Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

o-МЕТРИКИ И ПРОСТРАНСТВА БЛИЗОСТИ. МЕТРИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ БЛИЗОСТИ

СТОЯН Й. НЕДЕВ, МИТРОФАН М. ЧОБАН

В работе С. Й. Недева, М. М. Чобана, 1972, введено понятие o-метрики над шкалой и раскрыты тесные связи этого понятия как с самой проблемой метризации топологических пространств, так и со всей теорией, возникшей на пути к решению этой проблемы.

В настоящей работе показано, что небольшое усовершенствование (точнее — обобщение) понятий шкалы и o-метрики над шкалой позволяет охватить с единой точки зрения теорию равномерных пространств, пространств близости и топологических пространств.

Работа состоит из четырех параграфов. В первом параграфе введены основные понятия и раскрыты некоторые существующие между ними связи. Во втором параграфе выясняется метрическая сущность аксиом пространства близости (введенных В. А. Ефремовичем [2]), что со своей стороны помогло авторам, в третьем параграфе, простыми примерами показать их независимость. Четвертый параграф посвящен проблеме метризации пространств близости и ее естественному обобщению. Здесь приведены и доказательства результатов, заявленных авторами в [3].

1. Шкалы и o-метрики над шкалами. Упорядоченную тройку (E, O, V_E), где E — множество, O — непустое его подмножество, а V_E — семейство подмножеств множества E, будем называть *g-шкалой*, если $O=\cap\{v/v\in V_E\}$.

Если для любых двух элементов $u, v\in V_E$ существует $w\in V_E$ такой, что $w\subset u\cap v$, то g-шкала (E, O, V_E) называется *шкалой*.

g-шкалу (E, O, V_E) будем называть *gM-шкалой*, если на E определены операция суммы „$+$“ двух элементов из E и неравенство „$\leqq$“, удовлетворяющие аксиомам:

1) $a+0=0+a=a$ для любых $a\in E$ и $0\in O$;
2) если $a\leqq b$ и $b\leqq a$, то $a=b$;
3) если $a\leqq a_1$ и $b\leqq b_1$ то $a+b\leqq a_1+b_1$;
4) для любого $w\in V_E$ существует $v\in V_E$ такой, что $v+v\subset w$;
5) для любого $v\in V_E$ существует $w\in V_E$ такой, что из $a\leqq c\leqq b$ и $a, b\in w$ следует $c\in v$. Для краткости элемент v будем называть *w-заполненным*.

Если gM-шкала является шкалой, то будем называть ее *M-шкалой*.

Если $|V_E|=\mathrm{card}(V_E)\leqq\theta$, то g-шкалу (E, O, V_E) будем называть *θ-g-шкалой*. Аналогично определяются понятия *θ-gM-шкалы*, *θ-шкалы*, *θ-M-шкалы*.

Пусть $\{(E_\alpha, O_\alpha, V_{E_\alpha})/\alpha \in A\}$ — семейство g-шкал. Положим $E = \Pi\{E_\alpha/\alpha \in A\}$, $O = \Pi\{O_\alpha/\alpha \in A\}$, $V'_E = \{v_\alpha \times \Pi\{E_\beta/\beta \in A \setminus \{\alpha\}/v_\alpha \in V_{E_\alpha}, \alpha \in A\}$ и

$$V_E = \left\{\prod_{i=1}^{n} v_{\alpha_i} \times \Pi\{E_\alpha/\alpha \in A \setminus \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}/v_{\alpha_i} \in V_{E_{\alpha_i}}, \alpha_i \in A, i = 1, 2, \ldots, n; n = 1, 2, \ldots\right\}.$$

Тройка (E, O, V'_E) называется g-произведением g-шкал $(E_\alpha, O_\alpha, V_{E_\alpha})$, а тройка (E, O, V_E) называется их тихоновским произведением.

Справедливо утверждение: g-произведение не более чем θ θ-g-шкал (θ-gM-шкал) является θ-g-шкалой (θ-gM-шкалой).

Тихоновское произведение не более чем θ θ-шкал (θ-M-шкал) является θ-шкалой (θ-M-шкалой).

Действительная прямая R является M-шкалой, где $O = \{0\}$ и $V_R = \left\{\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)/n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$. g-произведение θ-экземпляров шкал вида $(R, 0, V_R)$ будем называть тихоновской θ-gM-шкалой, а тихоновское проиведение θ экземпляров $(R, 0, V_R)$ будем называть тихоновской θ-M-шкалой или тихоновским θ-полуполем (см. [1, 4]).

Пусть X — множество и (E, O, V_E) — g-шкала. Отображение $\varrho: X \times X \to E$ будем называть $g\sigma$-метрикой на множестве X над шкалой (E, O, V_E), если $\varrho(x, x) \in O$ для каждой точки $x \in X$.

Множество X вместе с заданной на нем $g\sigma$-метрикой ϱ будем обозначать символом $\{X, \varrho, (E, O, V_E)\}$ и называть $g\sigma$-метрическим пространством над шкалой (E, O, V_E).

Если $A \subset X$ и $v \in V_E$, то положим $\mathfrak{O}_v^\varrho(A) = \{x \in X/\varrho(y, x) \in v$ для некоторого $y \in A\}$. Если $A \subset X$ и $B \subset X$ и для некоторого $v \in V_E$ имеем $\mathfrak{O}_v^\varrho(A) \cap B = \emptyset$, то будем писать $\varrho[A, B] \geq v$ или $\varrho[A, B] > 0$.

Таким образом, $\varrho[A, B] > 0$ обозначает, что $\mathfrak{O}_v^\varrho(A) \cap B = \emptyset$ для некоторого $v \in V_E$. Если же $\mathfrak{O}_v^\varrho(A) \cap B \neq \emptyset$ для любого $v \in V_E$, то будем писать $\varrho[A, B] = 0$.

Накладывая на $g\sigma$-метрику или на шкалу, над которой происходит $g\sigma$-метризация (или на обоих одновременно) ограничения разного типа, мы получаем возможность выделять разные классы σ-метрических пространств, обладающих, вообще говоря, разными свойствами.

Однако, для нас особенно важно подчеркнуть, что на этом пути можно получить описание с единой точки зрения таких важных понятий как понятия топологической структуры, равномерной структуры и структуры близости на данном множестве. Этому описанию и посвящена настоящая работа, причем надо отметить, что сами понятия равномерности и близости мы рассматриваем, в конце концов, как средства для изучения топологии, а общее понятие $g\sigma$-метрики — как универсальный „код", с помощью которого не только записываем аксиомы структур близости и равномерности, но и выясняем метрическую сущность и роль каждой из этих аксиом в отдельности.

Для этих целей рассмотрим следующие ограничения.

Аксиома ($d_п$). *Для любых $A \subset X$, $u, v \in V_E$ существует $w \in V_E$ такой, что* $\mathfrak{O}_w^\varrho(A) \subset \mathfrak{O}_u^\varrho(A) \cap \mathfrak{O}_v^\varrho(A)$.

Аксиома ($d_л$). *Для любых $A \subset X$, $B \subset X$, u, $v \in V_E$ существует* $w \in V_E$ такой, что $\mathfrak{O}_w^\varrho(A \cup B) \subset \mathfrak{O}_u^\varrho(A) \cup \mathfrak{O}_v^\varrho(B)$.

Аксиома (рП). *Для любого $u \in V_E$ существует $v \in V_E$ такой, что* $\mathfrak{O}_v^\varrho(\mathfrak{O}_v^\varrho(\{x\})) \subset \mathfrak{O}_u^\varrho(\{x\})$ *для каждой точки* $x \in X$.

Аксиома (П). *Для любых $x \in X$ и $u \in V_E$ существует $v \in V_E$, для которого* $\mathfrak{O}_v^\varrho(\mathfrak{O}_v^\varrho(\{x\})) \subset \mathfrak{O}_u^\varrho(\{x\})$.

Аксиома (δП). *Для любых $A \subset X$, $u \in V_E$ существуют v, $w \in V_E$, дел которого* $\mathfrak{O}_w^\varrho(\mathfrak{O}_v^\varrho(A)) \subset \mathfrak{O}_u^\varrho(A)$.

Аксиома (Δ). $\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$ *для любых* $x, y, z \in X$.

Аксиома (с). $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ *для любых* $x, y \in X$.

Пусть $\{X, \varrho, (E, O, V_E)\}$ go-метрическое пространство. Тогда:

1°. Если (E, O, V_E) — шкала, то ϱ называется o-метрикой, а $\{X, \varrho, (E, O, V_E)\}$ — o-метрическим пространством.

2°. Если ϱ удовлетворяет аксиомам $d_п$ и $d_л$, то ϱ называется do-метрикой.

3°. Если (E, O, V_E) — gM-шкала, а ϱ неотрицательна и удовлетворяет аксиоме (Δ), то ϱ называется $g\Delta$-метрикой.

4°. Если ϱ является и do-метрикой, и $g\Delta$-метрикой, то ϱ называется $d\Delta$-метрикой.

5°. Если ϱ удовлетворяет аксиоме (с), то ϱ называется g-симметрикой.

6°. Если ϱ — g-симетрика и $g\Delta$-метрика, то ϱ называется g-метрикой.

7°. Если ϱ — и g-симметрика, и $d\Delta$-метрика, то ϱ называется d-метрикой.

8°. Если ϱ — и g-симметрика, и do-метрика, то ϱ называется d-симметрикой.

9°. Если o-метрика, ϱ является соответственно g-симметрикой, $g\Delta$-метрикой или g-метрикой, то ϱ называется соответственно симметрикой, Δ-метрикой или метрикой, а $\{X, \varrho, (E, O, V_E)\}$ называется соответственно симметрическим, Δ-метрическим или метрическим пространством над шкалой (E, O, V_E).

Лемма 1. 1°. *Всякая o-метрика является do-метрикой.*

2°. *Всякая симметрика является d-симметрикой.*

3°. *Всякая Δ-метрика является $d\Delta$-метрикой.*

4°. *Всякая метрика является d-метрикой.*

Лемма 2. *Любая $g\Delta$-метрика удовлетворяет аксиоме* (рП). *Справедливы еще импликации* (рП) $\rightarrow$ (δП) $\rightarrow$ (П).

Лемма 3. *Всякая g-метрика является $g\Delta$-метрикой. Следовательно, всякая g-метрика удовлетворяет* (рП).

Доказательства приведенных утверждений тривиальны, и мы их опускаем.

Пусть X — множество. o-равномерной структурой на X мы будем называть любое семейство $\mathfrak{A}$ подмножеств $X \times X$, удовлетворяющее условиям:

1) $D(X) = \{(x, x)/x \in X\} \subset \cap \{U/U \in \mathfrak{A}\}$, т. е. каждый элемент $\mathfrak{A}$ является окружением диагонали.

2) Если $u, v \in \mathfrak{A}$, то $u \cap v \in \mathfrak{A}$.

3) Если $u \supset v$ и $v \in \mathfrak{A}$, то и $u \in \mathfrak{A}$.

Традиционным образом определяется понятие базы o-равномерной структуры: Отметим, что понятия o-метрики и базы o-равномерной структуры фактически идентичны. Именно, если $\varrho : X \times X \to (E, O, V_E)$ o-метрика, то семейство окружений $\mathfrak{A}(\varrho) = \{u \subset X \times X / u \supset \varrho^{-1}(v)$ для некоторого $v \in V_E\}$ является, очевидно, o-равномерной структурой с базой $\{\varrho^{-1}(v) / v \in V_E\}$. Если же V — база o-равномерной структуры $\mathfrak{A}$ на X, то полагая $O = \cap \{v / v \in V\}$, находим, что $\{X \times X, O, V\}$ является шкалой. Обозначим через $e : X \times X \to X \times X$ — идентитет. Тогда $\{X, e, (X \times X, O, V)\}$ — o-метрическое пространство, причем $\mathfrak{A}(e) = \mathfrak{A}$. В этом и состоит эквивалентность понятий o-метрики над шкалой и базы o-равномерной структуры.

Отметим, что если V — произвольное семейство окружений, то $(X \times X, O, V)$ является g-шкалой, а e — go-метрикой над ней.

Пусть $\{X, \varrho, (E, O, V_E)\}$ — go-метрическое пространство. Для каждого $A \subset X$ положим $[A]^1_\varrho = \{x \in X / \varrho[\{x\}, A] = 0\}$ и $[A]^\alpha_\varrho = [\cup \{[A]^\beta_\varrho / \beta < \alpha\}]^1_\varrho$ для любого ординального числа α.

go-метрика ϱ называется с и л ь н о й, если $[A]^2_\varrho = [A]^1_\varrho$ для любого множества $A \subset X$.

Две go-метрики ϱ_1 и ϱ_2 на X называются э к в и в а л е н т н ы м и, если $[A]^1_{\varrho_1} = [A]^1_{\varrho_2}$ для любого множества $A \subset X$.

go-метрики ϱ_1 и ϱ_2 на X называются δ-э к в и в а л е н т н ы м и, если для любых двух множеств $A, B \subset X$ $\varrho_1[A, B] = 0$ тогда и только тогда, когда $\varrho_2[A, B] = 0$.

go-метрики ϱ_1 и ϱ_2 будем называть р а в н о м е р н о э к в и в а л е н т н ы м и, если $\mathfrak{A}(\varrho_1) = \mathfrak{A}(\varrho_2)$.

Л е м м а 4. *Если go-метрики ϱ_1 и ϱ_2 равномерно эквивалентны, то они и δ-эквивалентны. Если go-метрики ϱ_1 и ϱ_2 δ-эквивалентны, то они и эквивалентны.*

Л е м м а 5. *Пусть ϱ_1 и ϱ_2 — δ-эквивалентные go-метрики. Если одна из них является do-метрикой, то такой же является и другая.*

С л е д с т в и е 1. Если go-метрика ϱ δ-эквивалентна некоторой o-метрике над шкалой, то ϱ является do-метрикой.

Л е м м а 6. *Если go-метрика ϱ δ-эквивалентна некоторой g-симметрике, то из $\varrho[A, B] = 0$ вытекает $\varrho[B, A] = 0$.*

Л е м м а 7. *Если go-метрика ϱ δ-эквивалентна некоторой go-метрике ϱ_1, удовлетворяющей аксиоме* ($\delta\Pi$), *то и ϱ удовлетворяет аксиоме* ($\delta\Pi$).

С л е д с т в и е 2. Если go-метрика ϱ δ-эквивалентна некоторой $g\Delta$-метрике, то ϱ удовлетворяет условию ($\delta\Pi$).

Теперь укажем общий способ построения go-метрик и o-метрик.

П с е в д о-o-м е т р и к о й ϱ на X называется любое неотрицательное отображение $\varrho : X \times X \to R$, для которого $\varrho(x, x) = 0$. Аналогично определяются понятия п с е в д о-Δ-м е т р и к и, п с е в д о с и м м е т р и к и и п с е в д о м е т р и к и.

Пусть $\mathfrak{P} = \{\varrho_\alpha / \alpha \in A\}$ — некоторое семейство псевдо-o-метрик на X. Семейство $\mathfrak{P}$ порождает некоторую go-метрику и некоторую o-метрику на X следующим образом: Пусть $(R^A, 0, V_A)$ — g-произведение $|A|$ экземпляров действительных M-шкал и $\varrho : X \times X \to R^A$ определена по правилу:

$\varrho(x, y)=\{\varrho_\alpha(x, y)/\alpha\in A\}$ для любых двух точек $x, y\in X$. Очевидно, ϱ является go-метрикой на X, определяющей go-метрическое пространство $\{X, \varrho, (R^A, 0, V'_A)\}$, о котором будем говорить, что оно (как и go-метрика ϱ) порождено семейством $\mathfrak{P}$.

Если же $(R^A, 0, V_A)$ — тихоновское произведение $|A|$ экземпляров действительных M-шкал, то $\{X, \varrho, (R^A, 0, V_A)\}$ является, очевидно, o-метрическим пространством, о котором мы также будем говорить, что оно порождено семейством $\mathfrak{P}$.

Следует отметить, что go-метрика и o-метрика, порожденные семейством псевдо-o-метрик $\mathfrak{P}$, вообще говоря, не эквивалентны. Если они δ-эквивалентны, то семейство $\mathfrak{P}$ будем называть правильным.

Отметим еще, что если все ϱ_α являются псевдосимметриками, то ϱ является симметрикой, если все ϱ_α являются псевдо-Δ-метриками, то ϱ удовлетворяет аксиоме (Δ).

Предложение 1. *Пусть семейство псевдо-o-метрик* $\mathfrak{P}=\{\varrho_\alpha/\alpha\in A\}$ *удовлетворяет условию:* (s): *для любых* $\alpha, \beta\in A$ *существует* $\gamma\in A$ *такой, что* $\varrho_\gamma(x, y)\geqq\max(\varrho_\alpha(x, y), \varrho_\beta(x, y)\}$ *для каждой пары точек* $x, y\in X$. *Тогда go-метрика и o-метрика, порожденные семейством* $\mathfrak{P}$, *равномерно эквивалентны.*

Пусть $\mathfrak{P}$-семейство псевдо-o-метрик. Обозначим через $\mathfrak{P}_s$ всевозможные конечные суммы элементов из $\mathfrak{P}$. Ясно, что $\mathfrak{P}_s\supset\mathfrak{P}$ и $|\mathfrak{P}_s|=|\mathfrak{P}|+\aleph_0$. Легко заметить, что $\mathfrak{P}_s$ всегда удовлетворяет условию (s).

Предложение 2. а) *o-метрика, порожденная семейством* $\mathfrak{P}_s$, *равномерно эквивалентна o-метрике, порожденной семейством* $\mathfrak{P}$.

б) *Если go-метрика и o-метрика, порожденные семейством* $\mathfrak{P}$, *равномерно эквивалентны, то go-метрики, порожденные семействами* $\mathfrak{P}$ *и* $\mathfrak{P}_s$, *равномерно эквивалентны.*

в) *go-метрика, порожденная семейством* $\mathfrak{P}_s$, *является do-метрикой.*

Теорема 1. а) *Всякая* θ*-go-метрика* ϱ *равномерно эквивалентна некоторой* θ*-go-метрике d, порожденной некоторым семейством псевдо-o-метрик. Если* ϱ *есть g-симметрика, то и d является g-симметрикой. Если* ϱ *есть g-метрика, то такова же и d.*

б) *Всякая o-метрика* ϱ *равномерно эквивалентна некоторой o-метрике d, порожденной некоторым семейством псевдо-o-метрик* $\mathfrak{P}$, *удовлетворяющим условию* (s). *Если* ϱ*-симметрика или метрика, то такова же и d.*

В самом деле, если $\varrho: X\times X\to(E, O, V_E)$, то мы рассмотрим семейство псевдо-o-метрик $\{\varrho_v/v\in V_E\}$, где для каждого $v\in V_E$ и для любых $x, y\in X$

$$\varrho_v(x, y)=\begin{cases}0, & \text{если } \varrho(x, y)\in v,\\ 1, & \text{если } \varrho(x, y)\notin v.\end{cases}$$

Итак, понятия go-метрики и семейства псевдо-o-метрик фактически эквивалентны. И все таки, на наш взгляд, понятие go-метрики более удобно в целях классификации топологических пространств из-за возможности довольно естественным образом накладывать ограничительные условия не только на o-метрику, но и на шкалу, над которой происходит метризация.

Пусть $\{X, \varrho, (E, O, V_E)\}$ — go-метрическое пространство. Множество $F\subset X$ назовем замкнутым, если $F=[F]^1_\varrho$, а множество U — открытым, если $X \setminus U$ — замкнуто. Совокупность всех открытых подмножеств обозначим через τ_ϱ.

П р е д л о ж е н и е 3. *Если ϱ удовлетворяет аксиоме $(d_п)$, то τ_ϱ является топологией, т. е. $\emptyset \in \tau_\varrho$, $X \in \tau_\varrho$, объединение любого числа элементов из τ_ϱ является элементом τ_ϱ и пересечение конечного числа элементов из τ_ϱ является элементом τ_ϱ.*

С л е д с т в и е 3. Если ϱ — o-метрика над шкалой, то τ_ϱ — топология.

Этим мы заканчиваем первый параграф. Доказательства, содержащихся в нем утвержданий, просты и потому мы их опустили.

2. Близости. В работе В. А. Е ф р е м о в и ч а [2] введено понятие пространства близости. Как показали дальнейшие исследования Ю. М. Смирнова, В. А. Ефремовича и других (см. библиографию в книге) С. А. Н а и м п а л л и и Б. Д. В а р р а к [5], или в книге З. М а м у з и ч а [6]), это понятие оказалось замечательным инструментом для изучения свойств топологических пространств и их бикомпактных расширений.

Цель настоящего параграфа — показать, что структура близости — это ничто иное как go-метрика, удовлетворяющая некоторым дополнительным ограничениям. При помощи этого подхода раскрывается „метрическая" сущность аксиом В. А. Ефремовича, что, со своей стороны, помогает установлению их независимости.

О п р е д е л е н и е: Функцию $\delta(A, B)$ от пар подмножеств множества X, которая принимает значения или 0, или 1, будем называть go-б л и з о с т ь ю н а X, а пару (X, δ) — п р о с т р а н с т в о м go-б л и з о с т и, если

1. $\delta(\emptyset, X) = \delta(X, \emptyset) = 1$;
2. $\delta(A, B) \geq \delta(C, D)$ как только $A \subset C$ и $B \subset D$;
3. $\delta(\{x\}, \{x\}) = 0$ для любой точки $x \in X$.

Если $\delta(A, B) = 0$, то говорят, что множество A б л и з к о к B (относительно δ). В случае $\delta(A, B) = 1$ говорят, что A д а л е к о от B (относительно δ).

Отметим, что условие 2 как бы олицетворяет известную аксиому Евклида „часть меньше целого".

Рассмотрим аксиомы В. А. Ефремовича:

А к с и о м а (d). $\delta(A, B \cup C) = \delta(A, B) . \delta(A, C)$ *и* $\delta(B \cup C, A) = \delta(B, A) \cdot \delta(C, A)$ *для любых трех подмножеств* $A, B, C \subset X$.

А к с и о м а (c). $\delta(A, B) = \delta(B, A)$ *для любых двух подмножеств* $A, B \subset X$.

А к с и о м а (Δ). *Если $\delta(A, B) = 1$, то существует $C \subset X$, для которого $\delta(A, X \setminus C) = 1$ и $\delta(C, B) = 1$.*

А к с и о м а (H). $\delta(\{x\}, \{y\}) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$.

Будем пользоваться следующими названиями: d-б л и з о с т ь — это go-близость, удовлетворяющая аксиоме (d); c-б л и з о с т ь — это d-близость, удовлетворяющая аксиоме (c); Δ-б л и з о с т ь — это d-близость, удовлетворяющая аксиоме (Δ); e-б л и з о с т ь (близость Ефремовича или просто близость) — это go-близость, удовлетворяющая аксиомам (d), (c) и (Δ).

С любой go-метрикой ϱ на X можно связать go-близость δ_ϱ по следующему правилу: $\delta_\varrho(A, B) = 0$ тогда и только тогда, когда $\varrho[A, B] = 0$.

В такой ситуации будем говорить, что go-близость δ_ϱ п о р о ж д е н а go-метрикой ϱ.

Имеет место:

Теорема 2. *Пусть* $\{X, \varrho, (E, O, V_E)\}$ — *go-метрическое пространство. Тогда:*

1. *go-близость* δ_ϱ *удовлетворяет аксиоме* (d) *тогда и только тогда, когда* ϱ *является do-метрикой.*

2. *Если* ϱ *симметрика, то* δ_ϱ *удовлетворяет аксиоме* (c).

3. *go-близость* δ_ϱ *удовлетворяет аксиоме* (Δ) *тогда и только тогда, когда* ϱ *удовлетворяет аксиоме* $(\delta\Pi)$.

Теорема 3. *Пусть* $\{X, \varrho_1, (E_1, O_1, V_{E_1})$ *и* $\{X, \varrho_2, (E_2, O_2, V_{E_2})\}$ — *go-метрические пространства на множестве* X. *Тогда* $\delta_{\varrho_1} = \delta_{\varrho_2}$ *в том и только в том случае, когда go-метрики* ϱ_1 и ϱ_2 *δ-эквивалентны.*

Теоремы 2 и 3 раскрывают тесную связь между свойствами go-метрики ϱ и go-близости δ_ϱ. Из них получаем:

Следствие 4. Если ϱ есть o-метрика, то δ_ϱ есть d-близость. Если ϱ-симметрика, то δ_ϱ есть c-близость. Если ϱ есть o-метрика с условием $(\delta\Pi)$ (в частности Δ-метрика), то δ_ϱ есть Δ-близость. Если ϱ есть симметрика с условием $(\delta\Pi)$ (в частности — метрика), то δ_ϱ есть близость.

Следствие 5. Если ϱ есть do-метрика, то δ_ϱ есть d-близость. Если ϱ есть d-симметрика, то δ_ϱ есть c-близость. Если ϱ есть $d\Delta$-метрика, то δ_ϱ есть Δ-близость. Если ϱ есть d-метрика, то δ_ϱ есть близость.

Наша ближайшая цель — показать, что каждая go-близость порождается некоторой go-метрикой.

Определение. *Окружение* $U \subset X \times X$, *где* (X, δ) — *go-близостное пространство, называется δ-окружением, если из* $(A \times B) \cap U = \emptyset$ *вытекает* $\delta(A, B) = 1$.

Через $\mathfrak{A}(\delta)$ обозначим совокупность всех δ-окружений.

Окружение вида $(X \times X) \setminus (A \times B)$, где $\delta(A, B) = 1$, будем называть δ-элементарным.

Лемма 8. *Пусть* (X, δ) — *d-близостное пространство. Пересечение любого δ-окружения с δ-элементарным окружением является δ-окружением. В частности, всякое δ-элементарное окружение есть δ-окружение.*

Доказательство. Пусть u есть δ-окружение и $v = (X \times X) \setminus (A \times B)$, где $\delta(A, B) = 1$. Положим $w = u \cap v$ и пусть $(C \times D) \cap w = \emptyset$. Обозначим: $C_1 = A \cap C$, $C_2 = C \setminus C_1$, $D_1 = B \cap D$ и $D_2 = D \setminus D_1$. Ясно, что $\delta(C_1, D_1) = 1$. Так как $(C_1 \times D_2) \cap u = (C_2 \times D_1) \cap u = \emptyset$, то $\delta(C_1, D_2) = \delta(C_2, D_1) = 1$. Дальше, $(C_2 \times D_2) \cap u = \emptyset$, откуда $\delta(C_2, D_2) = 1$. Используя аксиому (d), находим: $\delta(C, D) = \delta(C_1 \cup C_2, D_1 \cup D_2) = \delta(C_1, D_1) . \delta(C_1, D_2) . \delta(C_2, D_1) . \delta(C_2, D_2) = 1$. Лемма доказана.

Для любой go-близости δ справедлива.

Лемма 9. *Всякое δ-элементарное окружение является δ-окружением.*

Заметим, что если δ — go-близость, то пересечение двух δ-элементарных окружений не всегда является δ-окружением.

Пусть δ есть d-близость. Окружение u будем называть δ-вполне ограниченным, если существует конечное число δ-элементарных окружений $u_1, u_2, \ldots, u_n$, для которых $\cap\{u_i / i = 1, 2, \ldots, n\} \subset u$.

Из леммы 8 вытекает

Следствие 6. Пусть δ есть d-близость на X. Тогда

а) пересечение любого δ-окружения с δ-вполне ограниченным окружением является δ-окружением.

б) любое δ-вполне ограниченное окружение является δ-окружением.

в) пересечение любого конечного числа δ-вполне ограниченных окружений является δ-вполне ограниченым окружением.

Для каждой d-близости δ через $\overline{\mathfrak{A}}(\delta)$ будем обозначать семейство всех δ-вполне ограниченных окружений. В силу следствия 6 имеем $\overline{\mathfrak{A}}(\delta)\subset\mathfrak{A}(\delta)$.

На основании рассуждения первого параграфа семейство $\mathfrak{A}(\delta)$ порождает go-метрическое пространство $\{X, e, (X\times X, O, \mathfrak{A}(\delta))\}$. Заметим, что $e[A, B]\geqq u$, где $u\in\mathfrak{A}(\delta)$ тогда и только тогда, когда $(A\times B)\cap u=\varnothing$. Следовательно, $e[A, B]>0$ в том и только в том случае, когда $\delta(A, B)=1$. Поэтому $\delta=\delta_e$. Таким образом доказана

Теорема 4. *Для любой go-близости δ существует go-метрика ϱ, для которой $\delta=\delta_\varrho$.*

Если через $E(\delta)$ обозначим совокупность всех δ-элементарных окружений, то и в этом случае go-метрика e, порожденная семейством $E(\delta)$, порождает близость δ. Поэтому, для d-близостей, семейство $\overline{\mathfrak{A}}(\delta)\supset E(\delta)$ порождает o-метрику e, которая в свою очередь порождает близость δ. Тем самым доказана

Теорема 5. *Для любой d-близости δ существует o-метрика ϱ, для которой $\delta=\delta_\varrho$.*

Как обычно, если u — окружение, то u^{-1} определяется равенством $u^{-1}=\{(x, y)\in X\times X/(y, x)\in u\}$ и, окружение u называется симметричным, если $u=u^{-1}$.

Для любой go-близости δ через $\mathfrak{C}(\delta)$ будем обозначать семейство всех симметричных δ-окружений и $\overline{\mathfrak{C}}(\delta)=\mathfrak{C}(\delta)\cap\overline{\mathfrak{A}}(\delta)$.

Лемма 10. *Если u — δ-окружение, то $u\cup u^{-1}$ — симметричное δ-окружение. Если близость δ удовлетворяет аксиоме* (c) *и u — δ-элементарное окружение, то u^{-1} тоже является δ-элементарным окружением, и значит, $u\cap u^{-1}$ — δ-вполне ограниченное окружение.*

Из следствия 6 и леммы 10 получаем

Следствие 7. Если δ есть d-близость, то семейство $\overline{\mathfrak{C}}(\delta)$ конечно мультипликативно (т. е. пересечение конечного числа его элементов ему принадлежит).

Используя рассуждения, проведенные после теоремы **4**, мы можем сделать вывод, что семейство окружений $\mathfrak{C}(\delta)$ порождает g-симметрику ϱ, для которой $\delta=\delta_\varrho$. Если же δ есть d-близость, то семейство $\overline{\mathfrak{C}}(\delta)$ порождает симметрику ϱ, для которой $\delta=\delta_\varrho$. Таким образом, справедливы следующие две теоремы.

Теорема 6. *Для любой go-близости δ, удовлетворяющей аксиоме* (c), *существует g-симметрика ϱ, для которой $\delta=\delta_\varrho$.*

Теорема 7. *Для любой c-близости δ существует симметрика ϱ, для которой $\delta=\delta_\varrho$.*

Из теорем 2 и 5 вытекает

Следствие 8. Всякая do-метрика δ-эквивалентна некоторой o-метрике.

Из теорем 2 и 6 вытекает

Следствие 9. Если δ_ϱ удовлетворяет аксиоме (c), то ϱ δ-эквивалентна некоторой g-симметрике.

Из теорем 2 и 7 вытекает

Следствие 10. Если δ_ϱ есть c-близость, то go-метрика ϱ δ-эквивалентна некоторой симметрике.

Таким образом, мы выяснили „метрическую" сущность аксиом (d) и (c) для go-близостей. Займемся аксиомой (Δ).

На отрезке [0, 1] определим следующую Δ-метрику:

$$\varrho(x, y) = \max\{0, y - x\}.$$

Через ∇ обозначим множество [0, 1] с go-близостью δ_ϱ. На основание теоремы 2 последняя является Δ-близостью.

Через I обозначим множество [0, 1] с обычной „евклидовой" близостью. Пусть (X, δ) — go-близостное пространство. Псевдо-o-метрику ϱ на X будем называть δ-непрерывной, если из $\varrho[A, B] > 0$ следует $\delta(A, B) = 1$ для любых $A, B \subset X$.

Пусть go-близость δ удовлетворяет аксиоме (Δ). По методу П. С. Урысона нетрудно построить функцию $f: X \to [0, 1]$ со следующими свойствами:

а) $f(A) = 0$ и $f(B) = 1$.

б) Как отображение $f: X \to \nabla$ f является близостно непрерывным отображением, т. е. образы близких множеств близки.

в) Если δ удовлетворяет еще и аксиоме (c), то отображение $f: X \to I$ также близостно непрерывно.

По функции f определяем псевдо-Δ-метрику $\varrho_f(x, y) = \max\{0, f(y) - f(x)\}$, а в случае, когда δ удовлетворяет и аксиоме (c), определяем псевдометрику $p_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$.

Очевидно, $\varrho_f[A, B] = p_f[A, B] = p_f[B, A] = 1$. Имеет место:

Предложение 4. *Пусть go-близость δ удовлетворяет аксиоме (Δ). Тогда*:

1) *Псевдо-Δ-метрики вида ϱ_f δ-непрерывны.*

2) *Если δ удовлетворяет еще и аксиоме* (c), *то псевдометрики вида p_f δ-непрерывны.*

Доказательство вытекает из того факта, что окружения

$$u_{\varrho,\varepsilon} = \{(x, y) / \varrho_f(x, y) < \varepsilon\} \text{ и } u_{p,\varepsilon} = \{(x, y) / p_f(x, y) < \varepsilon\}$$

в соответствующих случаях являются δ-вполне ограниченными δ-окружениями.

В связи с этим, δ-непрерывную псевдо-o-метрику ϱ мы будем называть δ-вполне ограниченной, если для каждого $\varepsilon > 0$ окружение $u_{\varrho,\varepsilon}$ δ-вполне ограничено.

Следовательно, псевдо-o-метрики ϱ_f и p_f δ-вполне ограничены в соответствующих случаях.

Обозначим через $\mathfrak{P}(\delta)$ совокупность всех δ-вполне ограниченных псевдо-Δ-метрик, а через $P(\delta)$ — совокупность всех δ-вполне ограниченных псевдометрик. Из следствия 6 вытекает

Предложение 5. *Для любой d-близости δ семейства $\mathfrak{P}(\delta)$ и $P(\delta)$ удовлетворяют условию* (s).

Для любой go-близости δ, удовлетворяющей аксиоме (Δ), семейство $\mathfrak{P}(\delta)$ порождает некоторую $g\Delta$-метрику ϱ. Если же δ является еще d-близостью, то ϱ будет Δ-метрикой. Для go-близостей, удовлетворяющих аксиомам (c) и (Δ) семейство $\bar{P}(\delta)$ образует g-метрику d, а для близостей d является метрикой над шкалой. Причем, во всех этих случаях $\delta=\delta_\varrho$ и $\delta=\delta_d$. Таким образом, доказаны следующие теоремы.

Теорема 8. *Всякая, удовлетворяющая аксиоме (Δ) go-близость порождается некоторой Δ-метрикой. В частности, всякая Δ-близость порождается некоторой Δ-метрикой над шкалой.*

Теорема 9. *Всякая удовлетворяющая аксиомам* (c) *и* (Δ) *go-близость порождается некоторой g-метрикой. В частности всякая близость порождается некоторой метрикой над шкалой.*

Последнее предложение выражает тот общеизвестный факт, что любая близость В. А. Ефремовича порождается некоторой равномерной структурой А. Вейля.

Из последних двух теорем вытекает, что аксиома (Δ) (это есть пятая аксиома В. А. Ефремовича) копирует аксиому треугольника. Этот факт любопытен тем, что, на первый взгляд, обнаруживается некоторое внешнее подобие между аксиомой треугольника (для метрик) и аксиомой (d). В сущности, аксиома (d) обеспечивает возможность, чтобы данная go-близость порождала топологию:

Пусть (X, δ) — go-близостное пространство. Назовем множество $F\subset X$ замкнутым, если $F=\{x\in X/\delta(\{x\}, F)=0\}$, а множество U — открытым, если $X\setminus U$ — замкнуто. Совокупность всех открытых множеств обозначим через $\tau(\delta)$. Легко заметить, что для любой d-близости $\tau(\delta)$ является топологией. Отметим еще, что $\tau(\delta_\varrho)=\tau_\varrho$ для любой go-метрики.

Анализируя теоремы настоящего параграфа, мы видим, что каждая из аксиом В. А. Ефремовича есть полный аналог некоторой из аксиом метрики. Ясно, что эта аналогия может быть замечена только на языке o-метрики над шкалой.

3. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим g-шкалу (E, O, V_E), где $E=(0, 1, -1)$ и $O=\{0\}$, $V_E=\{\{0,1\}, \{0, -1\}\}$. Пусть $X=\{a, b, c\}$. Положим $\varrho(a, c)=1$, $\varrho(b, c)=-1$, а в остальных случаях $\varrho(x, y)=0$. Тогда ϱ удовлетворяет аксиоме ($d_п$) и не удовлетворяет аксиоме ($d_л$). Рассматривая на X go-метрику $d(x, y)=\varrho(y, x)$, видим, что d удовлетворяет ($d_л$) и не удовлетворяет ($d_п$). go-близости δ_ϱ и δ_d не являются d-близостями.

Пример 2. Пусть X — T_0-пространство, которое не есть T_1-пространство. Положим $\delta(A, B)=1$ тогда и только тогда, когда $[B]\cap A=\varnothing$ go-близость δ является Δ-близостью, порождающей топологию X. Заметим' что δ не удовлетворяет аксиоме (c).

Пример 3. Пусть X — T_1-пространство. Пусть $\delta(A, B)=0$ тогда и только тогда, когда $[A]\cap[B]\neq\varnothing$. δ является c-близостью, порождающей топологию пространства X. Если же X не нормально, то δ не удовлетворяет аксиоме (Δ).

Пример 4. Пусть $X=\left\{n, n+\frac{1}{n}/n=1, 2, \ldots\right\}$. Определим на X две метрики ϱ_1 и ϱ_2 по правилу:

$$\varrho_1(x, y)=\begin{cases} 0, & \text{если } x=y, \\ \frac{1}{2k+1}, & \text{если } \{x, y\}=\left\{2k+1, \frac{(2k+1)^2+1}{2k+1}\right\}, \ k=1, 2, \ldots, \\ 1, & \text{если } x\neq y \text{ и } \{x, y\}\neq\left\{2k+1, \frac{(2k+1)^2+1}{2k+1}\right\}; \end{cases}$$

$$\varrho_2(x, y)=\begin{cases} 0, & \text{если } x=y, \\ \frac{1}{2n}, & \text{если } \{x, y\}=\left\{2n, \frac{4n^2+1}{2n}\right\}, \ n=1, 2, \ldots, \\ 1, & \text{если } x\neq y \text{ и } \{x, y\}\neq\left\{2n, \frac{4n^2+1}{2n}\right\}, \ n=1, 2, \ldots \end{cases}$$

Семейство псевдометрик $P=\{p_1, p_2\}$ порождает на X go-близость δ, которая в силу теоремы 2, удовлетворяет аксиомам (c) и (Δ). Однако δ не удовлетворяет аксиоме (d). В самом деле, если

$$A=\{n/n=1, 2, \ldots\}, \ B=\left\{2k+1+\frac{1}{2k+1}/k=0, 1, 2, \ldots\right\}, \ C=\left\{2n+\frac{1}{2n}/n=1, 2, \ldots\right\},$$

то $\delta(A, B)=\delta(A, C)=1$, но $\delta(A, B\cup C)=0$.

Отметим, что примеры 1—4 показывают, что аксиомы В. А. Ефремовича не зависимы.

4. Метризация пространств близости. Из предыдущего параграфа видно, а это, впрочем, и общеизвестно, что любая близость метризуема над шкалой. В этом параграфе мы поставим себе такой вопрос: пусть θ — кардинальное число и (X, δ) — пространство близости. Как узнать — θ-метризуема ли близость δ?

Особый интерес представляет случай $\theta=\aleph_0$. Вопрос об $\aleph_0$-метризации называется вопросом о метризации поскольку, легко сообразить, любая $\aleph_0$-метризуемая над шкалой близость метризуема в обычном смысле и, конечно, наоборот.

Вопрос о метризации (и, тем более, вопрос о θ-метризации) пространств близости все еще не решен окончательно. В связи с этим мы сформулируем здесь такую проблему:

Проблема 1. θ-метризуема ли каждая θ-go-метризуемая близость. В частности:

Проблема 2. Метризуема ли каждая $\aleph_0$-go-метризуемая близость.

Настоящий параграф посвящен доказательству некоторых результатов, дающих частичное решение поставленной проблемы. Чтобы сформулировать эти результаты, мы сначала напомним некоторые определения и введем некоторые обозначения.

Пусть $\{X, \varrho, (E, O, V_E)\}$ — go-метрическое пространство. Для каждого $v\in V_E$ положим $u_{\varrho,v}=\{(x, y)\in X\times X/\varrho(x, y)\in v\}$ и обозначим: $\Omega_\varrho=\{u_{\varrho,v}/v\in V_E\}$. Рассуждения, проведенные во втором параграфе, содержат в себе доказательство следующего утверждения:

Предложение 6. ([3]) *Для того, чтобы go-близость δ_ϱ была близостью, необходимо и достаточно, чтобы семейство окружений Ω_ϱ удовлетворяло следующим трем условиям:*

(а) *если $x, y\in X$ и $x\neq y$, то для некоторого $u\in\Omega_\varrho$ $(x, y)\notin u$;*

(б) *если $A\subset X$ и $u, v\in\Omega_\varrho$, то найдется $w\in\Omega_\varrho$ такой, что $w(A)=\{x\in X/(y, x)\in w$ для некоторого $y\in A\}\subset u(A)\cap v(A)$;*

(в) *если* $A \subset X$ *и* $u \in \Omega_\varrho$, *то существуют* $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \Omega_\varrho$ *такие, что* $v_1(v_2^{-1}(v_3(v_4^{-1}(A)))) \subset u(A)$.

Введем в рассмотрение еще такое условие:

Условие (в′): если $A \subset X$ и $u \in \Omega_\varrho$, то существует $v \in \Omega_\varrho$ такое, что $v(v^{-1}(v(v^{-1}(A)))) \subset u(A)$.

go-метрику ϱ будем называть допустимой, если семейство Ω_ϱ удовлетворяет условия (в′). Очевидно, любая o-метрика ϱ над шкалой является допустимой go-метрикой, как только δ_ϱ является близостью.

Дальше, если X — множество, то любое отображение $f: \Lambda \to X$, где Λ — линейно упорядоченное множество, будем называть цепью в X.

Если (X, δ) — пространство близости и $f: \Lambda \to X$ и $g: \Lambda \to X$ — две цепи, то будем говорить, что f и g δ-эквивалентны (и писать $f \overset{\delta}{\sim} g$), если для любой конфинальной части $\Lambda' \subset \Lambda$ выполнено равенство $\delta(f(\Lambda'), g(\Lambda')) = 0$.

Легко видеть (см. напр. [7]), что реляция δ-эквивалентности является реляцией эквивалентности, т. е. она рефлексивна, симметрична и транзитивна.

Определение. ([3]) Близость δ будем называть секвенциальной, если из $\delta(A, B) = 0$ следует, что существуют две δ-эквивалентные цепи f и g: $f: N \to A$ и $g: N \to B$, где N — множество натуральных чисел в его естественном порядке.

Близость δ будем называть специальной, если из $\delta(A, B) = 0$ следует, что существует линейно упорядоченное множество Λ и две δ-эквивалентные цепи $f: \Lambda \to A$ и $g: \Lambda \to B$.

Близость δ будем называть допустимой, если из $\delta(A, B) = 0$ следует, что существуют линейно упорядоченное множество Λ и две δ-эквивалентные цепи $f: \Lambda \to [A] = \{x \in X / \delta(\{x\}, A) = 0\}$ и $g: \Lambda \to [B]$.

Наконец, близость δ называется [8] правильной, если семейство $P(\delta)$ удовлетворяет условию (s). Имеет место:

Предложение 7. ([3]) *Если близость* δ *порождается некоторой* $\aleph_0$-*о-метрикой, то* δ — *секвенциальна. Если близость* δ *порождается о-метрикой* $\varrho: X \times X \to (E, O, V_E)$, *где* V_E *линейно упорядочено по включению, то* δ — *специальна. Любая секвенциальная близость — специальна. Любая специальная близость — допустима. Любая допустимая близость правильна.*

Доказательство. Все утверждения, содержащиеся в предложении 7, за исключением последнего, тривиальны. Важную роль в доказательстве последнего утверждения играет следующая

Лемма 11 (Ефремович — Рамм — Шварц [2, 9]). *Пусть* X — *множество, и* v — *окружения диагонали* $X \times X$ *и* $f: \Lambda \to X$, $g: \Lambda \to X$ — *две цепи. Если для каждого* $\lambda \in \Lambda$ $(f(\lambda), g(\lambda)) \notin (uu^{-1}v \cup v^{-1}uu^{-1})$, *то существует конфинальная часть* $\Lambda' \subset \Lambda$ *такая, что* $u(f(\Lambda')) \cap v(f(\Lambda')) \cap g(\Lambda') = \emptyset$.

(Здесь, как обычно, $uv = \{(x, y) \in X \times X / (x, z) \in u, (z, y) \in v$ для некоторого $z \in X\}$.) Пусть теперь δ — допустимая близость на X, $p_1, p_2 \in P(\delta)$ и $\delta(A, B) = 0$. Пусть еще $p = \max\{p_1, p_2\}$, $f: \Lambda \to [A]$, $g: \Lambda \to [B]$ две δ-эквивалентные цепи, $\varepsilon > 0$.

Так как $f \overset{\delta}{\sim} g$ и так как $u_{p_1, \frac{\varepsilon}{9}}$ и $u_{p_2, \frac{\varepsilon}{9}}$ δ-окружения, то, в силу леммы 11, найдется $\lambda \in \Lambda$, для которого $(f(\lambda), g(\lambda)) \in u_{p_1, \frac{\varepsilon}{3}} \cap u_{p_2, \frac{\varepsilon}{3}}$. Следовательно (т. к. $f(\lambda) \in [A]$, $g(\lambda) \in [B]$), существуют точки $x \in A$ и $y \in B$ такие, что: $x \in u_{p_1, \frac{\varepsilon}{3}}(f(\lambda)) \cap u_{p_2, \frac{\varepsilon}{3}}(f(\lambda))$ и $y \in u_{p_1, \frac{\varepsilon}{3}}(g(\lambda)) \cap u_{p_2, \frac{\varepsilon}{3}}(g(\lambda))$. Отсюда, $(x, y) \in u_{p_1, \varepsilon} \cap u_{p_2, \varepsilon} \subset u_{p, \varepsilon}$, т. е. $p(x, y) < \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ взято произвольно, то $p(A, B) = 0$.

Теорема 10. ([3]) *Близость δ метризуема тогда и только тогда, когда δ удовлетворяет следующим двум условиям:*

а) *δ — допустима.*

б) *δ порождается некоторой допустимой $\aleph_0$-go-метрикой.*

Доказательство теоремы 10 приведено авторами в [3]. Оно опирается на одной идее Ефремовича — Шварца ([7]), которая состоит в следующем. Пусть (X, δ) — пространство близости. Определим семейство $\mathfrak{B}$ окружений по правилу: окружение u принадлежит $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда для любых двух δ-эквивалентных цепей $f: \Lambda \to X$ и $g: \Lambda \to X$ найдется $\lambda_u \in \Lambda$ такое, что $(f(\lambda), g(\lambda)) \in u$ для любого $\lambda \geqq \lambda_u$. Имеют место утверждения:

Лемма 12. ([3]) *Пусть δ порождается go-метрикой $\varrho: X \times X \to (E, O, V_E)$. Если, либо ϱ — допустимая $\aleph_0$-go-метрика, либо V_E линейно упорядочена по включению, то $\mathfrak{B}$ является равномерной структурой в смысле Вейля, с базой, состоящей из конечных пересечений элементов семейства $\Omega = \{uu^{-1}uu^{-1} / u \in \Omega_\varrho\}$, причем в этом случае $\mathfrak{B}$ порождает ту же топологию, что и δ.*

Лемма 13. [(3)] *Если в условиях леммы 12 близость δ еще и допустима (в случае, когда V_E линейно упорядочено, δ автоматически даже специальна), то $\mathfrak{B}$ порождает δ.*

Таким образом, леммы 12 и 13 (заодно с известной метризационной теоремой А. Вейля [10]), дают доказательство не только теореме 10, но еще и такому следствию:

Следствие 11. ([3]) Если близость δ o-метризуема o-метрикой ϱ над линейно упорядоченной шкалой (E, O, V_E) (т. е. шкалой для которой V_E линейно упорядочено по включению), то δ порождается и равномерной структурой $\mathfrak{B}$, имеющей в качестве базы линейно упорядоченное семейство

$$\Omega = \{uu^{-1}uu^{-1} / u \in \Omega_\varrho\},$$

т. е. δ метризуема над линейно упорядоченной шкалой $(X \times X, D, \Omega)$.

Стоит отметить и такой частный случай следствия 11:

Теорема 11. ([11]) *Любая $\aleph_0$-o-метризуемая близость метризуема.*

Теорема 12. ([3]) *Если близость δ $\aleph_0$-go-метризуема, то топология τ_δ метризуема.*

Доказательство. Пусть $\varrho: X \times X \to (E, O, V_E)$ $\aleph_0$-go-метрика, порождающая близость δ. Пусть еще $V_E = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$. Положим

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ если } \varrho(x, y) \notin u_1, \\ \dfrac{1}{n}, \text{ если } \varrho(x, y) \in u_1 \cap u_2 \cap \ldots \cap u_n \setminus u_{n+1}, \\ 0, \text{ если } \varrho(x, y) \in \cap \{u / u \in V_E\}. \end{cases}$$

Покажем, что обычная o-метрика d порождает топологию τ_δ. В самом деле, если $x \in X$, то

$$\mathfrak{O}^{\varrho}_{u_1 \cap u_2 \cap \ldots \cap u_{n+1}}(x) = \mathfrak{O}^{\varrho}_{u_1}(x) \cap \mathfrak{O}^{\varrho}_{u_2}(x) \cap \ldots \cap \mathfrak{O}^{\varrho}_{u_{n+1}}(x) \subset \mathfrak{O}^{d}_{1/n}(x) \subset \mathfrak{O}^{\varrho}_{u_n}(x).$$

Покажем теперь, что o-метрика d удовлетворяет следующим двум условиям:

$$(\Pi_1) \text{ из } \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 \text{ следует } \lim_{n\to\infty} d(x, y_n) = 0,$$

$$(\Pi_2) \text{ из } \lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0 \text{ и } \lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = 0 \text{ следует } \lim d(x, y_n) = 0.$$

Проверяем условие (Π_1), рассуждая от противного: пусть $\varepsilon > 0$ и $g(x, y_n) \geqq \varepsilon$ для бесконечного числа значений индекса n. Переходя, если надо, к подпоследовательности, можем считать, что $d(x, y_n) \geqq \varepsilon$ для любого индекса n. Если натуральное $k > 1/\varepsilon$, то неравенство $d(x, y_n) \geqq \varepsilon > 1/k$ обозначает, что $\varrho(x, y_n) \notin u_{k+1}$ для любого n и, следовательно, множества $A = \{x\}$ и $B = \{y_n / n = 1, 2, \ldots\}$ — далеки. По аксиоме (Δ) находим множество C такое, что $\delta(B, C) = 1$, $\delta(A, X \setminus C) = 1$. Теперь, если для бесконечного числа индексов n выполнено $x_n \in C$, то, учитывая $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$, доходим до противоречия с условием $\delta(C, B) = 1$, а если допустим, что для бесконечного числа индексов n выполнено $x_n \in X \setminus C$, то, учитывая $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$, доходим до противоречия с условием $\delta(X \setminus C, A) = 1$. Итак, d удовлетворяет условию (Π_1). Аналогично проверяется, что d удовлетворяет условию (Π_2). Теперь можем применить теорему 28 из [12].

Заметим, что заключение теоремы 12 останется в силе, даже если go-близость δ удовлетворяет аксиомам Ефремовича не в их полной силе, а в несколько ослабленом виде. В каком точно, каждый сам легко сообразит.

Теорема 13. *Любая $\aleph_0$-g-метризуемая правильная близость метризуема.*

Доказательство: Пусть $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ — счетное семейство псевдометрик на X, порождающее правильную близость δ. Очевидно, $P \subset P(\delta)$. Так как близость δ правильна, то и $P_s \subset P(\delta)$. Итак, P_s порождает $\aleph_0$-метрику, порождающую δ.

Теорема 14. *Если близость δ n-g-метризуема, где n — натуральное число, то δ метризуема.*

Доказательство проведем для случая $n = 2$. Пусть $P = \{p_1, p_2\}$ — семейство из двух псевдометрик, порождающее 2-g-метрику, порождающую δ. Мы покажем, что псевдометрика $p = \max\{p_1, p_2\}$ пораждает близость δ. Очевидно, достаточно показать, что p является δ-непрерывной псевдометрикой. Мы допустим противное и пусть $\delta(A, B) = 0$, но $p(A, B) > 0$. Пусть для каждого n $x'_n, x''_n \in A$, $y'_n, y''_n \in B$ — точки, выбранные так, что $\lim_{n\to\infty} p_1(x'_n, y'_n) = 0$, $\lim_{n\to\infty} p_2(x''_n, y''_n) = 0$. Из за $p(A, B) > 0$ мы можем считать, что $p_2(x'_n, y'_n) \geqq \varepsilon' > 0$ для любого n, а также, что $p_1(x''_n, y''_n) \geqq \varepsilon'' > 0$ для любого n. Кроме того, опять из за $p(A, B) > 0$, найдутся $\eta' > 0$ и $\eta'' > 0$ и $i, j \in \{1, 2\}$, так, что $p_i(x'_n, y''_n) \geqq \eta'$ для бесконечного числа индексов и, $p_j(x''_n, y'_n) \geqq \eta''$ для бесконечного числа значений индекса n. Ничуть не ограничивая общность, мы можем считать, что последние неравенства выполняются для любого n. Теперь, применяя лемму 11, мы заключаем, что можем считать: $p_2(\{x'_n / n = 1, 2, \ldots\}, \{y'_n / n = 1, 2, \ldots\}) \geqq \varepsilon'/3$, $p_1(\{x''_n / n = 1, 2, \ldots\}, \{y'_n / n = 1, 2, \ldots\}) \geqq \varepsilon''/3$, $p_i(\{x'_n / n = 1, 2, \ldots\}, \{y''_n / n = 1, 2 \ldots\}) \geqq \eta'/3$,

$p_j(\{x''_n/n=1, 2, \ldots\}, \{y'_n/n=1, 2, \ldots\}) \geqq \eta''/3$ для любого n. Пусть $A'=\{x'_n/n=1, 2, \ldots\}$, $A''=\{x''_n/n=1, 2, \ldots\}$, $B'=\{y'_n/n=1, 2, \ldots\}$, $B''=\{y''_n/n=1, 2, \ldots\}$. Имеем $\delta(A''\cup A', B'\cup B'')=0$. С другой стороны, $\delta(A'\cup A'', B'\cup B'')=\delta(A', B').\delta(A', B'').\delta(A'', B').\delta(A'', B'')=1$. В самом деле $\delta(A', B')=1$ из за $p_2(A', B')\geqq\varepsilon'/3>0$, $\delta(A', B'')=1$ из за $p_i(A', B'')\geqq\eta'/3>0$, $\delta(A'', B')=1$ из за $p_j(A'', B')\geqq\eta''/3>0$ и $\delta(A'', B'')=1$ из за $p_1(A'', B'')\geqq\varepsilon''/3>0$.

И так, для случая $n=2$ теорема 14 доказана. Случай произвольного n не сводится к этому, но рассматривается таким же образом.

Теоремы 10—14 и их следствия — это все, что авторам известно в связи с проблемой 2.

Теперь приведем две утверждения в связи с проблемой 1.

Теорема 15. ([3]) *Если близость δ θ-о-метризуема, то δ $\theta^{\aleph_0}$-метризуема.*

Доказательство. Пусть $\varrho: X\times X\to(E, O, V_E)$ о-метрика над шкалой, порождающая близость δ. Псевдометрику p на X будем называть ϱ-допустимой, если для каждого $\varepsilon>0$ найдется $v\in V_E$ такое, что $u_{p,\varepsilon}\supset u_{\varrho,v}$ и p ограничена сверху единицей. Через P_ϱ обозначим семейство всех ϱ-допустимых псевдометрик. Очевидно, семейство P_ϱ удовлетворяет условию (s) и, значит, порождает некоторую метрику над шкалой. Очевидно так же, что любой элемент P_ϱ является δ-непрерывной псевдометрикой. Следовательно, если мы покажем, что $P_\varrho\supset\bar{P}(\delta)$, то будет установлено что P_ϱ порождает близость δ. И так, надо показать, что если u — δ-вполне ограниченное окружение диагонали $X\times X$, то найдется $v\in V_E$, для которого $u\supset u_{\varrho,v}$. Так как u содержит пересечение конечного числа δ-элементарных окружений, то без ограничения общности можем считать, что u — δ-элементарное окружение. Допустим, что для любого $v\in V_E$ $u_{\varrho,v}\setminus u\neq\emptyset$ и пусть $(x_v, y_v)\in u_{\varrho,v}\setminus u$. Пусть еще $u=(X\times X)\setminus(A\times B)$, где $\delta(A, B)=1$. Тогда $(x_v, y_v)\in A\times B$ для любого $v\in V_E$, откуда $\varrho[A, B]=0$, что противоречит условию $\delta(A, B)=1$.

Пусть теперь Σ обозначает множество всех счетных, вполне упорядоченных (по включению) подмножеств семейства V_E. Если $\sigma\in\Sigma$ и $\sigma=\{v_1\supset v_2\supset\cdots\supset v_n\supset\cdots\}$, то положим: $p_\sigma=\sup\{p\in P_\varrho/u_{p,1/n}\supset u_{\varrho,v_n}\}$ и $P_\Sigma=\{p_\sigma/\sigma\in\Sigma\}$. Очевидно, что $P_\Sigma\subset P_\varrho$, что P_Σ удовлетворяет условию (s), и что $|P_\Sigma|\leqq\theta^{\aleph_0}$. Кроме того, так как для любого $p\in P_\varrho$ найдется $p_\sigma\in P_\Sigma$ такое, что $p_\sigma(x, y)\geqq p(x, y)$ для любой точки $(x, y)\in X\times X$, то P_Σ порождает близость δ. Этим теорема 15 доказана.

Теорема 16. ([3]) *Если близость δ θ-о-метризуема, то топология $\tau(\delta)$ θ-метризуема.*

Доказательство. Пусть $\varrho: X\times X\to(E, O, V_E)$ — θ-о-метрика, порождающая близость δ. Для любых $x, y\in X$ и $v\in V_E$ положим

$$d_v(x, y)=\begin{cases}0, & \text{если } \{\varrho(x, y), \varrho(y, x)\}\cap v\neq\emptyset,\\ 1, & \text{если } \{\varrho(x, y), \varrho(y, x)\}\cap v=\emptyset.\end{cases}$$

Определим симметрику $d: X\times X\to(R^\theta_+, 0, V_\theta)$, где $R^\theta_+=\Pi\{R_{+v}/v\in V_E\}$, полагая $d(x, y)=\{d_v(x, y)/v\in V_E\}$ для любых двух точек $x, y\in X$.

Не составит труда убедиться в том, что d — симметрика, порождающая близость δ. Следовательно, d удовлетворяет условию $(\delta\Pi)$, а значит и условию (Π). Тогда, по теореме 11.1 из [1], $(X, \tau(\delta))$ обладает

θ-дискретной базой $\mathfrak{B} = \cup\{\mathfrak{B}_\alpha/\alpha \in A, \ |A| \leqq \theta\}$, где для каждого $\alpha \in A$ $\mathfrak{B}_\alpha = \{u^\lambda_\alpha/\lambda \in \Lambda_\alpha\}$ — дискретное семейство открытых в X множеств u^λ_α.

Для любых $\alpha \in A$, $\lambda \in \Lambda_\alpha$ и $v \in V_\theta$ положим $u^{\lambda,v}_\alpha = X \setminus [\mathfrak{O}^d_v(X \setminus u^\lambda_\alpha)]_{\tau(\delta)}$. Как утверждает лемма 11.1 из [1], $u^\lambda_\alpha = \cup\{u^{\lambda,v}_\alpha/v \in V_\theta\} = \cup\{[u^{\lambda,v}_\alpha]_{\tau(\delta)}/v \in V_\theta\}$. Из определения множеств $u^{\lambda,v}_\alpha$ видно, что для каждого $v \in V_\theta$ $\delta(u^{\lambda,v}_\alpha, X \setminus u^\lambda_\alpha) = 1$. Поэтому, существует δ-непрерывная функция $f^{\lambda,v}_\alpha : X \to [0, 1]$ такая, что $f^{\lambda,v}_\alpha(u^{\lambda,v}_\alpha) = 1$, $f^{\lambda,v}_\alpha(X \setminus u^\lambda_\alpha) = 0$.

Определяем псевдометрику $p^{\lambda,v}_\alpha(x, y)$, полагая $p^{\lambda,v}_\alpha(x, y) = |f^{\lambda,v}_\alpha(x) - f^{\lambda,v}_\alpha(y)|$ для любых двух точек $x, y \in X$. Как известно (и как не трудно убедится), $p^{\lambda,v}_\alpha$ является δ-псевдометрикой. Теперь, для любых двух точек $x, y \in X$ положим:

$$p^v_\alpha(x, y) = \sup\{p^{\lambda,v}_\alpha(x, y)/\lambda \in \Lambda_\alpha\}$$

и, после этого, определим θ-метрику:

$$p : X \times X \to \Pi\{R_{+\alpha v}/\alpha \in A, \ v \in V_\theta\},$$

полагая: $p(x, y) = \{p^v_\alpha(x, y)/\alpha \in A, \ v \in V_\theta\}$. Чтобы доказать теорему, достаточно показать, что θ-метрика p порождает топологию $\tau(\delta)$. Пусть для этого, $V_{1\theta} = \{\Pi\{(-\varepsilon_i, \varepsilon_i)/i = 1, 2, \ldots, n\} \times \Pi\{R_{+\alpha v}/(\alpha, v) \in A \times V_\theta \setminus \{(\alpha_1, v_1), \ldots, (\alpha_n, v_n)\}\}$, $0 < \varepsilon_i \leqq 1$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ и $n = 1, 2, \ldots\}$. Пусть $x_0 \in X$ и $\mathfrak{O}x_0$ — окрестность точки x_0. Так как $\mathfrak{B}$ — база, то $x_0 \in u^{\lambda_0}_{\alpha_0} \subset \mathfrak{O}x_0$ для некоторых $\alpha_0 \in A$ и $\lambda_0 \in A_{\alpha_0}$. Значит, $x_0 \in u^{\lambda_0, v_0}_{\alpha_0} \subset u^{\lambda_0}_{\alpha_0} \subset \mathfrak{O}x_0$ для некоторого $v_0 \in V_\theta$. Мы положим $w_0 = (-1, 1) \times \Pi\{R_{+\alpha v}/(\alpha, v) \in A \times V_\theta \setminus \{(\alpha_0, v_0)\}\} \in V_{1\theta}$ и покажем, что $\mathfrak{O}^p_{w_0}(x_0) \subset \mathfrak{O}x_0$. В самом деле, пусть $x \in \mathfrak{O}^p_{w_0}(x_0)$. Тогда, $p^{v_0}_{\alpha_0}(x_0, x) < 1$ и, значит $p^{\lambda_0, v_0}_{\alpha_0}(x_0, x) < 1$. Поэтому $f^{\lambda_0, v_0}_{\alpha_0}(x) > 0$, т. е. $x \in u^{\lambda_0}_{\alpha_0} \subset \mathfrak{O}x_0$.

Пусть теперь $w = \Pi\{(-\varepsilon_i, \varepsilon_i)/i = 1, 2, \ldots, n\} \times \Pi\{R_{+\alpha v}/(\alpha, v) \in A \times V_\theta \setminus \{(\alpha_1, v_1), \ldots, (\alpha_n, v_n)\}\}$ — произвольный элемент $V_{1\theta}$. Мы покажем, что $x_0 \in \operatorname{Int} \mathfrak{O}^p_w(x_0)$. Очевидно, это будет сделано, если мы покажем, что для любого i $x_0 \in \operatorname{Int} \mathfrak{O}^p_{w_i}(x_0)$, где $w_i = (-\varepsilon_i, \varepsilon_i) \times \Pi\{R_{+\alpha v}/(\alpha, v) \in A \times V_\theta \setminus \{(\alpha_i, v_i)\}\}$. Займемся последним. Рассмотрим два случая:

A) $x_0 \notin \cup\{[u^\lambda_{\alpha_i}]/\lambda \in \Lambda_{\alpha_i}\}$. Тогда положим $\mathfrak{O}x_0 = X \setminus \cup\{[u^\lambda_{\alpha_i}]/\lambda \in \Lambda_{\alpha_i}\}$. Очевидно, $\mathfrak{O}x_0$ — открыто и $x_0 \in \mathfrak{O}x_0 \subset \mathfrak{O}^p_{w_i}(x_0)$.

B) $x_0 \in [u^{\lambda_i}_{\alpha_i}]$ для некоторого $\lambda_i \in \Lambda_{\alpha_i}$. Тогда существует окрестность $\mathfrak{O}_1 x_0$ точки x_0 такая, что $|f^{\lambda_i v_i}_{\alpha_i}(x) - f^{\lambda_i v_i}_{\alpha_i}(x_0)| < \varepsilon_i$ для любого $x \in \mathfrak{O}_1 x_0$ — это следует из непрерывности функции $f^{\lambda_i v_i}_{\alpha_i}$. После этого положим: $\mathfrak{O}x_0 = \mathfrak{O}_1 x_0 \setminus \cup\{[u^\lambda_{\alpha_i}]/\lambda \in \Lambda_{\alpha_i}, \ \lambda \neq \lambda_i\}$. Опять $\mathfrak{O}x_0$ — открытое множество, содержащее x_0 и такое, что $\mathfrak{O}x_0 \subset \mathfrak{O}^p_{w_i}(x_0)$. Теорема 16 доказана.

В заключение позволим себе отметить, что язык $g\sigma$-метрик позволяет ставить и естественно обобщать вопросы, касающие и другие стороны (а не только метризационную сторону) теории пространств близости, топологических и равномерных пространств. В настоящей работе нашли место только результаты, касающие проблему метризации в основном из за личных вкусов авторов, а еще и потому, что затрагивание других вопросов значительно бы увеличило объем работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Й. Недев, М. М. Чобан. Общая концепция метризуемости топологических пространств. *Год. Соф. Унив., Мат. фак.*, **65**, 1972, 111—165.
2. В. А. Ефремович. Геометрия близости I. *Мат. сб.*, **31** (73), 1952, 189—200.
3. С. Й. Недев, М. М. Чобан. О некоторых классах пространств близости и их метризации. *Доклады БАН*, **27**, 1974, № 5, 591—594.
4. М. Я. Антоновский, В. Г. Болтянский, Т. А. Сарымсаков. Очерк теории топологических полуполей. *Успехи мат. наук*, **21**, 1966, № 4, 185—218.
5. S. A. Naimpally, B. D. Warrack. Proximity spaces. Cambridge, 1970.
6. Z. Mamuzic. Introduction to general topology. Groningen, 1963.
7. А. В. Ефремович, А. С. Шварц. Новое определение равномерных пространств. Метризация пространств близости. *Доклады АН СССР*, **89**, 1953, 393—396.
8. В. З. Поляков. Регулярность и произведение пространств близости. *Мат. сб.*, **67** (109), 1965, 428—439.
9. Н. С. Рамм, А. С. Шварц. Геометрия близости, равномерная геометрия и топология. *Мат сб.* **33** (75), 1953, 157—180.
10. A. Weil. Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale. *Actual. scient., ind.*, 551. Paris, 1937.
11. Н. Хаджииванов, С. Недев. Любая o-метризуемая близость метризуема. *Доклады БАН*, **26**, 1973, № 10, 1289—1291.
12. С. Й. Недев. o-метризуемые пространства. *Труды Моск. Мат. О-ва*, **24**, 1971, 201—236.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике София 1000 п. я. 373 Болгария

Тираспольский пединститут, г. Тирасполь, Молд. ССР

Поступила 27. 11. 1973