3. Позитивни хармонични функции

Теорема 3.1., Неравенства на Harnack[1] *Нека* $h \in \mathcal{H}(\Delta(w,\rho))$ *и освен това, нека* $h(z) > 0$ *навсякъде върху* $\Delta(w,\rho)$. *Тогава за всяко* $z \in \Delta(w,\rho)$, $z = w + re^{it}$ *са в сила оценките*

$$h(w)\frac{\rho - r}{\rho + r} \leq h(z) \leq h(w)\frac{\rho + r}{\rho - r}. \tag{1}$$

Доказателство По формулата на Поасон за хармонични функции (**Th. 2.3**)

$$h(z) = \frac{1}{2\pi}\oint_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - |z|^2}{\rho^2 + |z|^2 - 2\cos(\theta - t)} h(w + \rho e^{i\theta})d\theta.$$

Тъй като

$$\frac{\rho^2 - |z|^2}{\rho^2 + |z|^2 - 2\cos(\theta - t)} \leq \frac{\rho^2 - |z|^2}{(\rho - |z|)^2} =$$
$$= \frac{\rho - r}{\rho + r},$$

то от позитивността на разглежданата функция, както и теоремата за средните стойности (Th. 1.2) $h(z)$ следва дясната оценка в (1). По аналогичен начин се получава и лявата страна на неравенството на Harnack. **Q.E.D.**

От неравенствата на Харнак следва важни теореми.

Теорема 3.2. Теорема на Liouville.[2] *Ако функцията* h *е хармонична в цялата равнина и ограничена отгоре и отдолу, то тя е тъждествена константа.*

Доказателство Без да нарушаваме общността можем да считаме, че $h(z) > 0$навсякзде в равнината. Дејствително, ако $m < z(z) < M$, то ще разгледане $h(z) - m$. По (1), приложено спрямо $w = 0, \Delta\rho)$ за всаыко $z\,|z| < \rho$,

$$h(0)\frac{\rho + r}{\rho - r} \leq h(z) \leq h(0)\frac{\rho + r}{\rho - r}.$$

Твърдението следва веднага, ако оставим $\rho \to \infty$. **Q.E.D.**

[1] *T. Harnack, 1817–1889*
[2] *Joseph Liouville, 1809 - 1882.*

Теорема 3.3. Теорема на Harnack. *Ако редицата от хармонични в областта D функции $\{h_n\}$ е е монотонно растяща, т.е. $h_n(z) \geq h_{n-1}(z), n = 1, 2, \cdots, z \in D$, то или h_n клони равномерно към хармонична функция или дивергира равномерно към ∞ взрху компактни подмножества на D.*

Доказателство Без да нарушаваме общността считаме, че $\Delta(0, \rho) \subset D$. От неравенства на Харнак получаваме

$$(h_n(0) - h_1(0))\frac{|z| - 1}{|z| + 1} \leq (h_n(z) - h_1(z) \leq (h_n(0) - h_1(0))\frac{|z| + 1}{|z| - 1}, \; n = 1, 2, \cdots \tag{2}$$

Ако числовата редица $(h_n(0) - h_1(0))$ дивергира към ∞, то очевидно и $\{h_n(z)\}$ ще има това свойство. Затова, нека $h_n(0) - h_1(0)$, а с това и $h_n(0)$ е ограничена. Тогава, както знаем, монотонно растящата редица $h_n(z)$ е сходяща.Фиксираме сега произволно компактно подмножество K на $\Delta(0, \rho)$. Върху това множество изразите $\frac{|z|-1}{|z|+1}, \frac{|z|+1}{|z|-1}$са очевидно ограничени. От друга страна, редицата $h_n(0) - h_1(0)$ е фундаментална, поради сходимостта. Отчитайки това, виждаме от (2), че фундаментална върху K е и редицата $\{h_n(z)\}$. Но тогава $\{h_n(z)\}$ е равномерно сходяща върху K (теореми на Weierstraß.) Хармоничността на граничната функция следва веднага от теоремата за средните стойности. **Q.E.D.**

Exercise 1. Нека $h \in \mathcal{H}(\Delta(0, \rho))$ е позитивна. Тогава

$$|\Delta h(0)| \leq \frac{2}{\rho} h(0).$$

Използвайте това неравенство, за да покажете, че

$$|\Delta h(z)| \leq \frac{2\rho}{\rho^2 - |z|^2} h(z), \; |z| < \rho.$$

Exercise 2. $h \in \mathcal{H}(\overline{\Delta}(0, \rho)$. За $0 \leq r \leq \rho$ дефинираме

$$M_h(r) := \sup_{|z|=r} h(z).$$

Докажете, че

$$M_h(r) \leq \frac{2r}{\rho + r} M_h(\rho) + \frac{\rho - r}{\rho + r} h(0).$$

Оттук докажете обобщение на теоремата на Лиувил, именно: ако $h \in \mathcal{H}(C)$ и удовлетворява неравенството

$$\liminf \frac{M_h(\rho)}{\rho} \leq 0,$$

то $h \equiv Const$.
Exercise 3. $f \in \mathcal{A}(\overline{\Delta}(0, \rho)$. За $0 \leq r \leq \rho$ дефинираме

$$M_f(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)| \text{и} A_f(r) := \sup_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z).$$

Докажете неравенството на Borel-Caratheodory

$$M_f(r) \leq A_f(\rho) \frac{2r}{\rho - r} + \frac{\rho + r}{\rho - r} |f(0)|.$$