq 0,\quad I_3=0$; 8) $I_1=0,\quad I_2=0,\quad I_3=0$.

Очевидно из $I_3=0$ (респ. $I_2\neq 0$) следует $I_2=0$ (респ. $I_3\neq 0$). В таком случае множество кривых в $\mathrm{P}_4^{1,2}$ распадаются на 6 непересекающихся классах. Класс кривых, для которых выполнено соответственно 1), 2), 3), 5), 6) или 8), будем обозначать через K_1, K_2, K_3, K_5, K_6, K_8. Итак, имеем следующую классификацию кривых в $P_4^{1,2}$: кривая класса K_1: $I_1\neq 0$, $I_2\neq 0$; кривая класса K_2: $I_1=0$, $I_2\neq 0$; кривая класса K_3: $I_1\neq 0$, $I_2=0$, $I_3\neq 0$; кривая класса K_4: $I_1=0$, $I_2=0$, $I_3\neq 0$; кривая класса K_5: $I_1\neq 0$, $I_3=0$; кривая класса K_6: $I_1=0$, $I_3=0$. Ясно, что эта классификация несет B-, D- и P-инвариантный характер, поскольку равенства $I_\lambda=0$ имеют B-, D- и P-инвариантный характер.

3. В настоящем параграфе будем характеризировать геометрически кривые различных классов K_i, $i=1,\ldots,6$.

Пусть τ_1 — касательная прямая к кривой c в ее точке (3).

Теорема 2. *Следующие утверждения эквивалентны: а) τ_1 пересекает j (респ. k); б) $I_3=0$ (респ. $I_1=0$) для $t\in T$; в) вторые (респ. первые) проекции точки* (3) *совпадают, когда t меняется в T.*

Доказательство. Произвольная точка, принадлежащая τ_1, имеет координаты

$$(\alpha x+\beta\dot{x};\quad \alpha y+\beta\dot{y}),\quad |\alpha|+|\beta|\neq 0.$$

Эта точка лежит на j (респ. k) тогда и только тогда, когда $\alpha y+\beta\dot{y}=0$ (респ. $\alpha x+\beta\dot{x}=0$). Но это выполнено, поскольку $y\neq 0$ (респ. $x\neq 0$), для ненулевой пары (α,β) тогда и только тогда, когда y и $\dot{y}$ (респ. x и $\dot{x}$) линейно зависимы, т. е тогда и только тогда, когда $I_3=0$ (респ. $I_1=0$). С другой стороны, вторая проекция $(0;\,y)$ (респ. первая проекция $(x;\,0)$) точки (3) является постоянной точкой для $t\in T$ тогда и только тогда, когда эта проекция линейно зависима с точкой $(0;\,\dot{y})$ (респ. $(\dot{x};\,0)$), а это выполняется тогда и только тогда, когда $I_3=0$ (респ. $I_1=0$).

Как непосредственное следствие этой теоремы и определений различных типов прямых в $\mathrm{P}_4^{1,2}$ можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. *Касательная к кривой в $\mathrm{P}_4^{1,2}$ является тогда и только тогда прямой первого типа, когда $I_1\neq 0$, $I_3\neq 0$; второго типа, когда $I_1=0$, $I_3=0$ (в этом и только в этом случае кривая является трансверсальной прямой j и k); третьего типа, когда $I_1\neq 0$, $I_3=0$ (в этом и только в этом случае кривая находится в плоскости пятого типа); четвертого типа, когда $I_1=0$, $I_3\neq 0$ (в этом и только в этом случае первые проекции точек кривой совпадают, а вторые проекции этих точек разные).*

Замечание. Касательная кривой не может быть пятого типа, поскольку рассматриваемая кривая содержит только конечные точки.

Теорема 4. *Вторые проекции точек кривой в $\mathrm{P}_4^{1,2}$ описывают прямую в k тогда и только тогда, когда $I_2=0$, $I_3\neq 0$ для $t\in T$.*

Доказательство. Вторая проекция $(0;\, y)$ точки (3) опишет прямую в k тогда и только тогда, когда а) эта проекция не является постоянной точкой для $t \in T$ и б) точка $(0;\, \ddot{y})$ лежит на прямой, определенной $(0;\, y)$ и $(0;\, \dot{y})$. Условие а) выполнено согласно теоремы 2 тогда и только тогда, когда $I_3 \neq 0$ для $t \in T$, а условие б) — тогда и только тогда, когда $y\dot{y}\ddot{y} = I_2 = 0$ для $t \in T$.

Обозначим через τ_2 соприкасаующуся плоскость кривой в ее точке (3).

Теорема 5. *Соприкасающаяся плоскость τ_2 является тогда и только тогда плоскостью первого типа, когда $I_1 \neq 0$, $I_2 \neq 0$; второго типа, когда $I_1 = 0$, $I_2 = 0$, $I_3 \neq 0$; третьего типа, когда $I_1 = 0$, $I_2 \neq 0$; четвертого типа, когда $I_1 \neq 0$, $I_2 = 0$, $I_3 \neq 0$; пятого типа, когда $I_1 \neq 0$, $I_3 = 0$.*

Доказательство. Произвольная точка на плоскости τ_2 имеет координаты

$$(\alpha x + \beta \dot{x} + \gamma \ddot{x};\quad \alpha y + \beta \dot{y} + \gamma \ddot{y}),\ |\alpha| + |\beta| + |\gamma| \neq 0.$$

Эта точка — бесконечная точка первой или второй системы тогда и только тогда когда выполнено соответственно

$$\alpha y + \beta \dot{y} + \gamma \ddot{y} = 0 \tag{16}$$

или

$$\alpha x + \beta \dot{x} + \gamma \ddot{x} = 0. \tag{17}$$

Условие (16) в координатной записи представляет собой однородную систему из трех уравнений для ненулевой тройки $(\alpha,\, \beta,\, \gamma)$ и, следовательно, поскольку $y \neq 0$, может иметь 0, 1 или 2 фундаментальных решений. Следовательно, возможны следующие случаи: 1)—(16) имеет 0 решений (т. е. τ_2 — плоскость первого или третьего типа) тогда и только тогда, когда $I_2 \neq 0$; 2)—(16) имеет 1 решение (τ_2 — плоскость второго или четвертого типа) тогда и только тогда, когда $I_2 = 0$, $I_3 \neq 0$; 3)—(16) имеет 2 решения (τ_2 — плоскость пятого типа) тогда и только тогда, когда $I_3 = 0$.

Условие (17) в координатной записи является однородной системой двух уравнений для ненулевой тройки $(\alpha,\, \beta,\, \gamma)$ и, следовательно, поскольку $x \neq 0$, может иметь 1 и 2 фундаментальных решений. Теперь возможны следующие случаи: 1′)—(17) имеет 1 решение (τ_2 — плоскость первого, четвертого или пятого типа) тогда и только тогда, когда $I_1 \neq 0$; 2′)—(17) имеет 2 решения (τ_2 — плоскость второго или третьего типа) тогда и только тогда, когда $I_1 = 0$.

Утверждение теоремы становится очевидным после подходящей комбинации случаев 1), 2), 3), 1′), 2′).

Обозначим через τ_3 соприкасающуюся гиперплоскость кривой в ее точке (3).

Теорема 6. *Соприкасающаяся гиперплоскость τ_3 является конечной гиперплоскостью тогда и только тогда, когда $I_1 \neq 0$, $I_2 \neq 0$; бесконечной гиперплоскостью первой системы тогда и только тогда, когда $I_1 \neq 0$, $I_2 = 0$, $I_3 \neq 0$; бесконечной гиперплоскостью второй системы тогда и только тогда, когда $I_1 = 0$, $I_2 \neq 0$.*

Доказательство. Произвольная точка гиперплоскости τ_3 имеет координаты

$$(\alpha x + \beta \dot{x} + \gamma \ddot{x} + \delta \dddot{x};\quad \alpha y + \beta \dot{y} + \gamma \ddot{y} + \delta \dddot{y}),\ |\alpha| + |\beta| + |\gamma| + |\delta| \neq 0. \tag{18}$$

Точка (18) будет бесконечной точкой первой системы тогда и только тогда, когда

$$\alpha y + \beta \dot{y} + \gamma \ddot{y} + \delta \dddot{y} = 0. \tag{19}$$

Однородная система (19) содержит три уравнения для α, β, γ, δ и, следовательно, может иметь 1 или 2 фундаментальных решения, поскольку $y \neq 0$. Возможны следующие случаи: 1)—(19) имеет 1 решение (τ_3 — конечная гиперплоскость или бесконечная гиперплоскость второй системы) тогда и только тогда, когда $I_2 \neq 0$; 2)—(19) имеет 2 решения (τ_3 — бесконечная гиперплоскость первой системы) тогда и только тогда, когда $I_2=0$, $I_3 \neq 0$.

Точка (18) будет бесконечной точкой второй системы тогда и только тогда, когда

$$\alpha x+\beta \dot{x}+\gamma \ddot{x}+\delta \dddot{x}=0. \tag{20}$$

Однородная система (20) из двух уравнений для α, β, γ, δ может иметь 2 или 3 фундаментальных решений, поскольку $x \neq 0$. Теперь имеем: 1′) система (20) имеет 2 решения (τ_3 — конечная гиперплоскость или бесконечная гиперплоскость первой системы) тогда и только тогда, когда $I_1 \neq 0$; 2′) система (20) имеет 3 решения (τ_3 — бесконечная гиперплоскость второй системы) тогда и только тогда, когда $I_1=0$.

Комбинирование случаев 1), 2), 1′), 2′) доказывает справедливость теоремы.

Доказанные теоремы в этом параграфе дают одну сравнительно богатую геометрическую характеристику для кривых, принадлежащих отдельным классам K_i, $i=\{1; \ldots; 6\}$. Учитывая содержание этих теорем, полученные результаты можем резюмировать следующим образом:

Класс K_1 состоит из кривых в $P_4^{1,2}$, для которых первые проекции их точек являются различными точками на j, а вторые проекции этих точек описывают в k кривые, отличные от прямых линий. Их касательные — прямые первого типа, их соприкасающиеся плоскости — плоскости первого типа, а их соприкасающиеся гиперплоскости — конечные гиперплоскости.

Для каждой кривой класса K_2 первые проекции ее точек совпадают с одной и той же точкой $O \in j$, а вторые проекции этих точек описывают в k кривую, отличную от прямой линии. Касательные кривой являются прямыми четвертого типа, ее соприкасающиеся плоскости — плоскости третьего типа, а ее соприкасающиеся гиперплоскости совпадают с гиперплоскостью τ_3^0, определенной точкой O, и плоскостью k. В таком случае кривая этого класса может быть интерпретирована как кривая в трехмерном центрально-аффинном пространстве τ_3^0 с бесконечно удаленной плоскостью — плоскость k и полюс — точка O.

Кривая класса K_3 имеет различные первые проекции своих точек и различные вторые проекции этих точек на прямой $\bar{j}$ в k. Ее касательные — прямые первого типа, ее соприкасающиеся плоскости — плоскости четвертого типа, а ее соприкасающиеся гиперплоскости совпадают с гиперплоскостью, определенной скрещенными прямыми j и $\bar{j}$ и, следовательно, такая кривая может быть интерпретирована как кривая в трехмерном биаксиальном пространстве $P_3^{1,1}$ с абсолютными прямыми j и $\bar{j}$.

Для кривой класса K_4 первые проекции ее точек совпадают с одной постоянной точкой $O \in j$, а вторые проекции этих точек — различные точки на прямой $\bar{j}$ в k. Ее касательные — прямые четвертого типа. Такая кривая лежит в плоскости второго типа, определенной точкой O и прямой $\bar{j}$.

Первые проекции точек кривой класса K_5 — различные точки на j, а вторые проекции этих точек совпадают с постоянной точкой $O \in k$. Ее касательные — прямые третьего типа. Кривая лежит в плоскости пятого типа, определенной точкой O и прямой j.

Кривые класса K_6 — прямые второго типа, т. е. трансверсальные прямые для j и k.

ЛИТЕРАТУРА

1. O. M a y e r. Géométrie biaxiale différentielle des courbes. *Bull math. de la soc. Roumaine des Sci.*, **40**, 1938, p. 193.
2. O. M a y e r. Biaxiale Differentialgeometrie der Kurven und Regelflächen. *Ann. sci., Univ. Jassy, I sec.*, **27**, 1941.
3. А. П. Н о р д е н. Пространство линейной конгруенции. *Мат. сб.*, **24** (66), 1949, 3, 429—455.
4. А. П. Н о р д е н. Теория кривых биаффинного пространства. *Учен. записки Казанского гос. унив.*, Мат., **112**, 1952, кн. 10, 13—26.
5. Б. П е т к а н ч и н. Хиперболични роеве прави в двуосната геометрия. *Год. Соф. унив., Физ-мат. фак.*, **48**, 1953/1954, кн. 1, ч. I. 33—65.
6. И. И в а н о в. Диференциална геометрия на повърхнините в хиперболичното двуосно пространство. Канд. дисертация. София, 1965.
7. Г. С т а н и л о в. Повърхнини и конгруенции в двуосното пространство. *Изв. Мат. инст. БАН*, **IX**, 1965, 115—131.
8. D. G. M e k e r o v. One-parameter families of lines in a generalized biaxial space. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **30** (9) 1977, 1251—1253.
9. D. M e k e r o v. On differential geometry of one-parameter families of lines in a generalized biaxial space. — In: *Colloquia Mathematica Societatis J. Bolyai*, **31**, *Differential geometry*. Budapest, 1979, 431—435.
10. Д. Г. М е к е р о в. Двупараметрические системы прямых в одном обобщенном биаксиальном пространстве. *Докл. БАН*, **34**, 1981, 3, 323—326.
11. R. T. K o z h u h a r o v a. Surfaces in a generalized biaxial space. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **35**, 1982, 11, 1463—1466.

Пловдивский университет
4000 Пловдив Болгария

Поступила 5. VIII. 1983