5. Интегриране в комплексната равнина

Definition: Гладка крива в комплексната равнина γ : образът на непрекъсната комплекснозначна функция $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, която удовлетворява условията:
a) функцията $z(t)$ е взаимно-еднозначна върху $[\alpha, \beta;]$

$$\textbf{b)}\ z \in C^1([\alpha, \beta]); \tag{1}$$

c) $z'(t) \neq 0$, $t \in [\alpha, \beta]$.

Кривата γ е затворена, ако $z(\alpha) = z(\beta)$ и $z'(\alpha) = z'(\beta)$. Крива, удовлетворяваща само първите две условия, се нарича крива на Жордан.

Ползвайки в бъдеще понятието "гладка крива", ще имаме пред вид затворена гладка крива или гладка дъга.

Definition: Всяка функция $z(t)$, която удовлетворява условията (1), се нарича допустима параметризация на кривата γ.

Например,

$$z(t) = \cos t + i \sin t,\ t \in [0, 2\pi], \tag{2}$$

и

$$z(t) = \sin t + i \cos t,\ t \in [0, 2\pi] \tag{3}$$

са две допустими параметризации на единичната окръжност $C_0(1)$.

Нека сега е гладка крива (или дъга) с крайни точки z_0 и z_T. МОжем да фиксираме по два начина посока върху γ - от z_0 към z_T и обратно, от z_T към z_0. Избирайки една от двете посоки, ние въвеждаме **ориентация на кривата (дъгата)**. Ако, по-нататък $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ е допустима параметризация за γ, то тя или съвпада с въведената посока, или е обратна на нея. Например, ако ориентираме $C_0(1)$ в положителна посока (т.е., обратна на часовниковата стрелка), то параметризацията (2) ще съвпада с тази посока, докато (3) ще е противоположна на нея. Казваме още, че двете параметризации (2) и (3) определят две противоположно ориентирани криви.

Преди да преминем към следващото понятие, ще припомним следната класическа теорема:
Теорема на Жордан: *Всяка затворена Жорданова крива разделя Гаусовата равнина на две непресичащи се области.*

Едната от тези област, наречена вътрешност, е ограничена, докато другата, т.н. външност на γ, е неограничена.

Следващото понятие се отнася до ориетираност на дадена крива спрямо област.

Definition: Нека γ с $z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$ е затворена крива и G е нейната вътрешност. Казваме, че γ е положително ориентирана спрямо G, ако при "движението"от $z(\alpha)$ до $z(\beta)$ областта G остава от лявата страна. В противен случай γ е отрицателно ориентирана спрямо G. Аналогично дефинираме положителна ориентираност спрямо външността.

Досегашните дефиниции се обобщават по естествен път за "частично гладки криви". Например, частично гладката крива

$$z = z(t) = \begin{cases} a\cos t + ib\sin t, & t \in [-\pi/2, \pi/2] \\ (t - \pi/2)(ib) + (1 + \pi/2 - t)(-ib), & t \in [\pi/2, \pi/2 + 1] \end{cases}$$

е положително ориентирана спрямо вътрешността си. В същото време границата на венеца $\{z, 1 < |z| < 2\}$, (състояща се от окръжностите $C_0(2)$ и $C_0(1)$) ще бъде положително ориентирана спрямо него, ако има параметризацията

$$z = z(t) = \begin{cases} 2\cos t + 2i\sin t, & t \in [-\pi, \pi] \\ \sin t + \cos t, & t \in [-\pi, \pi] \end{cases}$$

Да припомним още, че ако γ е гладка крива, $z = z(t), t \in [\alpha, \beta]-$ допустима параметризация, то нейната дължина $l(\gamma)$ се дава с формулата

$$l(\gamma) = \int_\gamma ds = \int_\alpha^\beta \frac{ds}{dt}dt = \int_\alpha^\beta |z'(t)|dt. \tag{4}$$

Definition: Интеграл върху крива. $\gamma-$ е гладка крива в $\mathbb{C}, f \in C(\gamma)$, с посока от z_0 към z_T и с допустима параметризация $\gamma : z = z(t),\ t \in$

$[\alpha,\beta]$, $z(\alpha):=z_0$, $z(\beta):=z_T$, запазваща избраната посока. По дефиниция

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt,$$

като под последния интеграл разбираме интеграл в Риманов смисъл.

Естествен въпрос е дали така написаният интеграл съществува. Положителен отговор дава класическата теорема, **според която всяка непрекъсната функция върху интервала $[a, b]$ е и интегруема в смисъл на Риман върху този интервал.** Оставяме на читателя отговора на въпроса защо участващата е дефиницията функция $f(z(t))z'(t)$ е непрекъсната върху $[\alpha,\beta]$? Следните свойства произтичат от дефинициите:

Свойства:
1. При смяна на посоката на параметризацията на кривата интегралът променя знака си, т.е. ако означим с $-\gamma$ кривата γ с начална точка z_T и крайна съответно z_0, то

$$\int_\gamma f(z)dz = -\int_{-\gamma} f(z)dz.$$

2.
$$\int_\gamma (af(z)+bg(z))dz = a\int_\gamma f(z)dz + b\int_\gamma f(z)dz,\ a,b\in\mathbb{C}.$$

3. Нека γ е частично гладка крива в $\mathbb{C}, \gamma=\bigcup_{i=1}^k \gamma_i$. Тогава

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} f(z)dz.$$

Ще докажем сега, че стойността на интеграла не зависи от параметризацията на кривата на интериране.

Теорема 5.1 : *Нека γ е гладка ориентирана крива с начална и крайна точка съответно z_0 и z_T и $f\in C(\gamma)$. Нека по-нататък функцията $f(z)$ има за примитивна върху γ функция $F(z)$, която също е непрекъсната върху γ.*[1] *Нека $z_1(t), t\in[\alpha_1,\beta_1]$ и $z_2(t), t\in[\alpha_2,\beta_2]$ са две допустими*

[1] Условието за непрекъснатост на функцията $F(z)$ е съществено. Например функцията $f(z)=\frac{1}{z}$ има за примитивна върху $C_0(1)$ функцията $\log z$, която не е непрекъсната върху единичната окръжност.

параметризации, съвпадащи с избраната посока върху γ. Тогава

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(z_1(t))z_1'(t)dt = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} f(z_2(t))z_2'(t)dt = F(z_T) - F(z_0).$$

Доказателство: Ще покажем, най-напред, че ако интегрирането се извършва върху реалния интервал $[a, b], \infty < a \le b < \infty$ и F е примитивната на f върху $[a, b]$ т.е.

$$F'(t) = f(t),\, t \in [a, b], \tag{5}$$

то

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Действително, нека $f(t) = u(t) + iv(t)$, $t \in [a, b]$ и $F(t) = U(t) + iV(t)$, $t \in [a, b]$. От (4) имаме

$$U'(t) = u(t),\, V'(t) = v(t)\, t \in [a, b].$$

Тогава

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b (u(t) + iv(t))dt =$$

$$\int_a^b (U'(t) + iV'(t))dt = \int_a^b \frac{\partial(u(t) + iv(t))}{\partial t}dt = F(b) - F(a),$$

с което помощното твърдение е доказано.

Нека сега γ е гладката крива от условието на теоремата и $f \in C(\gamma)$. Нека

$$f(z_1(t)) = u_1(t) + iv_1(t),\, F(z_1(t) = U_1(t) + iV_1(t), t \in [\alpha_1, \beta_1].$$

По определение

$$U_1'(t) = u_1(t),\, V_1'(t) = v_1(t)$$

Тогава

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(z_1(t))z_1'(t)dt = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} F'(z_1)(t)z_1'(t)dt.$$

От теоремата за интегриране на съставни функции получаваме

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} F'(z_1)(t)z_1'(t)dt = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{\partial F'(z_1(t))}{\partial t}dt.$$

Прилагайки резултата предишната част, получаваме разликата $F(z_1(\alpha_1))-F(z_1(\beta_1))$, което, пак по определение, е равно на $F(z_T)-F(z_0)$. До същия резултат ще стигнем, очевидно, и при параметризацията $z = z_2(t), t \in [\alpha_2, \beta_2]$. С това теоремата е доказана. **Q.E.D.**

В бъдеще често ще използваме следната оценка

Теорема 5.2 : *Нека γ е частично гладка крива в $\mathbb{C}$ и $f \in C(\gamma)$. Тогава*

$$|\int_\gamma f(z)dz| \leq \max{}_{z\in\Gamma}|f(z)|\mathbf{l}(\gamma). \tag{6}$$

Доказателството предоставяме на читателя.

Exercises:

1. Параметризирайте триъгълника с върхове в точките $= (-1, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, i)$.
2. Като въведете подходяща параметризация, изчислете с помощта на формула (5) дължината на отсечката $[z_1,\ z_2]$ и на окръжността $C_a(\rho)$.
3. Намерете горна оценка за интеграла $\int_\Gamma \frac{e^z}{z^2+1}dz$, като Γ е окръжността $C_0(2)$, обиколена веднаж в положителна посока.

Вярно ли е , че

4. $|\int_\Gamma \frac{dz}{z^2-i}| \leq \frac{3\pi}{4}$, $\Gamma := C_0(3)$;
5. $|\int_\Gamma \frac{e^{3z}}{1+e^z}dz| \leq \frac{2\pi}{e^R-1}$, $\Gamma :=$ the segment$[R, R+2i\pi]$;
6. $|\int_\Gamma e^{\sin z}dz| \leq 1$, ако Γ е отсечката с краища $z = 0$ и $z = i$.
7. Нека f е непрекъсната комплекснозначна функция върху реалния интервал $[a, b], \infty < a \leq b < \infty$. Докажете, че

$$|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$