

FESTSTELLUNGSPRÜFUNG - HM3, Maschinenbau

SS 2013

Name

Immatrikulation:

Aufgabe 1: Sei $X \in \mathbb{R}^3$, $X = (x, y, z)^T$, $a = (a_1, a_2, a_3)^T$ und sei $S_a(R)$ die Sphäre mit Radius R und Zentrum im Punkte a , d.h.

$$S_a(R) := \{\|X - a\|_2 \leq R, R > 0\}.$$

Berechne

a) das Volumen des Körpers $K := \{X, X \notin S_2(2)\} \cap \{X, X \in S_4(4)\} \cap \{z, z \geq 0\}$. 5 P

b) den Flaechenumfang der Fläche $S := \partial K$. 5 P

Hinweis: Berechne das Volumen der Sphäre $S_a(R)$, sowie den Flächeninhalt der zugehörigen Kugel.

Aufgabe 2: Sei $X \in \mathbb{R}^3$, $X = (x, y, z)$ und $f(X) := xyz$. Gib ohne direkte Kalkulationen den Wert der Arbeit an, die das Kraftfeld f längst der Kurve $\mathfrak{C} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a, b, c > 0$ leistet. 5 P

Aufgabe 3: Gib den Wert foldenden INtegrals

$$I(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |z - re^{i\Theta}| d\Theta$$

an, wobei z fest ist und $r > 0$.

11 P

Aufgabe 4: Sei D ein Gebiet in \mathbb{R}^2 und sei die Funktion $u \in C^2(D)$. Wie bekannt, sei

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Schreibe den Laplacian Δu in Polarkoordinaten auf.

11 P

Hinweis: Schreibe die (x, y) -Koordinaten in Polarkoordinaten auf, d.h.

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \Theta, \\ y &= \rho \sin \Theta, \\ \rho &> 0, \Theta \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Aufgabe 5: Löse folgendes Anfangswertproblem (hier eine Wellengleichung)

11 P

$$\begin{aligned}u_{tt} - 4u_{xx} &= 0, & (x, t) &\in (0, \pi) \times (0, \infty), \\u(x, 0) &= \sin(2x), & x &\in (0, \pi), \\u_t(x, 0) &= 0, & x &\in (0, \pi), \\u(0, t) &= u(\pi, t), & t &\in (0, \infty)\end{aligned}$$

Berechnungsformel: $\text{Note} = 2 + \frac{\text{Punktenanzahl}}{12}$;

die Formel ist gültig bei Vorlage mindesens einer vollständig gelösten Aufgabe.