# Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

# Сердика

Българско математическо списание

# СОВПАДЕНИЯ И КОСОВПАДЕНИЯ АЦИКЛИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

ГЕНЧО С. СКОРДЕВ

Дается обобщение теорем Лефшеца о совпадении и косовпадении для многозначных ациклических отображений многообразий.

Задача о нахождений неподвижных точек непрерывных отображений обобщается в двух направлениях: о совпадении и косовпадении двух непрерывных отображений, см [1], гл. 8, § 5, гл. 5, § 3.

Пусть $X$ и $Y$ — топологические пространства и $f: X \to Y$ $g: Y \to X$ — отображения (многозначные). Говорим, что $f$ и $g$ имеют совпадение, если существуют точки $x \in X$ и $y \in Y$ такие, что $y \in f(x)$, $x \in g(y)$. Наличие совпадения у отображений $f$ и $g$ эквивалентно существованию неподвижнной точки у отображения $gf: X \to X$. Если $f$ и $g$ суть однозначные отображения, в этом случае задача о совпадении просто совпадает с задачей о неподвижных точек для однозначных непрерывных отображениях. Если $f$ и $g$ ациклические отображения, то отображение $gf$ не должно быть ациклическим, следовательно, задача о совпадений двух ациклических отображений есть задача о неподвижных точках для отображений, которые суть суперпозиции ациклических. Полученная ниже теорема совпадении можно рассматривать как теорема Лефшеца для суперпозиции ациклических отображений. В классе метризуемых пространств этот вопрос изучался в [3]. Об ациклических отображениях см. [2], там же приведена и обширная библиография.

Если $\varphi, \psi: X \to Y$, то будем говорить, что $\varphi$ и $\psi$ имеют косовпадение, если существует точка $x \in X$ такая, что выполнено $\varphi(x) \cap \psi(x) \neq \emptyset$.

Вопрос о косовпадении однозначных отображений изучался в [1], гл. 8, § 5. Ниже мы рассматриваем задачу о косовпадении двух ациклических отображений. Доказанная теоремма есть обобщение теоремы (29.12), гл. 8, § 5, т. 29 из [1].

Основные результаты этой заметки без доказательства были опубликованы в [5].

I. Однозначное непрерывное отображение $\varphi: Z_1 \to Z_2$ будем называть Вьеторисовым, если

а. $Z_1$ и $Z_2$ суть компакты.

б. $\varphi(Z_1) = Z_2$.

в. Для любой точки $z \in Z_1$ пространство $\varphi^{-1}(z)$ связно и $H_i(\varphi(z)) = 0$ для $i \geq 1$.

*СЕРДИКА. Българско математическо списание. Том 1, 1975, с. 29—41.*

Здесь и дальше, если не оговорено противное, будем пользоваться гомологиями Александрова — Чеха с рациональными коэффициентами, см. [1], гл. 7.

Напомним, что если $\varphi$ — Вьеторисово, то индуцированный гомоморфизм $\varphi_*: H_*(Z_1) \to H_*(Z_2)$ есть изоморфизм, см. [2], теорема 2.

Нам будет нужна следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $P$ — конечный полиэдр, а $X$ и $Y$ — компакты. Если $f_1: P \to X$, $\varphi: Y \to X$, $f_2: Y \to P$ — непрерывные и однозначные отображения, а $\varphi$ — Вьеторисово и $\sum_p (-1)^p \operatorname{tr} f_{2p}\varphi_{1p}^{-1} f_{1p} \neq 0$, то существует точка $x \in P$, такая, что $x \in f_2\varphi^{-1}f_1(x)$.*

Здесь $f_{i*} = \{f_{ip}\}$, $\varphi_* = \{\varphi_p\}$ — индуцированные гомоморфизмы в гомологиях отображениями $f_i$ и $\varphi$ соответственно, а $\operatorname{tr} f_{2p}\varphi_p^{-1}f_{1p}$ — след линейного отображения $f_{2p}\varphi_p^{-1}f_{1p}$.

Сначала мы построим цепное отображение $\chi_*: C_*(p, \tau) \to C_*(p, \tau)$, индуцирующее в гомологиях гомоморфизм $f_{2*}\varphi_* f_{1*}^{-1}$. Здесь $\tau$ — триангуляция $P$, а $C_*(p, \tau)$ — цепной комплекс триангуляции $\tau$.

Пусть $s$ — целое положительное число. Через $\tau^s$ будем обозначать $s$-ое барицентрическое подразделение триангуляции $\tau$. Через $\operatorname{St}_s P$ обозначим покрытие пространства $P$, составленное из главных звезд триангуляции $\tau^s$. Покрытие из главных звезд $\tau$ будем обозначать через $\operatorname{St} P$; $C_*(P, \tau^s)$ будет цепной комплекс триангуляции $\tau^s$.

Если $Z$ — пространство, то пусть $\operatorname{Cov}(Z)$ есть множество всех конечных и открытых покрытий пространства $Z$. Пусть $\omega \in \operatorname{Cov}(Z)$, через $C_*(Z, \omega)$ обозначим цепной комплекс $\omega$-цепей Вьеториса пространства $Z$*. Если $A \subset Z$ и $\omega \in \operatorname{Cov}(Z)$, то $\operatorname{St}(A, \omega)$ есть звезда множества $A$ относительно покрытия $\omega$. Если $a$-вершина $\tau^s$, то через $\operatorname{St}(a, \tau^s)$ будем обозначать звезду точки $a$ относительно $\tau^s$.

Пусть $\varphi: Y \to X$ есть Вьеторисовое отображение. Так как мы пользуемся гомологиями Александрова — Чеха с рациональными коэффициентами, то $\varphi$ есть $n$ — Вьеторисово для любого $n$**.

Пусть $n = \dim P$. В лемме 2 [2] — доказано, что если $\widetilde{\omega} \in \operatorname{Cov}(X)$ и $\hat{\omega} \in \operatorname{Cov}(Y)$, и $\hat{\omega}$ вписано в $\varphi^{-1}\widetilde{\omega}$, то существуют покрытие $R = R(\widetilde{\omega}, \hat{\omega}) \in \operatorname{Cov}(X)$ и цепное отображение $T(\widetilde{\omega}, \hat{\omega})$, $(n+1)$-мерного остова $C_*(X, R)$ в $C_*(Y, \hat{\omega})$ удовлетворяющие следующим условиям:

1. Покрытие $R(\widetilde{\omega}, \hat{\omega})$ — вписано в $\widetilde{\omega}$.
2. Для любого $k$-мерного симплекса $\sigma^k \in C_*(X, R)$, $0 \leq k \leq n+1$, цепь $\varphi T(\widetilde{\omega}, \hat{\omega})\sigma^k$ есть барицентрическое подразделение $\delta\sigma^k$ симплекса $\sigma^k$ с диаметром меньше $\hat{\omega}$, последнее означает, что носитель цепи $\delta\sigma^k$ содержится в некотором элементе покрытия $\hat{\omega}$.
3. Для любого симплекса $\sigma^k \in C_*(X, R)$, $0 \leq k \leq n+1$, существует точка $x_0 \in X$ такая, что 3а. $\operatorname{St}(x_0, \widetilde{\omega}) \supset \sigma^k$. 3б. Носитель цепи $T(\widetilde{\omega}, \hat{\omega})\sigma^k$ содержится в $\operatorname{St}(\varphi^{-1}(x_0), \hat{\omega})$.

* О цепях, циклов и гомологии Вьеториса см. [1], гл. 7, § 5, § 6 для метризуемых компактов и [2, 3] для компактов.

** Об определении $n$-Вьеторисовых отображений см. [2].

Условие 3б. не сформулированно в лемме 2 из [2], но следует из ее доказательства.

Пусть, теперь, $\eta_k=\{\eta_k(\omega)\}$ есть цикл Вьеториса пространства $P$ и $\bar{\eta}_k$ — его гомологический класс, $0\leq k\leq n$, $\omega\in\mathrm{Cov}(P)$. Положим $\xi_k(\tilde{\omega})=f_1\eta_k(f_1^{-1}\tilde{\omega})$ и получим цикл Вьеториса $\xi_k=\{\xi_k(\tilde{\omega})\}$ пространства $X$, чей гомологический класс есть $f_{1k}\bar{\eta}_k$.

Любому покрытию $\hat{\omega}\in\mathrm{Cov}(Y)$ сопоставим покрытие $\tilde{\omega}(\hat{\omega})$, такое, что $\hat{\omega}$ вписано в $\varphi^{-1}\tilde{\omega}(\hat{\omega})$. Пусть $\Gamma_k(\hat{\omega})=T(\tilde{\omega}(\hat{\omega}),\hat{\omega})\xi_k(R)$, где $R=R(\tilde{\omega}(\hat{\omega}),\hat{\omega})$. В [2], § 5, доказано, что $\Gamma_k=\{\Gamma_k(\hat{\omega})\}$ есть цикл Вьеториса пространства $Y$ и его гомологический класс есть $\varphi_k^{-1}f_{1k}\bar{\eta}_k$. Рассмотрим $\zeta_k=\{\zeta_k(\omega)\}$, где $\zeta_k(\omega)=f_2\Gamma_k(f_2^{-1}\omega)$. $\zeta_k$ есть цикл Вьеториса пространства $P$, чей гомологический класс есть $f_{2k}\varphi_k^{-1}f_{1k}\bar{\eta}_k$.

Пусть $\omega\in\mathrm{Cov}(P)$ и $\tau^{l(\omega)}$ — столь мелкое барицентрическое подразделение триангуляции $\tau$, что покрытие $\mathrm{St}_{l(\omega)}P$ — звездно вписано в $\omega$. Имеем цепное отображение „$l(\omega)$-ое барицентрическое подразделение цепей“ $\tilde{\chi}(\omega)_*:C_*(P,\tau)\to C_*(P,\tau^{l(\omega)})$, см. [1], гл. 4, § 7.

Через $\psi(\omega)_*:C_*(P,\tau^{l(\omega)})\to C_*(P,\omega)$ обозначим следующее цепное отображение: если $\sigma^k=(a_0,\ldots,a_k)$ есть $k$-мерный симплекс триангуляции $\tau^{l(\omega)}$, то пусть $\psi(\omega)_k(\sigma^k)=(a_0,\ldots,a_k)$. Тогда положим $\chi(\omega)_*=\psi(\omega)_*\tilde{\chi}(\omega)_*$.

Отметим, что если $a^k\in C_k(P,\tau)$ есть $k$-мерный цикл триангуляции $\tau$, то $\chi_k(a^k)=\{\chi(\omega)_k(a^k)\}$ есть цикл Вьеториса, чей гомологический класс совпадает с гомологическим классом цикла $a^k$.

Нам будет нужно еще и цепное отображение $\theta(\omega_1)_*:C_*(P,\mathrm{St}_1P)\to C_*(P,\tau)$. Пусть $c^0$ — вершина $C_*(P,\mathrm{St}_1P)$ и $U$ есть элемент $\mathrm{St}_1P$, содержащий $c^0$. Если $b^0$ есть вершина триангуляции $\tau$ такая, что $U\subset\mathrm{St}(b^0,\tau)$, то $\theta(\omega_1)_0(c^0)=b^0$. Если $\delta^k$ есть $k$-мерный симплекс $C_k(P,\mathrm{St}_1P)$, $\delta^k=(b^0,\ldots,b^k)$, то

$$\theta(\omega_1)_k(\delta^k)=\begin{cases}(\theta(\omega_1)_0(b^0),\ldots,\theta(\omega_1)_0(b^k)), & \text{если } (\theta(\omega_1)_0(b^0),\ldots,\theta(\omega_1)_0(b^k))\\ & \text{не вырождается;}\\ 0, & \text{если } (\theta(\omega_1)_0(b^0),\ldots,\theta(\omega_1)_0(b^k))\\ & \text{вырождается.}\end{cases}$$

Теперь определим цепное отображение $\varkappa_*$. Пусть $\omega_1=\mathrm{St}_1P$ и $\hat{\omega}_1\in\mathrm{Cov}(Y)$ — вписано в $f_2^{-1}\omega_1$. Через $\tilde{\omega}_1$ обозначим покрытие, вписанное в $\varphi^{-1}\hat{\omega}_1$, а через $\omega_2$ покрытие пространства $P$, вписанное в $f_1^{-1}R(\tilde{\omega}_1,\hat{\omega}_1)$.

Тогда $\varkappa_*=\theta(\omega_1)_*f_2T(\tilde{\omega}_1,\hat{\omega}_1)f_1\chi(\omega_2)_*$.

Пусть $\varkappa_*:H_*(P)\to H_*(P)$ — гомоморфизм, индуцированный цепным отображением $\varkappa_*$. Проверим, что $\varkappa_*=f_{2*}\varphi_*^{-1}f_{1*}$.

Пусть $\alpha\in H_k(P)$ и $a$ — цикл, принадлежащий $\alpha$. Рассмотрим $\chi_k(a)$ — это есть $k$-мерный цикл Вьеториса пространства $P$ и его гомологический класс есть $\alpha$. Если $\tilde{\omega}\in\mathrm{Cov}(X)$ и $f_1(a)(\tilde{\omega})=f_1\chi(f_1^{-1}\tilde{\omega})a$, то $\{f_1(a)(\tilde{\omega})\}$ есть цикл Вьеториса и его гомологический класс есть $f_{1k}\alpha$. Пусть $\hat{\omega}\in\mathrm{Cov}(Y)$ и покрытие $\tilde{\omega}(\hat{\omega})$ вписано в $\varphi^{-1}\hat{\omega}$. Рассмотрим $\{T(\tilde{\omega}(\hat{\omega}),\hat{\omega})f_1(a)(\tilde{\omega})\}$ — это есть цикл Вьеториса пространства $Y$ и его гомологический класс есть $\varphi_k^{-1} f_{1k}\, a$. Пусть наконец $\omega \in \mathrm{Cov}\,(P)$, тогда если $\hat{\omega}_1$ есть покрытие $f_2^{-1}\omega$, вписанное в $f_2^{-1}\omega$, то $\{f_2 T(\widetilde{\omega}(\hat{\omega}_1), \hat{\omega}_1) f_1(a)(\widetilde{\omega})\}$ — цикл Вьеториса и его гомологический класс есть $f_{2k}\, \varphi_k^{-1} f_{1k}$. Гомологический класс цикла $\{f_2 T(\widetilde{\omega}(\hat{\omega}_1), \hat{\omega}_1) f_1(a)(\widetilde{\omega})\}$ совпадает с гомологическим классом цикла $\varkappa_*(a)$. Тем самым $\varkappa_*(a) = f_{2k}\, \varphi_k^{-1} f_{1k}\,(a)$.

При определении $\varkappa_*$ наверху мы требовали, чтобы $\hat{\omega}$ было вписано в $f_2^{-1}\, \omega_1$ и в $\varphi^{-1} \widetilde{\omega}_1$. Теперь пусть еще выполнены и условия:

а. Если $U \in \widetilde{\omega}_1$, то существует точка $x(U) \in U$, такая что

$$\varphi^{-1}(U) \subset \mathrm{St}\,(\varphi^{-1}(x(U)),\ \hat{\omega}_1),$$
$$f_1^{-1}(U) \subset \mathrm{St}\,(f_1^{-1}(x(U)),\ \tau^1).$$

Вспомним, что $\Sigma\ (-1)^p\, \mathrm{tr}\, f_{2p}\, \varphi_p^{-1} f_{1p} \neq 0$. Следовательно, $\wedge(\bar{\varkappa}_*) = \Sigma(-1)^p\, \mathrm{tr}\, \bar{\varkappa}_p \neq 0$. Так как $\bar{\varkappa}_*$ — индуцированно $\varkappa_*$, то $\wedge(\bar{\varkappa}_*) = \Lambda(\varkappa_*) = \Sigma(-1)^p\, \mathrm{tr}\, \varkappa_p$, см. [1], гл. 5, § 22.

И так имеем $\wedge(\varkappa_*) \neq 0$. Следовательно, существует симплекс $\sigma^s$ триангуляции $\tau$, принадлежащий носителю цепи $\varkappa_s(\sigma^s)$. Из этого получаем: найдется симплекс $v^4$ триангуляции $\tau^{l(\omega_1)}$, такой, что носитель цепи $T(\widetilde{\omega}_1, \hat{\omega}_1) f_1\, v^4$ содержит симплекс $v^2$ и $f_2 v^2 = v^1$, $\theta(\omega_1)_s\, v^1 = \sigma^s$. Пусть $v^3 = f_1 v^4$ и $v^i = (v_0^i, \ldots, v_s^i)$, $i = 1, \ldots, 4$.

Из леммы 2 в [2] следует, что существует точка $x_0 \in X$, такая что $\mathrm{St}\,(x_0,\ \widetilde{\omega}_1) \supset v_0^3$, т. е. найдется элемент $U$ покрытия $\widetilde{\omega}_1$, содержащий $x_0$ и $v_0^3$ Имеем $\varphi^{-1}(U) \subset \mathrm{St}\,(\varphi^{-1}(x(U)),\ \hat{\omega}_1)$ и, следовательно, $\varphi^{-1}(x_0)$ и $\varphi^{-1}(v_0^3)$ содержатся в $\mathrm{St}\,(\varphi^{-1}(x(U)),\ \hat{\omega}_1)$. Тогда $f_2\, \varphi^{-1}(v_0^3) \subset \mathrm{St}\,(f_2\, \varphi^{-1}(x(U)),\ \tau^1)$. Кроме того, носитель цепи $T_1 v^3$ содержится в $\mathrm{St}\,(\varphi^{-1}(x_0),\ \hat{\omega}_1)$; последнее множество содержится в $\mathrm{St}^2\,(\varphi^{-1}(x(U)),\ \hat{\omega}_1)$. Тем самым $|f_2 T_1 v^3|$ — носитель цепи $f_2 T_1 v^3$, содержится в $\mathrm{St}^2\ (f_2\, \varphi^{-1}(x(U)),\ \tau^1)$. Вспомним, что имеем $|x_s(\sigma^s)| \supset \sigma^s$, следовательно, $\sigma^s \subset \mathrm{St}^3\ (f_2\, \varphi^{-1}\ (x(U)),\ \tau)$. Так как $f_1^{-1}(U) \subset \mathrm{St}\,(f_1^{-1}(x(U)),\ \tau)$, и $U \supset v^3$, то найдется точка $z_\tau \in f_1^{-1}(x(U))$ такая, что $\mathrm{St}\,(v_0^4,\ \tau^1) \supset z_\tau$. Наконец, имеем еще $v_0^4 \in \sigma^s$ и получаем

$$z_\tau \in \mathrm{St}^4\,(f_2\, \varphi^{-1} f_1(z_\tau),\ \tau). \tag{*}$$

И так, доказано, что для любой триангуляции $\tau$ симплициального комплекса $P$ существует точка $z_\tau$ такая, что выполнено (*). Так как $P$ — компакт, то отсюда следует существование такой точки $z \in P$, что $z \in f_2 \varphi^{-1} f_1(z)$. Лемма 1 доказана.

При помощи подобных рассуждений доказывается несколько более сильная лемма.

Лемма 1'. *Пусть $P$ — конечный симплициальный комплекс, $f_1 : P \to X_1$, $\varphi_i : Y_i \to X_i$, $\psi_i : Y_i \to X_{i+1}$, $0 \leq i \leqq n-1$, $\psi_n : Y_n \to P$, где*

1. *$f_1$, $\psi_i$, $\varphi_i$ — непрерывые однозначные отображения;*

2. *$\varphi_i$ — Вьеторисовые отображения.*

Если $F = \psi_n \ldots \psi_2\, \varphi^{-1} \psi_1\, \varphi_1^{-1} f_1$ и $\wedge(F) \neq 0$, *то существует $z \in P$ такая, что $z \in F(z)$.*

При этом $\wedge(F)$ определяется следующим образом. Если $f_{1*}$, $\psi_{i*}$, $\varphi_{i*}$ — гомоморфизмы, индуцированные $f_1$, $\psi_i$, $\varphi_i$, то положим $F_* = \psi_{n*} \ldots \psi_{1*} \varphi_{1*}^{-1} f_{1*}$, тогда $\wedge(F) = \Sigma(-1)^p \operatorname{tr} F_i$, где $F_* = \{F_i\}$. Многозначное отображение $\Phi: P \to P$ будем называть **допустимым**, если существуют компакты $X_i$, $i = 1, \ldots, n$, и ациклические отображения $F_j: X_j \to X_{j+1}$, $j = 1, \ldots, n-1$, такие, что $\Phi = F_{n-1} \ldots F_1$ и $X_n = P$, $X_1 = P$. Для допустимых отображений определяется стандартным способом индуцированный гомоморфизм $\Phi_* = F_{n-1_*} \ldots F_{1*}$, где $F_{i*}$ — индуцированный гомоморфизм отображением $F_i$. Положим $\wedge(\Phi) = \Sigma(-1)^p \operatorname{tr} \Phi_p$.

Предложение 1. *Если $\Phi: P \to P$ — допустимое отображение и $\wedge(\Phi) \neq 0$, то $\Phi$ имеет неподвижную точку, т. е. существует $z \in P$, такая что $z \in \Phi(z)$.*

Это предложение следует непосредственно из леммы 1.

Пусть $E_1$, $E_2$ — отделимые локально-выпуклые пространства $U \subset E_1$, $V \subset E_2$ — открытые подмножества, а $F: U \to V$, $G: V \to U$ — ациклические отображения, которые точкам ставят в соответствие компакты. Кроме того предположим, что $G(V) \subset K \subset U$ и $K$ — компакт, т. е., что отображение $G$ — компактно.

Напомним, что $\Phi: X \to Y$ называется **ациклическим**, если $\Phi$ полунепрерывно сверху и любой точке $x \in X$ ставит в соответствие ациклический компакт. Здесь мы будем пользоваться когомологиями Гротендика — Годемана с рациональными коэффициентами, см. [8].

Через $\Gamma(F)$ и $\Gamma(G)$ обозначим графики отображения $F$ и $G$, соответственно, т. е. $\Gamma(F) = \{(x, y) \in U \times V : y \in F(x)\}$, $\Gamma(G) = \{(v, u) \in V \times U : u \in G(v)\}$. Пусть $p_1: \Gamma(F) \to U$, $p_2: \Gamma(F) \to V$, $\pi_1: \Gamma(G) \to V$, $\pi_2: \Gamma(G) \to U$ — проекции, т. е. $p_i(x_1, x_2) = x_i$, $\pi_i(v_1, v_2) = v_i$, $i = 1, 2$. Так как $F$ и $G$ — полунепрерывные отображения, ставящие в соответствие точкам компакты, то отображения $p_1$ и $\pi_1$ суть совершенные отображения. По теореме Вьеториса — Бегла $p_1^*: H^*(\Gamma(F)) \to H^*(U)$, $\pi_1^*: H^*(\Gamma(G)) \to H^*(V)$ суть изоморфизмы, см. [8]. Здесь $p_1^*$ и $\pi_1^*$ — гомоморфизмы, индуцированные $p_1$ и $\pi_1$, соответственно. Если $p_2^*$ и $\pi_2^*$ суть гомоморфизмы, индуцированные $p_2$ и $\pi_2$, соответственно, положим $F^* = (p_1^*)^{-1} p_2^*$, $G^* = (\pi_1^*)^{-1} \pi_2^*$ и $\Phi^* = F^* G^*$.

Покажем, что можно определить обобщенное число Лефшеца $\lambda(\Phi)$. (Об обобщенном числе Лефшеца см. [7].)

Действительно, так как $K$ — компакт и $K \subset U$, существует конечное число открытых и выпуклых множеств $U_1, \ldots, U_s$, такие, что

а. $U_i \subset U$, $i = 1, \ldots, s$.

б. $\bigcup_1^s U_i \subset K$.

Пусть $\widetilde{U} = \bigcup_1^s U_i$. При помощи теоремы Мейера—Вьеториса получим $\dim H^*(\widetilde{U}) < \infty$, см. [8]. Через $i_{\widetilde{U}}: \widetilde{U} \to U$ обозначим тождественное вложение $\widetilde{U}$ и $U$. Имеем следующую диаграмму:

(1)
$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{U} \arrow[r, "i_{\widetilde{U}}"] & U' \\
\widetilde{U} \arrow[u, "\Phi_3"] \arrow[r, "i_{\widetilde{U}}"] & U \arrow[u, "\Phi"'] \arrow[ul, "\Phi_1"']
\end{tikzcd}
$$

Здесь $\Phi_1 = \Phi: \quad U \to \widetilde{U}, \Phi_2 = \Phi : U \to K,\ \Phi_3 = \Phi_1 | \widetilde{U} : \widetilde{U} \to \widetilde{U}, \Phi_4 = \Phi_2 | K : K \to K$

Проверим, что следующая диаграмма коммутативна:

(2)
$$
\begin{tikzcd}
H^*(\widetilde{U}) \arrow[d, "\Phi_3^*"'] \arrow[dr, "\Phi_1^*"] & H^*(U) \arrow[l, "i_{\widetilde{U}}^*"'] \arrow[d, "\Phi^*"] \\
H^*(\widetilde{U}) & H^*(U) \arrow[l, "i_{\widetilde{U}}^*"]
\end{tikzcd}
$$

Диаграмма (2) получается из (1) применением когомологического функтора Гротендика — Годемана.

Коммутативность верхнего треугольника (2) следует из

(3)
$$G_1^* i_{\widetilde{U}}^* = G^*,$$

где $G_1 = G: V \to \widetilde{U}$.

Равенство (3) следует из коммутативной диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[d, equal, "\mathrm{id}"'] & \Gamma(G_1) \arrow[l, "\pi_1(\widetilde{U})"'] \arrow[r, "\pi_2(\widetilde{U})"] & \widetilde{U} \arrow[d, "i_{\widetilde{U}}"] \\
V & \Gamma(G) \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & U.
\end{tikzcd}
$$

Здесь $\pi_i(\widetilde{U})$, $i = 1, 2$, суть проекции графика $\Gamma(G_1)$ отображения $G_1$.

Проверим, что нижний трегольник диаграммы (2) коммутативен. Пусть $F_1 = F | \widetilde{U} : \widetilde{U} \to V$. Тогда, если

(4)
$$i_{\widetilde{U}}^* F^* = F_1^*,$$

то
$$\Phi_3^* = i_{\widetilde{U}}^* \Phi_1^*.$$

Равенство (4) следует из коммутативности диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{U} \arrow[d, "i_{\widetilde{U}}"'] & \Gamma(F_1) \arrow[l, "p_1(\widetilde{U})"'] \arrow[r, "p_2(\widetilde{U})"] & V \arrow[d, equal, "\mathrm{id}"] \\
U & \Gamma(F) \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & V.
\end{tikzcd}
$$

Здесь $\Gamma(F_1)$ — график отображения $F_1$, а $p_i(\widetilde{U})$, $i=1, 2$, проекции $\Gamma(F_1)$ на $\widetilde{U}$ и $V$, соответственно.

Из коммутативности (2) и из $\dim H^*(\widetilde{U})<\infty$ следут, что $\lambda(\Phi^*)$ существует и $\lambda(\Phi^*)=\bigwedge(\Phi_3^*)$, см. [7].

Наверху мы конструировали $\lambda(\Phi^*)$ при помощи $\widetilde{U}$. Проверим, что $\lambda(\Phi^*)$ не зависит от $\widetilde{U}$.

Действительно, рассмотрим диаграмму

(5)
$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i_K"] & U \\ K \arrow[u, "\Phi_4"] \arrow[r, "i_K"] & U \arrow[u, "\Phi"'] \arrow[ul, "\Phi_2"'] \end{tikzcd}.$$

Здесь $i_K: K\to U$ — тождественное вложение $K$ в $U$.

Из (5) получаем

(6)
$$\begin{tikzcd} H^*(K) \arrow[d, "\Phi_4^*"'] \arrow[dr, "\Phi_2^*"] & H^*(U) \arrow[l, "i_K^*"'] \arrow[d, "\Phi^*"] \\ H^*(K) & H^*(U) \arrow[l, "i_K^*"] \end{tikzcd}.$$

Проверим, что (6) — коммутативна.

Если

(7)
$$G_2^* i_K^* = G^*,$$

то $\Phi_2^* i_K^* = \Phi^*$. Здесь $G_2 = G: V\to K$.

Равенство (7) следует из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} U & \Gamma(G) \arrow[l, "q_2"'] \arrow[r, "q_1"] & V \\ K \arrow[u, "i_K"] & \Gamma(G_2) \arrow[l, "q_2(K)"'] \arrow[r, "q_1(K)"] & V. \arrow[u, equal, "\mathrm{id}"'] \end{tikzcd}$$

Здесь $\Gamma(G_2)$ — график отображения $G_2$, а $q_i(K)$, $i=1, 2$ — проекции.

Проверим равенство

(8)
$$i_K^* \Phi_2^* = \Phi_4^*.$$

Если $F_2 = F \mid K: K\to V$, то $\Phi_4^* = F_2^* G_2^*$ и тогда из

(9)
$$i_K^* F^* = F_2^*$$

будет выполнено и (8).

Равенство (9) получим из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[d, "i_K"'] & \Gamma(F_2) \arrow[l, "p_1(K)"'] \arrow[r, "p_2(K)"] & V \arrow[d, equal, "\mathrm{id}."] \\
U & \Gamma(F) \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & V
\end{tikzcd}$$

Здесь $\Gamma(F_2)$ — график $F_2$, а $p_i(U)$ — проекции.

И так, диаграмма (6) — коммутативна. Следовательно,

$$\lambda(\Phi_4^*)=\lambda(\Phi^*).$$

Напомним одну лемму из [5].

Через $\mathfrak{A}(E_1)$ обозначим базис из симметрических окружений равномерной структуры линейного пространства $E_1$. Пусть $\mathfrak{A}\in\mathfrak{A}(E_1)$. Существует однозначное, непрерывное отображение $\mu_{\mathfrak{A}}:K\to P$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $P$ — конечный симплициальный комплекс, лежащий в $U$;
2. $(x,\ \mu_{\mathfrak{A}}(x))\in\mathfrak{A}$ для любой точки $x\in K$;
3. $\mu_{\mathfrak{A}}^* i_p^*=i_K^*$.

Здесь $i_p:P\to U$ — тождественное вложение $P$ в $U$.

Рассмотрим $P$ и отображение $\psi:P\to P$, где $\psi=\mu_{\mathfrak{A}}\Phi_5$, а $\Phi_5=\Phi_2\mid P:P\to K$. Определим $\psi^*$ следующим образом: имеем $\Phi_5=G_2F_3$, тогда пусть $\psi^*=F_3^*G_2^*\mu_{\mathfrak{A}}^*$.

Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
H^*(P) \arrow[d, "\psi^*"'] \arrow[dr, "F^*G_2^*\mu_{\mathfrak{A}}^*"] & H^*(U) \arrow[l, "i_P^*"'] \arrow[d, "\Phi^*"] \\
H^*(P) & H^*(U) \arrow[l, "i_P^*"]
\end{tikzcd} \tag{10}$$

Если (10) — коммутативна, то $\wedge(\psi^*)=\lambda(\Phi^*)$. Здесь $\wedge(\psi)$ — число Лефшеца $\psi$.

Проверим коммутативность (10).

Имеем $F^*G_2^*\mu^*i_p^*=F^*G_2^*i_k^*$, кроме того $\Phi^*=F^*G^*$, а из (7) получаем $F^*G_2^*\mu^*i_p^*=\Phi^*$, т. е. верхний треугольник диаграммы (10) — коммутативен.

Рассмотрим нижний треугольник (10). Проверим, что

$$i_p^*F^*G_2^*\mu^*=F_3^*G_2^*\mu^*. \tag{11}$$

Для выполнения (11) достаточно, чтобы было выполнено

$$i_p^*F^*=F_3^*. \tag{12}$$

Равенство (12) следует из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} P & \xleftarrow{p_1(P)} & \Gamma(F_3) & \xrightarrow{p_2(P)} & V \\ i_p\downarrow & & & & | \\ U & \xleftarrow{p_1} & \Gamma(F) & \xrightarrow{p_2} & V. \end{array}$$

Здесь $\Gamma(F_3)$ — график отображения $F_3$, а $p_i(P)$, $i=1, 2$ — проекции.

Итак, имеем $\bigwedge(\psi)=\bigwedge(\Phi^*)$.

Предположим, что $\lambda(\Phi)\neq 0$. Тогда $\bigwedge(\psi)\neq 0$. Из леммы 1′ получается, что существует точка $z_{\mathfrak{A}}\in\psi(z_{\mathfrak{A}})$, т. е. $z_{\mathfrak{A}}\in\mu_{\mathfrak{A}}\Phi_5(z_{\mathfrak{A}})$. Пусть $x_{\mathfrak{A}}\in\Phi_5(z_{\mathfrak{A}})$ и $\mu_{\mathfrak{A}}(x_{\mathfrak{A}})=z_{\mathfrak{A}}$. Рассмотрим последовательность $\{x_{\mathfrak{A}}\}$, $x_{\mathfrak{A}}\in K$, $\mathfrak{A}\in\mathfrak{A}(E_1)$. Так как $K$ — компакт, то без ограничения общности можем считать, что эта последовательность сходится. Пусть $x_0$ есть предел последовательности $\{x_{\mathfrak{A}}\}$, очевидно, $x_0\in K$. Имеем $(x_{\mathfrak{A}}, \mu_{\mathfrak{A}}(x_{\mathfrak{A}}))\in\mathfrak{A}$, следовательно, последовательность $\{z_{\mathfrak{A}}\}$ тоже сходится, и ее предел есть $x_0$. Вспомним, что $x_{\mathfrak{A}}\in\Phi_5(z_{\mathfrak{A}})$. Так как $\Phi_5$ — полунепрерывно сверху, то $x_0\in\Phi_5(x_0)$. Наконец, имеем $\Phi_5(x_0)=\Phi(x_0)$.

Тем самым нами доказано следующее

Предложение 2. *Пусть $E_i$, $i=1, 2$ — отделимые локально выпуклые пространства и $U\subset E_1$, $V\subset E_2$ — открытые множества. Если $F: U\to V$ и $G: V\to U$ — ациклические отображения, ставящие точкам в соответствие компактные множества, а $G$ — компактное отображение, и $\lambda(FG)\neq 0$, то существует точка $x_0\in U$, такая, что $x_0\in GF(x_0)$. Напомним, что отображение $G$ называется компактным, если $G(V)\subset K\subset U$, а $K$ — компакт.*

Замечания:

1. В случае, когда $U=V$, а $G=\mathrm{id}$, из предложения 2 получаем теорему Лефшеца из [5].

2. Если следовать терминологии Лефшеца, отображения $F$ и $G$ называются инцидентными, если существуют точки $x\in U$ и $y\in V$ такие, что $y\in F(x)$, а $G(y)\ni x$. Так что предложение 2 есть теорема об инцидентности отображений $F$ и $G$.

II. Напомним некоторые определения и обозначения. Будем следовать [1].

Пусть $M$ — конечный симплициальный комплекс с триангуляцией $\mu$. Если $Z$ — цепной комплекс триангуляции $\mu$ с рациональными коэффициентами, то через $Z^*$ обозначим двойственный комплекс, т. е. комплекс коцепей триангуляции $\mu$. При этом будем считать, как в [1], что размерность цепей $Z^*$ — неположительна.

Предположим теперь, что $M$ есть $n$-мерное компактное триангулируемое, ориентируемое многообразие без края и пусть $\mu$ — триангуляция $M$. Рассмотрим взаимный комплекс $\bar{Z}$ ($\bar{Z}$ получается из $Z^*$ с повышением размерности на $n$ единиц). Комплекс $\bar{Z}$ интерпретируется как цепной комплекс клеточного комплекса, составленного из всех барицентрических звезд $M$, сопряженных симплексам триангуляции $\mu$. Припомним, что барицентрическая производная $\bar{Z}'$ комплекса $\bar{Z}$ совпадает с барицентрической производной $Z'$ комплекса $Z$, пусть $\alpha: \bar{Z}'\to Z'$ есть изоморфизм, см. [1], гл. 5, § 4.27. Имеем и цепное отображение — „барицентрическое подразделение цепей“ $\chi: Z\to Z'$, см. [1], гл. 4, § 7.26.

Отметим, что $\chi$ не меняет носителя цепи. Действительно, если $\sigma$ — симплекс $Z$, то $\chi(\sigma)$ есть цепь, являющаяся линейной комбинацией симплексов барицентрического подразделения $\sigma$. Цепной изоморфизм $\alpha$ тоже не меняет носителя цепей.

Цепное отображение $\chi: Z \to Z'$ индуцирует двойственное отображение $\chi^*: Z'^* \to Z^*$. Повысив размерности на $n$ единиц из $\chi^*$, получим $\bar{\chi}: \bar{Z}' \to \bar{Z}$.

Пусть $'\bar{\sigma}^{n-p}$ симплекс $\bar{Z}'$, тогда $\bar{\chi}('\bar{\sigma}^{n-p}) \in \bar{Z}$. Симплексу $'\bar{\sigma}^{n-p}$ соответствует симплекс $'\sigma^p \in Z'^*$ и если $\widetilde{\sigma}_p \in Z^*$, то $\widetilde{\sigma}_p \in \chi^*('\sigma_p)$ тогда и только тогда, когда $\chi(\widetilde{\sigma}^p) \ni {'\sigma^p}$. При этом здесь $(\widetilde{\sigma}^p, \widetilde{\sigma}_p) = ('\sigma^p, '\sigma_p) = 1$, а $(\widetilde{\sigma}^p, \widetilde{\sigma}_p)$ и $('\sigma^p, '\sigma_p)$ — индексы Кронекера.

Так, что если $\bar{\sigma}^{n-p} \in \bar{Z}$ и $\bar{\sigma}^{n-p}$ принадлежит цепи $\bar{\chi}('\bar{\sigma}^{n-p})$, то $\bar{\sigma}^{n-p}$ есть двойственная звезда $\widetilde{\sigma}_p$, т. е. получаем

$$|\bar{\chi}\alpha\chi(\sigma^p)| \subset \mathrm{St}(\sigma^p, \mu).$$

Отметим, что цепное отображение $\eta = \bar{\chi}\alpha\chi$ индуцирует изоморфизм двойственности Пуанкаре $\eta_i = D_i(M): H_i(M) \to H^{n-i}(M)$.

Рассмотрим цепное отображение $\tau: Z' \to Z$ — „укрупнение цепей", см. [1], гл. 4, § 7. 26. Цепное отображение $\tau$ индуцировано следующим симплициальным отображением. Пусть первое барицентрическое подразделение $\mu$ обозначим через $\mu'$. Триангуляции $\mu$ и $\mu'$ определяются нервами $N(\mathrm{St}\, M)$ и $N(\mathrm{St}_1\, M)$, соответственно. Напомним, что $\mathrm{St}\, M$ и $\mathrm{St}_1\, M$ — покрытия, составленные из главных звезд триангуляции $\mu$ и $\mu'$, соответственно. Имеем симплициальное отображение $\widetilde{\tau}: N(\mathrm{St}_1\, M) \to N(\mathrm{St}\, M)$. Оно определяется следующим образом. Пусть $a$ — вершина $\mathrm{St}_1\, M$ (открытая главная звезда $\mu'$); $a$ содержится в некоторой открытой звезде вершины $b$ триангуляции $\mu$. Положим $\widetilde{\tau}(a) = b$. Симплициальное отображение $\widetilde{\tau}$ индуцирует цепное отображение $\tau$.

Пусть $'\sigma^p$ — симплекс $Z'$ с носителем $\sigma^p$, где $\sigma^p$ — симплекс $Z$. Тогда $\tau('\sigma^p) \subset \sigma^p$.

Цепное отображение $\tau$ индуцирует двойственное отображение $\tau^*: Z^* \to Z'^*$, при этом $'\sigma_p \in \tau^*(\sigma_p)$, тогда и только тогда, когда $\tau('\sigma^p) \ni \sigma^p$. Повысим размерности на $n$ единиц и получим $\bar{\tau}: \bar{Z} \to \bar{Z}'$. Имея ввиду реализацию $\bar{Z}'$, получаем $|\bar{\tau}(\bar{\sigma}^{n-p})| \subset \mathrm{St}\sigma^p$; здесь $(\sigma^p, \bar{\sigma}^{n-p}) = 1$.

Рассмотрим цепное отображение $\bar{\eta} = \tau\alpha\bar{\tau}$; имеем

$$|\bar{\eta}(\bar{\sigma}^{n-p})| \subset \mathrm{St}^2\sigma^p.$$

Отметим, что цепное отображение $\bar{\eta}$ индуцирует изоморфизм двойственности Пуанкаре $D^i(M): H^{n-i}(M) \to H_i(M)$.

Пусть теперь $F_i: M \to N$ — полунепрерывные сверху отображения, которые точкам ставят в соответствие ациклические компакты, т. е. $F_i$ — ациклические отображения, $i = 1, 2$. Здесь $N$ — $n$-мерное, компактное, триангулируемое, ориентируемое многообразие без края. Имеем $F_{i*}: H_*(M) \to H_*(N)$ и $F_i^*: H^*(N) \to H^*(M)$, $i = 1, 2$. Напомним определения $F_{i*}$ и $F_i^*$. Если через $\Gamma(F_i)$ обозначим график отображения $F_i$, то пусть

$$p_{i1}: \Gamma(F_i) \to M,\ p_{i2}: \Gamma(F_i) \to N,\ p_{is}(x_1, x_2) = x_s,\ i,\ s = 1, 2.$$

Тогда $F_{i*} = p_{i2*}p_{1i*}^{-1}$, а $F_i^* = (p_{i1}^*)^{-1}p_{i2}^*$.

Рассмотрим следующее линейное отображение:

$$\Xi_i = D^{n-i}(M)F_2^i D_i(N)F_{1i}: H_i(M) \to H_i(M).$$

Здесь $D_i(N): H_i(N) \to H^{n-i}(N)$ — изоморфизм двойственности Пуанкаре.

Числом коинцидентности $F_1$ и $F_2$ называется

$$\wedge(F_1, F_2) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{tr} \Xi_i.$$

Здесь $\operatorname{tr} \Xi_i$ — след линейного отображения $\Xi_i$.

Фиксируем триангуляции $\mu$ и $\nu$ многообразия $M$ и $N$, соответственно. Рассмотрим $F_i: M \to N$, $F_i = p_{i2}p_{i1}^{-1}$. Здесь $p_{i1}$ — Вьеторисовые отображения, а $p_{i2}$ — однозначные. Как в лемме 1 получаем, что существуют цепные отображения

$$\varkappa_i: C_*(M, \mu) \to C_*(N, \nu), \quad i = 1, 2,\ \varkappa_i = \theta\psi_1 p_{i2} T_1 \chi_1.$$

Цепное отображение $\varkappa_2$ индуцирует $\varkappa_2^*: C^*(N, \nu) \to C^*(M, \mu)$ и $\overline{\varkappa}_2: \overline{C_*(N, \nu)} \to \overline{C_*(M, \mu)}$. Здесь как и наверху $\overline{C_*(M, \mu)}$ и $\overline{C_*(N, \nu)}$ суть цепные комплексы, взаимные комплексам $C_*(M, \mu)$ и $C_*(N, \nu)$, соответственно. Кроме того, $\varkappa_2$ индуцирует в гомологиях $F_{2*}$. Тогда $\overline{\varkappa}_2$ индуцирует $F_2^*$. Рассмотрим цепное отображение

$$\beta_* = \overline{\eta}\ \overline{\varkappa}_2\eta\varkappa_1: C_*(M, \mu) \to C_*(M, \mu);$$

оно индуцирует гомоморфизм в гомологиях $\overline{\beta}_* = D^*(M)F_2^*D_*(N)F_{1*}$. Следовательно,

$$\wedge(F_1, F_2) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{tr} \overline{\beta}_i = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{tr} \beta_i,$$

т. е. $\wedge(F_1, F_2)$ есть число Лефшеца цепного отображения $\beta_*$.

Предположим, что $\wedge(F_1, F_2) \neq 0$, тогда $\wedge(\beta_*) \neq 0$.

Воспользуемся цепным отображением $\beta_*$, построенным при некотором специальном выборе триангуляции $\mu$.

Так как $F_i$, $i = 1, 2$, полунепрерывные сверху, то для любой точки $x \in M$ существует окрестность $Ox$ точки $x$ в $M$ такая, что $F_i(Ox) \subset \operatorname{St}(F_i(x), \nu)$. Выберем конечное покрытие $\{Ox_i\}$ из покрытия $\{Ox\}$ и через $\delta$ обозначим число Лебега покрытия $\{Ox_i\}$. Теперь выберем такую триангуляцию $\mu$ многообразия $M$, что для любого симплекса $\sigma$ этой триангуляции $\operatorname{St}^2(\sigma, \mu)$ имеет диаметр меньше $\delta$. Тогда для любого симплекса $\sigma$ триангуляции $\mu$ найдется $i(\sigma)$ такое, что $Ox_{i(\sigma)} \supset \operatorname{St}^2(\sigma, \mu)$ и, следовательно,

$$F_i(\operatorname{St}^2(\sigma, \mu)) \subset \operatorname{St}(F_i(x_{i(\sigma)}), \nu).$$

Теперь пусть $\beta_*$ построено при помощи $\mu$ и $\nu$. Так как $\wedge(\beta_*) \neq 0$, то существует симплекс $x^p$ триангуляции $\mu$ и симплекс $y^p$ триангуляции $\nu$ такие, что

$$y^p \in \varkappa_1(x^p), \tag{2.1}$$

$$x^p \in \overline{\tau a \tau}\, \overline{\varkappa_2}\, \chi a \chi(y^p). \tag{2.2}$$

Из (2.1) получаем: существует симплекс $v^1$, принадлежащий некоторому подразделению симплекса $x^p$ такой, что $|\psi_1 p_{12} T_1 v^1| \ni y^p$. Из леммы 2 [2] следует, что имеем точку $x_0 \in M$ такая, что $\mathrm{St}(x_0, \mu) \supset v^1$ и $|p_{12} T_1 v^1| \subset \mathrm{St}(F_1(x_0), \nu^1)$. Следовательно, $\mathrm{St}(F_1(x_0), \nu) \cap y^p \neq \emptyset$. Отсюда

$$\mathrm{St}(F_1(x_0), \nu) \supset y^p, \tag{2.3}$$

$$\mathrm{St}(x_0, \mu) \supset x^p. \tag{2.4}$$

Рассмотрим (2.2). Если через $\overline{y}^{n-p}$ обозначим двойственную клетку симплекса $y^p$, то имеем

$$\overline{\varkappa}_2 \overline{y}^{n-p} \ni \overline{x}^{n-p}. \tag{2.5}$$

Здесь $\overline{x}^{n-p}$ двойственная клетка симплекса $x^p$.

Из (2.5) получаем

$$\varkappa_2 x^p \ni y^p. \tag{2.6}$$

Из (2.6) имеем, что существует симплекс $w^1$, принадлежащий достаточно мелкому подразделению $x^p$, такой что $|\theta\psi_1 p_{22} T_2 w^1| \supset y^p$, и найдется точка $y_0 \in M$, такая, что

$$\mathrm{St}(y_0, \mu) \supset w^1 \text{ и } |p_{22} T_2 w^1| \subset \mathrm{St}(F_2(y_0), \mu).$$

Отсюда получаем

$$\mathrm{St}(y_0, \mu) \supset x^p, \tag{2.7}$$

$$\mathrm{St}(F_2(y_0), \nu) \supset y^p. \tag{2.8}$$

Из (2.7) и (2.4) имеем $x_0, y_0 \in \mathrm{St}(x^p, \mu)$. Вспомним, что $\mu$ выбрано так, что $\mathrm{St}(x^p, \mu)$ содержится в некотором множестве $Ox_i$. Следовательно,

$$\mathrm{St}(x^p, \mu) \subset Ox_i. \tag{2.9}$$

Из (2.9) и выбора $Ox_i$ получаем

$$F_1(x_0) \subset \mathrm{St}(F_1(x_i), \nu),$$

$$F_2(y_0) \subset \mathrm{St}(F_2(x_i), \nu).$$

Из (2.9) и (2.3) получаем, что

$$\mathrm{St}^2(F_1(x_i), \nu) \cap \mathrm{St}^2(F_2(x_i), \nu) \neq \emptyset. \tag{2.10}$$

Итак, мы получили, что если $\wedge(F_1, F_2) \neq 0$, для любой триангуляции $\nu$ существует точка $x_i \in M$ такая, что выполнено (2.10).

Так как триангуляция $\nu$ произвольна и $M$ и $N$ компактны, а $F_1$ и $F_2$ полунепрерывные сверху, получаем, что существует точка $x \in M$ такая, что $F_1(x) \cap F_2(x) \neq \emptyset$. Следовательно, справедливо следующее

Предложение 3. *Пусть $M$ и $N$ — $n$-мерные компактные триангулируемые топологические многообразия без края, а $F_i : M \to N, i = 1, 2$ —*

*ациклические отображения. Тогда, если* $\wedge(F_1, F_2)\neq 0$, *то существует точка* $x\in M$ *такая, что* $F_1(x)\cap F_2(x)\neq\emptyset$.

Замечания:

1. Если $F_i$, $i=1$, 2, однозначные отображения, предложение 3 доказано в [1].

2. Если многообразия $M$ и $N$ неориентируемые, предложение 3 справедливо, если рассмотрим гомологии и когомологии по модулю два.

3. Предложение 3 справедливо для многозначных отображений $F_1$ и $F_2$, являющихся суперпозициями конечного числа ациклических отображений бикомпактных пространств.

## ЛИТЕРАТУРА


1. С. Лефшец. Алгебраическая топология. Москва, 1949.
2. E. Begle. The Vietoris mapping theorem for bicompact space. *Ann. Math.*, **49**, 1950, No. 3, 534—543.
3. H. Spanier. Cohomology theory for general spaces. *Ann. Math.*, **49**, 1948, 407—427.
4. I. Powers. Lefschetc fixed point theorems for a new class of multi valued maps. *Pacif. J. Math.*, **42**, 1972, No. 1, 211—220.
5. Г. Скордев. Ациклические отображения. *Год. Соф. унив., Мат. фак.*, 1974 (в печати).
6. Г. Скордев. Инцидентность и коинцидентность ациклических отображений. *Доклады БАН*, **27**, 3, 1974, 301—302.
7. A. Granas. The Lefschetz fixed point theorem for noncompact ANR space. Symp. Infinite dimensional topology, Baton Rouge, 1967.
8. G. Bredon. Sheaf theory. New York, 1967.



*Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике*

*София 1000 Болгария*

*п. я. 373*



*Поступила 20. 9. 1973*