6. Интегрална теорема и Интегрална Формула на Cauchy -

Продължение

При дефиницията на непрекъснати трансформации на криви са допуснати печатни грешки. Следва да се чете:

Definition: Нека γ_i, $\gamma_i : z = z_i(t)$, $t \in [0,1]$, $i = 1, 2$, **са две гладки криви.Казваме, че** γ_1 **се получава чрез непрекъсната трансформация на** γ_2, **ако съществува функция** $z(s,t)$ **със следните свойства** :
1. $z(s,t) \in C^2([0,1] \times [0,1])$;
2. За всяка двойка $(s,t) \in ([0,1] \times [0,1]$ образът $z(s,t)$ е гладка крива;
3. Функциите $z(0,t)$ **и** $z(1,t)$ параметризират съответно кривите γ_1 **и** γ_2.[1]

Definition: едносвързана област [2] Нека $\mathcal{D}$ е област в и Γ е произволна затворена крива, лежаща изцяло в областта $\mathcal{D}$. Започваме да " свиваме кривата," **докато проста точка.** Ако при този процес Γ **остава винаги във вътрешността на** $\mathcal{D}$, без да я напуска, то областта $\mathcal{D}$ **е едносвързана или проста.**

Едносвързана област е, например, вътрешността на кръг с ненулев радиус, вътрешността и външността на затворена Жорданова крива. Лесно се установява, че границата на такова множество е затворена крива или точка (когато областа е неограничена.)множество, чиято граница се състои от n взаимно непресичащи се криви, се нарича "**n−свързано.**"

Доказателство на Интегралната Теорема на Cauchy: Нека областта D е едносвързана и $f \in \mathcal{A}(D)$. Ще покажем, че

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

[1] В случая, когато кривите $\gamma_i, i = 1, 2$ са затворени и γ_2 лежи във вътрешността на γ_1, то казваме, че γ_1 е " свита " до γ_2.

[2] **Област в разширената Гаусова равнина $\overline{\mathbf{C}}$ е всяко отворено и свързано** (в $\overline{\mathbf{C}}$) множество.

върху всеки затворен контур Γ в D.

Предполагаме в началото, че Γ е гладка затворена крива. Нека кривата γ е хомотопна на Γ и лежи изцяло във вътрешността и'. По теорема 6.3

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz. \tag{1}$$

Нека сега кривата γ "се свива "до точка, при това, очевидно,

$$l(\gamma) \to 0.$$

Съгласно Th.5.2,

$$|\int_\gamma f(z)dz| \le \|f\|_\Gamma l(\gamma) \to 0.$$

Твърдението следва сега от (1) и последната релация.

Общият случай, когато кривата е частично гладка, се свежда до предишния. За целта въвеждаме от две хомотопни криви такива че вътрешността на едната от тях съдържа докато вътрешността на съдържа втората. Интегралите по двете криви са равни. Свивайки ги една към друга, запазвайки конфигурацията, стигаме до твърдението. **Q.E.D.**

Доказателство на Теорема 6.6 Ще започнем със случая, когато $\mathcal{D}$ е двусвързана. Нека кривите γ_1, γ_2 са двете компоненти на границата и', като γ_1 е външният контур. Без да нарушаваме общността ще считаме, че [3] γ_1 и γ_2 са хомотопни. От Теорема 6.5 следва, че

$$\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz, \tag{2}$$

като при това посоките на двете криви се запазват. Нека това е универсалната положителна посока, т.е. обратна на часовниковата стрелка. От друга страна, границата на областта е ориентирана по такъв начин, че при движение по нея областта да остава от лявата страна. Това означава, че $\partial\mathcal{D} = \gamma_1 \bigcup(-\gamma_2)$. Твърдението следва от (2). **Q.E.D.**

[3] действително, в противен случай ще приближаваме двете криви с хомотопни.

Общият случай на **n**$-$ свързани области се свежда до предишния. Действително, ако свържем всички вътрешни контури с гладки взаимно непресичащи се криви, то интегралът върху получения контур ще е нула. Като вземем под внимание факта, че всяка помощна дъга се състои от два противоположни бряга и следователно интегралите върху нея се анулират взаимно, стигаме до изказаното твърдение.

Доказателство на Интегралната формула на Cauchy: Ще установим верността на твърдението в специалния случай, когато областта е кръгът $K_a(r)$ с радиус r и център в точката $z = a$. Избираме приозволно число $\rho, r > \rho > 0$ и интегрираме функцията $\frac{\zeta}{\zeta - a}$ върху контура на венеца $D_{\rho,r} := \{\zeta, \rho \leq |\zeta - a| \leq r\}$ По теорема 6.6, приложена към функцията $\frac{f(\zeta)}{\zeta - a}$ и множеството $D_{\rho,r}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_a(r)} \frac{\zeta}{\zeta - a} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_a(\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta, \tag{2}$$

като интегрирането в двата интеграла е в положителна посока - обратна на часовниковата стрелка. За втория интеграл имаме

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_a(\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a + \rho e^{i\Theta})}{\rho e^{i\Theta}} i\rho e^{i\Theta} d\Theta \to f(a),\ \rho \to 0,$$

или

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_a(r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta = f(a). \tag{3}$$

Нека сега D е област, нека $f \in \mathcal{A}(\overline{D})$ и $a \in D$. Да означим с Γ границата и'. Понеже D е отворено множество, то съществува кръг $K_a(r)$ такъв че $K_a(r) \subset D$. Очевидно $g(z) := \frac{z}{z-a} \in \mathcal{A}(D \setminus K_a(r))$. Прилагаме Th.6.6 по отношение на областта $D \setminus \overline{K}_a(r)$ и функцията $g(z)$. Ще имаме

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} g(z) dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=r} g(z) dz,$$

като посоката на интегриране в двата интеграла е положителна. От първата част на доказателството знаем, че интегралът отдясно е равен на стојността на функцията $f(z)$ в точката $z = a$, откъдето получаваме

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{z}{z - a} dz. \qquad \textbf{Q.E.D.}$$

Оставяме на читателя да покаже, че теоремата е вярна и когато $f \in \mathcal{A}(D) \bigcap C(\overline{D})$.

Като приживение ще докажем

6.7: **Теорема за средната стойност на хармоничните функции.** *Нека функцията* h *е хармонична в кръга* $K_a(R)$. *Тогава е в сила представянето*:

$$h(a) = \frac{1}{2pi} \int_0^{2\pi} h(a + Re^{i\Theta}) d\Theta. \tag{4}$$

Доказателство : Да припомним, като начало, че реалната и имагинерната компонента на аналитична функция са две комплексно спрегнати хармонични функции. Нека h е реалната компонента на функцията $f(z) \in \mathcal{A}(K_a(R)) \bigcap C(K_a(R))$. С други думи,

$$f(f) = h(z) + ik(z),\ z \in K_a(R).$$

От формула (3) имаме

$$h(a) + ik(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_a(R)} \frac{h(\zeta) + ik(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{h(a + Re^{i\Theta}) + ik(a + Re^{i\Theta})}{Re^{i\Theta}} iRe^{i\Theta} d\Theta.$$

След съкращаване на подходящите множители получаваме представянето (4). **Q.E.D.**

Exercises:

6. Пресметнете

$$\int_\Gamma \frac{2z^2 - z + 1}{(z-1)^2(z+1)} dz$$

като контурът на интегриране Γ е "осмицата" с център в нулата и съдържаща точките ± 1 във вътрешността си.

7. Нека

$$I := \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2(z-1)^2}.$$

Докажете, че

$$I = 0,$$

като следвате разсъжденията

a)
$$I(R) := \oint_{|z|=R} \frac{dz}{z^2(z-1)^2}.$$

b)
$$|I(R)| \le \frac{2\pi}{R(R-1)^2} \text{за} R > 2.$$

c)
$$\lim I(R) = 0,\ R \to \infty.$$