PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

ОБ ОДНОЙ ГРУППЕ КУБИЧЕСКИХ ТРАНСФОРМАЦИЙ КРЕМОНА В ПРОСТРАНСТВЕ P_4

ХРИСТО ГРИГОРОВ, ГАНЧО СТОЕВ

В четырехмерном проективном пространстве P_4 получены и изучены пространственные трансформации Кремона, кубические относительно линейных элементов пространства. Исследованы некоторые свойства гомалоидных поверхностей. В результате получена четырехпараметрическая группа кубических трансформаций Кремона в P_4.

1. В четырехмерном проективном пространстве P_4 заданы прямая s, точка $S\overline{\in} s$ и прямолинейная квадрика F_2^2, при этом $s\in F_2^2$, $\overline{S}\in\langle F_2^2\rangle$, $\langle F_2^2\rangle$ — гиперплоскость, содержащая F_2^2. Пусть δ — произвольное реальное число, а φ — произвольная, но фиксированная проективность на ряд точек s. Проективность φ приводит в проективное соответствие ψ прямые пучка с центром S в плоскости $\pi=\langle S, s\rangle$ и прямые полуквадрики $F_{21}^2\subset F_2^2$, несодержащей прямую s. Всякую пару соответственных прямых принимаем за оси двуосной гомологии Φ в трехмерном пространстве, определяемом осями гомологии и содержащим π. Пара соответствующих точек (XX') с этой гомологии и точки пересечения (P, Q) прямой (XX') с осями гомологии имеют двойное отношение $(PQXX')=\delta$. Таким образом в P_4 определяется преобразование T, которое по определению расслаивается на двуосные гомологии в трехмерных пространствах пучка гиперплоскостей $\{P_3^*\}$ с осью плоскостью π. Объектом исследования в P_4 является трансформация T.

2. Трансформация T — нелинейная трансформация Кремона. По определению T — однозначное и обратимое соответствие. Способ определения $X'=T(X)$ следующий: выбором точки X фиксируется гиперплоскость $\langle\pi, X\rangle\in\{P_3^*\}$, в которой лежит прямая $q=F_{21}^2\cap\langle\pi, X\rangle$, однозначно определяются точки $Q=q\cap s$, $P=\varphi(Q)$ и прямая $p=SP$; следовательно, так определяется одна двуосная гомология Φ с осями p, q и соответственно двойное отношение δ, а это значит, что определена одна точка $X'=\Phi(X)$. Точка $X'=\Phi(X)$ есть $T(X)$.

Существуют элементы пространства, в которых однозначность нарушается, что говорит о нелинейном характере трансформации [1]:

а) пусть точка $M\in s$ и $\varphi(M)=M$ — двойной элемент проективности φ. Точка M принадлежит всякому трехмерному пространству пучка $\{P_3^*\}$ и, следовательно, имеет различные образы для разных двуосных гомологий, определенных в этих пространствах. Образ $T(M)$ — множество точек $\{M'\}$. Обозначим через q_m единственную прямую, проходящую через точку M и принадлежащую полуквадрике F_{21}^2. Так как $\varphi(M)=M$, то прямая $\psi(q_m)=SM=p_m$, а соответствующая гомология Φ_M в пространстве $\langle\pi, q_m\rangle=P_M^*\in\{P_3^*\}$ имеет пересекающиеся оси p_m и q_m и вырождена. У этой гомологии $\Phi(M)=P_M^*$, а это значит, что точке M для Φ_M соответствуют все точки пространства P_M^*. Точка M — фундаментальная точка преобразования T, а простран-

ПЛИСКА Български математически студии. Том 9, 1987, с. 98—103.

ство P^*_M — соответствующее ей принципиальное многообразие точек. Если φ — гиперболическая проективность, то существует и другая точка $N \in s$ и $\varphi(N)=(N)$, следовательно, существует еще одна фундаментальная точка для T, и соответствующее ей принципиальное многообразие P^*_N. Если φ — параболическая проективность, то $M \equiv N$, а если φ — эллиптическая, то M и N — пара комплексно сопряженных точек реальной прямой s.

б) пусть μ — плоскость $\langle p_m, q_m \rangle \subset P^*_M$. Произвольная точка $M_i \in \mu$ и $M_i \neq M$ имеет образ для Φ_M, а, следовательно, и для T все точки прямой $m'_i \in \mu$, $m'_i \ni M$ и $(p_m q_m m_i m'_i)=\delta$, где $m_i = MM_i$. Следовательно, μ — двойная плоскость для Φ_M, а значит и для T, и всякая ее точка M_i фундаментальна с принципиальным многообразием $T(M_i)$ — точками прямой m'_i. Если φ имеет и вторую двойную точку N, то появляется еще одна плоскость ν, точки которой фундаментальны, а прямые пучка в плоскости ν и с центром N — принципиальные многообразия.

в) пусть P — произвольная точка на π. Она принадлежит каждому пространству пучка $\{P^*_3\}$ и имеет различные образы для гомологии $\{\Phi\}$. Множество точек $\{T(P)\}=\{P'\}$ — кривая p^2 второго порядка, проходящая через M и N. Следовательно, всякая точка $P \in \pi$ фундаментальна для T. Принципиальные многообразия — 2-параметрическое множество кривых второго порядка $\{p^2\}$ в π, проходящие через M и N.

Других фундаментальных элементов трансформация T не имеет. Общая фундаментальная система исчерпывается точками M, N и точками плоскостей π, μ и ν, а система принципиальных многообразий исчерпывается гиперплоскостями P^*_M, P^*_N, кривыми второго порядка $\{p^2\}$ в π и двумя пучками прямых $\{m_i\} \in M$ с центром M и $\{n_i\} \in \nu$ с центром N. Итак, исследованная трансформация T в P_4 нелинейна.

3. Трансформация T — кубическая по отношению к прямым в P_4. Гомалоидальная система линий, соответствующая множеству прямых $\{a\} \subset P_4$ — 6-параметрическая система $T(\{a\})=\{a^3\}$ пространственных кривых третьего порядка, проходящих через M и N, и для которых π — бисекантная плоскость.

Пусть a — произвольная прямая в P_4. Ее образ $T(a)=a^k$ — кривая линия, порядок которой определяет один из порядков T. Для определения k пересекаем a с гиперплоскостью в P_4, расположенной произвольно относительно a. Такая гиперплоскость есть любая $P^*_3 \in \{P^*_3\}$. Число точек в сечении $T(P^*_3) \cap T(a)$ определяет k. Но так как $T(a)=a^k$, $T(P^*_3)=P^*_3$, то k определяется числом точек в сечении $a^k \cap P^*_3$. Одна из этих точек есть образ A' точки $A=a \cap P^*_3$. Но прямая a пересекает и принципиальные многообразия P^*_M и P_N, следовательно, a^k проходит через фундаментальные точки M и N. Итак, $T(a) \cap T(P^*_3)=\{A', M, N\}$, $k=3$ и $T(a)=a^3$ — кубическая пространственная кривая линия.

Некоторые специальные случаи расположения прямой a в P_4:

а) a расположена в одной из $\{P^*_3\}$. Тогда $a^3=T(a) \in P^*_3$, так как $T(P^*_3)=P^*_3$. Но $T(a)=a'$ является в P^*_3 прямой линией и одной из компонент a^3. Другие компоненты появляются как образы фундаментальных точек на a. Такой фундаментальной точкой является только точка $P_a=a \cap \pi$ и $T(P_a)=p^2_a \in \{p^2\}$. Следовательно, $T(a)=a^3 = a' \cup p^2_a$;

б) a расположена в плоскости π. Всякая ее точка является фундаментальной и имеет образ, соответствующий принципиальной кривой p^2. Кроме того, a как прямая всякой гиперплоскости P^*_3 трансформируется в прямую a' посредством соответствующей двуосной гомологии Φ. Однопараметрическое множество прямых $\{a'\}=\{\Phi(a)\}$ в π является кривой второго класса, порожденной двумя проективными рядами точек a и $\bar{a}$, где $\bar{a}$ — прямая через $A=a\cap s$, для которой двойное отношение $(sASa\bar{a})=\delta$. Проективность между a и $\bar{a}$ неперспективна и определяется посредством проектирования из центра S ряда точек s на a и ряда точек $\varphi(s)$ на $\bar{a}$. Следовательно, $T(a)$ состоит из пучка принципиальных кривых второго порядка $\{p^2\}$ и прямых $\{a'\}$, которые определяют кривую второго класса p_a^2;

в) $a\in P_M^*$, но $\bar{a}\in\mu$. Точки $a\cap\mu$ и $a\cap\pi$ фундаментальные и трансформируются соответственно в прямую $m_a\ni M$ и кривую $p_a^2\in\{p^2\}$. Следовательно $T(a)=a^3=m_a\cup p_a^2$.

г) $a\in\mu$, но $\bar{a}\ni M$. Точки a — фундаментальны. Точке $a\cap\pi$ соответствует кривая второго порядка из $\{p^2\}$. Любой другой точке на a соответствует прямая в μ, проходящая через M. Следовательно, $T(a)$ является принципиальным многообразием линий.

То же самое можно сказать о прямых, принадлежащих P_N^*;

д) $a\ni M$, но $\bar{a}\in\pi$. Тогда $a\in P_3^*$, и соответствующая двуосная гомология Φ определяет прямую $a'=\Phi(a)$ как одну из компонент $T(a)$. Точка $M\in a$, но так как она фундаментальна, то ей соответствуют все прямые в P_M^*, проходящие через M. Точка $M\in\pi$ и при различных двуосных гомологиях имеет образ $\{\Phi(M)\}=s$. Следовательно, $T(a)=a^3=a'\cup s\cup s$;

е) прямая $a\in\pi$ и $a\ni M$. Все точки a фундаментальны и $T(a)$ является принципиальным многообразием линий — пучок кривых второго порядка из $\{p^2\}$ и всех прямых в P_M^*, проходящих через M. То же самое имеет место и для $a\ni N$, $a\in\pi$.

Из проведенных исследований следует общий вывод: шестипараметрическое многообразие прямых $\{a\}$ в P_4 (за исключением фундаментальных) отображается однозначно в 6-параметрическое многообразие $\{a^3\}$ пространственных кривых третьего порядка, всякая из которых проходит через точки M и N, и для всякой из них π является бисекантной плоскостью.

Произвольная пространственная кривая a^3 в P_4 расположена в одном P_3, и в нем a_3 определяется 12 свободными параметрами. В P_4 гиперплоскости являются 4-параметрическим множеством, следовательно a^3 в P_4 зависит от $12+4=16$ параметров. Условие прохождения a^3 через M и N требует $2(4-1)=6$ параметров. Условие бисекантности плоскости π для кривой a^3 требует четырех свободных параметров. Следовательно, инцидентность a^3 с фундаментальной системой требует $6+4=10$ параметров. Так как множество $\{a^3\}=T(\{a\})$ является 6-параметрическим $(16-10=6)$, то соответствие $T:\{a\}\to\{a^3\}$ — биективное.

4. Трансформация T — кубическая по отношению к плоскостям в P_4. Шестипараметрическое множество плоскостей $\{\alpha\}$ в P_4 отображается в 6-параметрическое множество $\{\alpha_2^3\}$ нормповерхностей, каждая из которых проходит через M и N, пересекает π по кривой второго порядка и касается плоскостей μ и ν по прямолинейным образующим. Отображение $T:\ \{\alpha\}\to\{\alpha_2^3\}$ — биективное.

Образом $T(\alpha)$ плоскости α является двумерная поверхность α_2^k, порядок k которой определяет промежуточный порядок T. Пересекаем α с гиперплоскостью в P_4, расположенной произвольно относительно α. Пусть эта гиперплоскость — $P_3^*\in\{P_3^*\}$. Порядок линии пересечения $T(\alpha)\cap T(P_3^*)$ равен k. Но $T(\alpha)=\alpha_2^k$, а $T(P_3^*)=P_3^*$, следовательно, k — это порядок линии пересечения $\alpha_2^k\cap P_3^*$. Пересечение $\alpha\cap P_3^*$ является прямой a и $T(a)=\alpha_2^k\cap P_3^*$. Однако $T(a)$ — пространственная кубическая кривая, проходящая через M и N, состоящая из прямой $a'=\Phi(a)$ в P_3^* и из кривой второго порядка v_a^2, соответствующей точке $A=\alpha\cap\pi$. Следовательно,

$$T(\alpha)\cap T(P_3^*)=\alpha_2^k\cap P_3^*=a'\cup p_a^2.$$

Отсюда $k=3$, $T(\alpha)=\alpha_2^3$ является двумерной поверхностью третьего порядка и трансформация T — кубическая по отношению к плоскостям в P_4. Свойства $\alpha_2^3=T(\alpha)$, обусловленные трансформацией, следующие:

а) α_2^3 — прямолинейная кубическая поверхность. Сечение $\alpha\cap\{P_3^*\}=\{a\}$ является пучком прямых в α с центром $\alpha\cap\pi$. Всякая прямая этого пучка, как прямая какого-либо P_3^*, при T отображается в другую прямую того же самого P_3^*. Таким образом прямые пучка $\{a\}$ отображаются прямыми линиями на поверхности α_2^3. Точка $A=\alpha\cap\pi$ — общая для прямых $\{a\}$, фундаментальная и отображается кривой второго порядка $p_a^2\in\{p^2\}$. При этом точки $\Phi(A)$ различны для различных Φ и $\{\Phi(A)\}=p_\alpha^2$. Следовательно, α_2^3 — прямолинейная поверхность, образованная из одномерного множества $\{a'\}$ прямолинейных образующих и одной направляющей кривой линии p_a^2.

б) в пучке прямых $\{a\}=\alpha\cap\{P_3^*\}$ имеются две прямые $m_\alpha=\alpha\cap P_M^*$ и $n_\alpha=\alpha\cap P_N^*$, которые являются принципиальными прямыми, соответствующими M и N, и, следовательно, $\alpha_2^3\ni M$, $\alpha_2^3\ni N$. Точки пересечения $A_\mu=\alpha\cap\mu$, $A_\nu=\alpha\cap\nu$ — фундаментальные, и соответствующие им принципиальные прямые принадлежат α_2^3, что создает условия касания α_2^3 с μ и ν по прямолинейным образующим.

в) на $T(\alpha)=\alpha_2^3$ есть еще одна прямая, непринадлежащая образующим $\{a'\}$. Образ прямой $u_\alpha=A_\mu A_\nu$ — кривая третьего порядка $T(u_\alpha)$, имеющая две прямолинейные компоненты u_m и u_n, соответствующие фундаментальным точкам A_μ и A_ν. Следовательно, $T(u_\alpha)$ имеет еще одну прямолинейную компоненту u'_α, соответствующую прямой u_α за исключением точек A_μ и A_ν на u_α. Так как все прямые из $\{a\}$ пересекают u_α, то прямые $\{a'\}$ пересекают u'_α, а это значит, что u'_α — прямолинейная направляющая нормповерхности α_2^3.

Другие свойства α_2^3 рассмотрены в [2].

Некоторые частные случаи расположения α в P_4:

а) плоскость $\alpha\in P_3^*$. Тогда одной компонентой образа $T(\alpha)$ будет плоскость $\alpha'=\Phi(\alpha)$, где Φ — соответствующая двуосная гомология в P_3^*. Прямая пересечения $p_\alpha=\alpha\cap\pi$ — фундаментальная, и ее принципиальное многообразие — плоскость π, взятая два раза. Следовательно, $T(\alpha)=\alpha_2^3=\alpha'\cup\pi\cup\pi$;

б) плоскость $\alpha\in P_M^*$ содержит фундаментальные прямые $m_\alpha=\alpha\cap\mu$ и $p_\alpha=\alpha\cap\pi$. Принципиальное многообразие для m_α — пучок прямых в μ с центром M, а для p_α — плоскость π, взятая два раза. Так что $T(\alpha)=\mu\cup\pi\cup\pi$.

в) плоскость α принадлежит трехмерному пространству $\langle F_{21}^2\rangle$, содержащему полуквадратику F_{21}^2. Образ $T(\alpha)=\alpha_2^3$ — прямолинейная двухмерная поверхность в $\langle F_{21}^2\rangle$ с направляющей линией — кривой второго порядка $\alpha\cap F_2^2$. Прямолинейная направляющая u'_n определяется как в общем случае, но α_2^3 не является нормповерхностью для P_4.

Из проведенных исследований следует, что: 6-параметрическое множество $\{\alpha\}$ плоскостей в P_4 отображается однозначно через T в 6-параметрическое множество $\{\alpha_2^3\}$ нормповерхностей, всякая из которых проходит через точки M и N, пересекает плоскость π по своей криволинейной направляющей p^2 и касается μ и ν по соответствующим прямолинейным образующим.

Произвольная нормповерхность α_2^3 в P_4 зависит от 18 свободных параметров. Инцидентность α_2^3 с M и N требует $2\times2=4$ параметра, $\pi\cap\alpha_2^3$ требует еще два параметра, а касание α_2^3 с μ и ν по прямой линии требует $2\times3=6$ параметров. Это значит, что инцидентность α_2^3 с фундаментальной системой точек и линий требует 12 свободных параметров и еще, что гомалоидная система $\{\alpha_2^3\}$ зависит от $18-12=6$ параметров. Следовательно, соответствие $T:\{\alpha\}\to\{\alpha_2^3\}$ — биективное.

5. Трансформация T — кубическая по отношению к гиперплоскостям в P_4. Четырехпараметрическое множество $\{\alpha_3\}$ гиперплоскостей в P_4 отображается в четырехмерное многообразие гиперкубических поверхностей $\{\alpha_3^3\}$, всякая из которых проходит через M и N, имеет в качестве двухмерной направляющей плоскость π и касается тримерных пространства P_M^* и P_N^* соответственно по двумерным образующим μ и ν.

Образ $T(\alpha_3)$ произвольной гиперплоскости $\alpha_3 \in P_4$ — трехмерная поверхность α_3^k порядка k, которая определяет последнюю порядковую характеристику для T. Пересекаем α_3 с произвольным пространством $P_3^* \in \{P_3^*\}$. Сечение $\alpha_3 \cap P_3^* = \alpha_2$ является плоскостью, а $T(\alpha_2)=\alpha_2^3$ — поверхность из системы $\{\alpha_2^3\}$, при этом

$$\alpha_2^3 = T(\alpha_3 \cap P_3^*) = T(\alpha_3) \cap P_3^*$$

(так как $T(P_3^*)=P_3^*$). Следовательно, $T(\alpha_3)=\alpha_3^3$ — гиперкубическая поверхность, и порядок трансформации T по отношению к гиперплоскостям в P_4 равен трем ($k=3$)

Некоторые свойства α_3^3:

а) гиперповерхность α_3^3 — 1-параметрическое многообразие двухмерных плоскостей — образующих для α_3^3. Сечение $\alpha_3 \cap \{P_3^*\}=\{\beta\}$ — пучок плоскостей в α_3 с осью — прямой $\alpha_3 \cap \pi$. Эта прямая, общая для плоскостей $\{\beta\}$, является фундаментальной, и ее образ содержит принципиальное многообразие $\{p^2\}$ и 1-параметрическое множество прямых, определяющих кривую второго класса $\bar{p}_2$. Плоскость $\beta \in \{\beta\}$, из которой исключена фундаментальная прямая $\beta \cap \pi$, имеет образ $T(\beta)=\Phi(\beta)=\beta'$ — плоскость, содержащую $\Phi(\alpha_3 \cap \pi)$. Таким образом $\Phi(\{\beta\})=\{\beta'\}$ — 1-параметрическое множество плоскостей, принадлежащих $T(\alpha_3)=\alpha_3^3$.

б) на α_3^3 имеется 3-параметрическое множество нормповерхностей из гомалоидной системы $\{\alpha_2^3\}$. Через всякую точку прямой $\alpha_3 \cap \pi$ проходит двухмерное множество плоскостей $\alpha_2 \in \alpha_3$, образы $T\{\alpha_2\}$ которых — нормповерхности из системы $\{\alpha_2^3\}$. Следовательно, на α_3^3 имеется 3-параметрическое множество нормповерхностей.

в) плоскость π — двойная плоскость для α_3^3, при этом всякая ее точка является двойной для гиперповерхности α_3^3.

г) прямолинейные образующие для α_3^3 следующие: прямолинейные, образующие принадлежащих α_3^3 нормповерхностей, соответствующие прямолинейные, направляющие этих нормповерхностей, и образы всех прямых в плоскостях пучка $\{\beta\}$. Другие свойства α_3^3 рассмотрены в [3].

Некоторые частные случаи расположения α_3:

а) гиперплоскость α_3 — произвольная из пучка $\{P_3^*\}$. Образ $T(\alpha_3)=\alpha_3$;

б) гиперплоскость $\alpha_3=\langle F_2^2\rangle$. Пространство $\langle F_2^2\rangle$ без учета фундаментальных элементов является двойным для T. Неподвижное многообразие точек есть квадрика F_2^2, а неподвижное многообразие прямых — полуквадратика F_{21}^2. Неподвижное многообразие плоскостей для T — плоскости $\langle F_2^2\rangle$, содержащие s.

Следовательно, 4-параметрическое множество $\{\alpha_3\}$ гиперплоскостей в P_4 отображается в 4-параметрическую систему $\{\alpha_3^3\}$ кубических прямолинейных гиперповерхностей, всякая из которых имеет плоскость π в качестве двойной направляющей плоскости и касается пространств P_M и P_N соответственно в плоскостях μ и ν.

Произвольная поверхность α_3^3 в P_4 зависит от 24 параметров. Условия, что $\pi \in \alpha_3^3$ и является двойной плоскостью, требуют $2 \times 6 = 12$ свободных параметров. Для фиксирования точек M и N на π необходимы еще $2 \times 2 = 4$ параметра. Плоскости μ и ν, проходящие соответственно через M и N и принадлежащие α_3^3, тоже требуют $2 \times 2 = 4$ параметра. Следовательно, для инцидентности α_3^3 с фундаментальной системой необходимы в итоге 20 свободных параметров. А это означает, что 4-параметрическое множество $\{\alpha_3\}$ гиперплоскостей в P_4 отображается в 4-параметрическом многообразии $\{\alpha_3^3\}$ прямолинейных, гиперкубических поверхностей, при этом соответствие между $\{\alpha_3\}$ и $\{\alpha_3^3\}$, устанавливаемое через T, является биективным.

6. Трансформация T является трансформацией Кремона типа T_{3-3-3}. Установленные биективные соответствия между множествами линейных элементов в P_4 и соответствующие многообразия гомалоидной системы показывают, что полученная гомалоидная система является полной.

7. Группа кубических трансформаций Кремона. При всяком выборе прямой s в P_4 полуквадратики F_{21}^2 с осью s, точки $S \in \langle F_{21}^2 \rangle$, числа $\delta \neq 0$ и проективности φ на ряд точек s определяется одна трансформация T. При фиксировании прямой s, полуквадрики F_{21}^2 и точки S 3-параметрическое множество $\{\varphi\}$ различных проективностей на прямую s и выбор реального числа $\delta \neq 0$ определяют в P_4 4-параметрическое множество $\{T(\varphi, \delta)\}$ таких трансформаций.

Кубические трансформации $\{T(\varphi, \delta)\}$ в P_4 образуют группу:

а) пусть $T_1(\varphi_1, \delta_1)$ и $T_2(\varphi_2, \delta_2)$ — две произвольные трансформации из $\{T(\varphi, \delta)\}$ и P_3^* — произвольная гиперплоскость из пучка $\{P_3^*\}$. Трансформации T_1 и T_2 проявляются в P_3^* как двуосные гомологии $\Phi_1(p_1, q_1)$ и $\Phi_2(p_2, q_2)$, две оси которых q_1 и q_2 сливаются — $q_1 = q_2 = q = P_3^* \cap F_{21}^2$, а другие две оси — p_1 и p_2, расположены в π и пересекаются в точке S. Произведение $T_2 \circ T_1$ проявляется в P_3^* как произведение $\Phi_2 \circ \Phi_1 = \Phi_3$. Но при вышеуказанных условиях Φ_3 — тоже двуосная гомология с одной осью — прямой q, и второй осью — прямой $p_3 \in \pi$, проходящей через S. Гомологии Φ_3 соответствует число δ, и она порождает на s проективность $\varphi_3 \in \{\varphi\}$. Таким образом произведение $T_2 \circ T_1$ двух трансформаций из $\{T(\varphi, \delta)\}$ — тоже трансформация из $\{T(\varphi, \delta)\}$;

б) пусть $T(\varphi, \delta)$ и $T^*(\varphi^*, \delta^*)$ — трансформации из $\{T(\varphi, \delta)\}$. Преобразование $T^*(\varphi^*, \delta^*)$ определяем как обратное преобразованню T (φ, δ) и обозначаем $T^{-1}(\varphi, \delta)$, если $\varphi^* = \varphi$, $\delta^* = 1/\delta$. Тогда очевидно, если $T(A) = A'$, то $T^{-1}(A') = A$. Следовательно, множество $\{T(\varphi, \delta)\}$ является 4-параметрической группой кубических трансформаций Кремона в P_4.

Если полуквадрика F_{21}^2 изменяется в специальном линейном комплексе прямых L с осью s, расположенном в $\langle L \rangle$, то это расширяет $\{T(\varphi, \delta)\}$ до 12-параметрического множества. Если изменяется гиперплоскость $\langle L \rangle$ и плоскость π, содержащие s, а также и точка S на π, то реализуется 18-параметрическое множество $\{\widetilde{T}(\varphi, \delta)\}$ кубических трансформаций Кремона типа $\widetilde{T}_{3-3-3}$.

При $\delta = -1$ из $\{\widetilde{T}(\varphi, \delta)\}$ выделяется множество $\{I(\varphi)\}$ инволюций в P_4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. С. Иванов. Кремоновые преобразования плоскости и пространства. — В: Сб. тр. Моск. лесотехн. ин-та, 1971.
2. О. А. Котий, Е. В. Потоскуев. О кубической нормповерхности четырехмерного проективного пространства. — В: Уч. записки Ярославского пед. ин-та, 1970.
3. А. К. Власов. Полярные системы высших порядков. Москва, 1909.
4. Н. В. Ефимов. Высшая геометрия. Москва, 1961.

Высший машиностроительный институт
1000 София Болгария

Поступила 10 VII. 1984