Потенциал - дефиниция, основни свойства.

Като начало ще се спрем върху понятието "борелева мярка."

6. Борелева мярка

Понятието "мярка на Борел " (Борелева мярка) има фундаментален характер в класическия функционален анализ, както и във всички съвременни математически направления, произлезли от него. В рамките на настоящия курс ще се ограничим с основните дефиниции и някои от най-известните свойства.

Definition: Нека X е топологично пространство в $\mathbb{C}$ и нека $\mathcal{B}(X)$ е Борелевата $\sigma-$алгебра спрямо въведената топология (в X.) Борелева мярка μ ще наричаме всяка положителна счетно-адитивна функция, дефинирана в $\mathcal{B}(X)$[1] и крайна върху компактните множества в X.([1], [2]).

Казваме, че мярката *μ е съсредоточена върху множеството S*, ако всяка точка $x \in S$ притежава околност V (т.е. отворено множество в топологията на X) такава, че

$$\mu(V) > 0.$$

Ще наричаме S "*носител*" и ще го означаваме с $\operatorname{supp}(\mu)$.
Теорема 6.1, [3] *Нека μ е Борелева мярка . Тогава носителят* supp *на μ е компактно множество и е най - малкото множество, за което*

$$\mu(X \setminus S) = 0.$$

Доказателство Нека $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$е едно изброимо покритие на X. От дефиницията на носител следва, че съществува подредица от отворени множества $\{U_i\}_{i \in I}$,такива, че

$$X \setminus \operatorname{supp}(\mu) = \bigcup_{i \in I} (U_i,\, \mu(U_i) = 0;\, i \in I).$$

[1] $\mu(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, A_i $-$ open sets,$i = 1, 2, \cdots, A_i \bigcap A_j = \delta_{i,j}$.В общия случай $\mu(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Действително, предположението, че

$$X \setminus \operatorname{supp}(\mu) \subset \bigcup_{i \in I}(U_i,\, \mu(U_i) = 0;\, i \in I)$$

означава, че съществува точка $x_0 \in \operatorname{supp}(\mu)$, $x_0 \in \bigcup_{i \in I}(U_i,\, \mu(U_i) = 0;\, i \in I)$. Последното противеречи на дефиницията за носител. В частност, оттук следва, че $\operatorname{supp}(\mu)$ е затворено множество.

Нека сега F е множество в X, за което

$$\mu(X \setminus F) = 0.$$

Но тогава, очевидно,

$$X \setminus F \subset \bigcup_{i \in I}(U_i,\, \mu(U_i) = 0;\; i \in I),$$

следователно $X \setminus F \subset X \setminus \operatorname{supp}(\mu)$ и $\operatorname{supp}(\mu) \subset F$. **Q.E.D.**

Преди да продължим, ще въведем понятието *финитна функция.* ([1]).

Definition: Нека *ϕ е скаларна функция, дефинирана в* X по следния начин : *съществува множество $K \subset X$, такова, че*

$$\phi(z) = 0, z \in X \setminus K.$$

Функцията е финитна, ако K е компактно множество и $\phi \in C(K)$. Най-малкото множество $\mathcal{K}$ такова, че

$$\phi(z) = 0, z \in X \setminus \mathcal{K}$$

се нарича *носител на функцията* ϕ; означава се с $S(\phi)$.

Множеството на Борелевите мерки ще означаваме с $\mathcal{M}(X) := \mathcal{M}_X$, а това на финитните функции - с $\Phi(X) := \Phi$; Φ^+ е множеството на неотрицателните финитни функции.

Ще разгледаме следната конфигурация: Нека $f \in \Phi^+$. Тогава интегралът [2]

$$\nu(e) := \int_e f(x)dx$$

[2] Integral of Lebesque

поражда еднозначно (с точност до еквивалентност) мярка $\nu \in \mathcal{M}_X$. Такава мярка се нарича*абсолютно непрекъсната,* а функцията f - нейна *плътност.*[3]

В нашите по - нататъшни разглеждания ще се ограничим с абсолютно непрекъснати Борелеви мерки.

Definition: *Редицата* $\{\mu_n\}$*от Борелеви мерки е слабо сходяща и клони към мярката* μ*, ако за всяка финитна функция* $f \in \Phi$

$$\int f(x)d\mu_n \to \int f(x)d\mu,\ n \to \infty.$$

Слабата сходимост се означава по следния начин:[4]

$$\mu_n \longrightarrow \mu,\ n \to \infty.$$

Полезна е следната теорема

Теорема 6.2 *Нека* $f \geq 0$ *е полунепрекъсната отдолу функция. Тогава, ако*

$$\mu_n \longrightarrow \mu,\ \mu_n \in \mathcal{M}_X$$

то

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f(x)d\mu_n \geq \int_X f(x)d\mu. \qquad (1)$$

Доказателство Както знаем, функцията може да се представи като граница на монотонно растяща редица от непрекъснати финитни функции, т.е.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),\ f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \cdots f(x).$$

От неравенството

$$\int f(x)d\mu_n \geq \int f_m(x)d\mu_n$$

[3]Обратно, ако $\nu \in \mathcal{M}_X$, то $\int_{\mathrm{supp}(\nu)} f(x)dx$ представлява линеен положителен функционал в пространството Φ^+; лесно се доказва неговата непрекыснатост.

[4]Освен слабата сходимост се въвежда и т.н. силна сходимост, когато $\|\mu_n - \mu\| \to 0,\ n \to \infty$.
Норма на мярка :

$$\|\mu\| := \mu(\ \mathrm{supp}(\mu)).$$

получаваме след граничен преход по n

$$\liminf_{n\to\infty} \int f(x)d\mu_n \geq \int f_m(x)d\mu.$$

Оттук при $m \to \infty$ получаваме (1). **Q.E.D.**

Corollary 6.3 *Ако*

$$\mu_n \longrightarrow \mu,\ \mu_n \in \mathcal{M}_X$$

и Ω е отворено множество в X, то

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(\Omega) \geq \mu(\Omega).$$

Следното твърдение е аналогично

Corollary 6.4 *Ако*

$$\mu_n \longrightarrow \mu,\ \mu_n \in \mathcal{M}_X$$

и K е компактно множество в X, то

$$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(K) \leq \mu(K).$$

Доказателствата следват от своjствата на характеристичните функции на двете множества - вж. гл. "супер/субхармонични функции."

Corollary 6.3 and 6.4 and водят до следните основни неравенства:

Corollary 6.5 *Нека $E \subset \mathbb{C}$ и $\mu_n \longrightarrow \mu$. Тогава*

$$\mu(E^o) \leq \liminf \mu_n(E^o) \leq \limsup \mu_n(\overline{E}) \leq \mu(\overline{E}).$$

Ще отбележим, че ако $\mu(\overline{E} \setminus E^o) = 0$, то

$$\mu(E_n) \to \mu(E).$$

[5]

[5]Такива мерки се наричат регулярни.

Ще приведем теоремата на Хели (**Helly's selection theorem**).

Теорема 6.6 *Ако* K *е компактно множество и* $\mu_n, n = 1, 2, \cdots$ *е редица от мерки* $\in \mathcal{M}_X$, *съсредоточени върху* K *и такива, че*

$$\mu_n(K) \leq C, n = 1, 2, \cdots,$$

то съществува слабо сходяща подредица μ_{n_k}, $k = 1, 2, \cdots$.,

Идея за Доказателство Действително, нека $\{f_n\}$ редица от финитни функции с носител K, навсякъде гъста в $C(K)$. Нека μ_{n_1} е такава подредица на първоначално дадената редица μ_n, че редицата $\int f_1(x) d\mu_{n_1}(x)$, $n_1 \to \infty$ е сходяща. По - нататък, μ_{n_2} нека е подредица на μ_{n_1}, за която $\int f_2(x) d\mu_{n_2}(x)$, $n_2 \to \infty$ е сходящ. По построение, редицата $\int f_1(x) d\mu_{n_2}(x)$, $n_2 \to \infty$също е сходяща. И така продължаваме -

$$\{\mu_{n_k}\} \subset \{\mu_{n_{k-1}}\} \subset \cdots \{\mu_{n_1}\}, :$$

$$\int f_k(x) d\mu_{n_k}(x) < \infty, \;\; n_k \to \infty \text{ and} \int f_l(x) d\mu_{n_k}(x) < \infty, \, l = 1, 2, \cdots, k.$$

По този начин стигаме до редица μ_{n_n}, за която $\{\int f_m(x) d\mu_{n_n}(x)\}$ е сходящ за всяко m, $n_n \to \infty$.

Нека сега $f \in \Phi(K)$ и нека $f = \lim f_{m_l}$, $\{f_{m_l}\} \subset \{f_n\}$. Ще покажем, че редицата $\int f d\mu_{n_n}$ е фундаментална.[6] Имаме

$$|\int f d\mu_{n_n} - \int f d\mu_{n+k_{n+k}}|$$

$$\leq |\int (f - f_{m_l}) d\mu_{n_n}| + |\int (f - f_{m_l}) d\mu_{n+k_{n+k}}| +$$

$$+ |\int f_{m_l} d(\mu_{n_n} - \mu_{n+k_{n+k}})|.$$

От досегашните разглеждания е ясно, че горната разлика е произволно малка всеки път, когато числото n е достатъчно голямо. С това теоремата на Хелли е доказана. **Q.E.D.**

[6]Редицата $\{a_n\}$ е фундаментална, ако за всяко $\varepsilon < 0$

$$|a_n - a_{n+k}| < \varepsilon$$

всеки път, когато n е достатъчно голямо, $k > 0$. С други думи, разликата $a_n - a_{n+k}$ е бязкрайно малка за достатъчно големи n. По класическата теорема на Cauchy една редица е сходяща тогава и само тогава, когато е фундаментална.

References

[1] N. S. Landkov, Foundations of modern potential theory, "Nauka", Moscow, 1966, first edition.

[2] Kolmogorov, Theory of functions,

[3] T. Runsford, Potential theory.