Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

RIEMANN'SCHE GANZE FUNKTIONEN

LJUBOMIR G. ILIEV

In [6] und [7] werden zwei Verfahren gegeben, mit deren Hilfe ganze Funktionen mit lauter reellen Nullstellen, die sich in die Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{itz}\, dt$$

bringen lassen, bekommen werden.

Nachdem hier diese Methoden durch neue Fälle illustriert werden, zeigt man ein neues Verfahren zur Untersuchung dieses Problems.

In einer Reihe von Veröffentlichungen wurden ganze Funktionen gesucht, die sich in die Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{itz}\, dt \tag{1}$$

bringen lassen und lauter reelle Nullstellen besitzen.

Anlaß zu diesem Problem, wie G. Polya [1] bemerkte, gab der Umstand, daß es B. Riemann gelungen war, die von ihm in die Primzahltheorie eingeführte ganze Funktion ξ durch ein Integral der Form (1) darzustellen.

Die Fragestellung selbst wurde in der Arbeit von J. L. W. V. Jensen [2] erwähnt.

Die ganzen Funktionen der Art (1), welche lauter reelle Nullstellen besitzen, nennen wir Riemann'sche ganze Funktionen. Die Klasse der Riemann'schen ganzen Funktionen sei durch $R = R(e^{iz})$ bezeichnet.

Die ersten allgemeinen Ergebnisse erhielt G. Polya [3], der feststellen konnte, daß die Funktionen

$$U(z) = \int_0^1 \varphi(t) \cos tz\, dt \tag{2}$$

und

$$V(z) = \int_0^1 \varphi(t) \sin tz\, dt \tag{3}$$

SERDICA. Bulgaricae mathematicae publicationes. Vol. 1, 1975, p. 42—50.

ganz sind und lauter reelle Nullstellen besitzen, unter der einzigen Bedingung, daß $\varphi(t)$ eine im Intervall $(0, 1)$ positive, integrierbare und monoton wachsende Funktion ist; diese Nullstellen sind einfach, falls $\varphi(t)$ strikt wachsend ist [4].

Es sei bemerkt, daß viele Funktionen in der theoretischen Physik sich in die Form (2) bringen lassen. Man erwähne die wohl bekannten Beispiele:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos tz}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!\,n!} = J_0(z) \tag{4}$$

und

$$\int_0^1 t \sin tz\, dt = \frac{\cos z}{z^2}(\operatorname{tg} z - z). \tag{5}$$

Im Falle, wenn $F(t)$ eine im Intervall $(0, \infty)$ abnehmende Funktion ist, werden die Ergebnisse im betrachteten Problem auf einzelne Beispiele zurückgeführt. So haben die ganzen Funktionen

$$\int_{-1}^{1} (1-t^{2q})^{p-1} \cos tz\, dt \tag{6}$$

und

$$\int_0^{\infty} e^{-t^{2q}} \cos tz\, dt, \tag{7}$$

worin $q>1$ eine ganze Zahl und p — beliebige positive Zahl bedeuten, nur reelle und einfache Nullstellen [5].

Ein allgemeineres Ergebnis gab G. Polya [1]. Iliev hat bzw. in [6] und [7] zwei Verfahren gegeben, mit deren Hilfe man Riemann'sche Funktionen bekommt.

Nachdem hier diese Methoden durch neue Fälle illustriert werden, zeigen wir ein neues Verfahren zur Untersuchung dieses Problems.

1. Die Polynome $P_n(z)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, nennt man Polynome von Appel, wenn $P_n'(z)=nP_{n-1}(z)$, $n=1, 2, \ldots$

Wenn

$$f(z)=\gamma_0+\frac{\gamma_1}{1!}z+\frac{\gamma_2}{2!}z^2+\cdots, \tag{1.1}$$

so sind

$$J_n(f, z)=J_n(z)=f(D)\,z^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\gamma_{n-k}z^k, \quad n=0, 1, 2, \ldots, \tag{1.2}$$

die Polynome von Jensen der Funktion $f(z)$. Hier bezeichnet D den Operator Ableitung.

Offenbar ist

$$J_n'(z)=nJ_{n-1}(z), \quad n=1, 2, \ldots, \tag{1.3}$$

so daß die Jensen'schen Polynome einer Funktion der Art (1.1), Polynome von Appel darstellen.

Definition. *Man bezeichne durch* L_1 *bzw.* L_2 *die Klasse der ganzen Funktionen, welche Polynome mit nur nichtpositiven, bzw. reellen Nullstellen oder in jedem endlichen Bereiche Grenze solcher Polynome sind:* $L_1 \subset L_2$.

Die Funktionen der Klassen L_1 und L_2 sind von E. Laguerre [8] eingeführt. Man nenne sie Laguerre'sche ganze Funktionen oder ganze Funktionen von Laguerreschen Typ (bzw. erster und zweiter).

Bemerkung. Ist $f(z) \in R$, so ist überhaupt $f(z) \notin L_2$. Wenn man aber z. B. die Klasse $R_1 \subset R$ der ganzen Funktionen vom Geschlecht $\varrho < 2$ betrachtet, so ist $R_1 \subset L_2$.

Es ist wohlbekannt der folgende

Satz 1. $f(z) \subset L_1 \Leftrightarrow J_n(f, z) \in L_1$;

$f(z) \subset L_2 \Leftrightarrow J_n(f, z) \in L_2$.

N. Obreschkoff [9], indem er einen von ihm bewiesenen [10] Polyaschen Satz benutzt und die Methode von L. Iliev [7] erweitert, stellt den

Satz 2. *Wenn* $\varphi(t) \geq 0$ *eine im Intervall* $[0, 1]$ *nichtabnehmende und im* $[-1, 1]$ *gerade integrierbare Funktion darstellt und* $f(z) \in L_1$, *so ist*

$$\int_{-1}^{1} \varphi(t) f(itz)\, dt \in L_2. \tag{1.4}$$

Die Funktionen der Art (1.4), wo $f(z) \in L_1$, nennen wir verallgemeinerte Riemann'sche Funktionen, deren Klasse mit $R(L_1)$ bezeichnen.

Gemäß Satz 1. und Satz 2. folgt, daß

$$\int_{-1}^{1} \varphi(t)\, J_n(itz)\, dt \in L_2, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

worin $J_n(z) = J_n(f, z)$, $f(z) \in L_1$ bedeutet.

Es wird die Methode von [6] illustriert, indem folgender neuer Satz bewiesen wird:

Satz 3. Ist $p > -1$, q *eine ganze, positive Zahl und* $f(z) \in L_1$, *so ist*

$$R_n^{(p)}(z) = \int_{-1}^{1} (1 - t^{2q})^p\, J_n(itz)\, dt \in L_2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Beweis. Man nehme an, daß $R_n^{(p)}(z) \in L_2$ bei einem festen $p > -1$ und jedem Index n ist.

Man bekommt:

$$\frac{d^{2q-1}}{dz^{2q-1}} R_{n+2q}^{(p)}(z) = \int_{-1}^{1} (1 - t^{2q})^p \frac{d^{2q-1}}{dz^{2q-1}} J_{n+2q}(itz)\, dt$$

$$= (-1)^{q+1} i(n+2q)(n+2q-1)\ldots(n+2) \int_{-1}^{1} (1-t^{2q})^p t^{2q-1} J_{n+1}(itz)\, dt$$

$$= (-1)^q i \frac{(n+2q)(n+2q-1)\ldots(n+2)}{2q(p+1)} \int_{-1}^{1} J_{n+1}(itz)\, d(1-t^{2q})^{p+1}$$

$$= (-1)^q i \frac{(n+2q)(n+2q-1)\ldots(n+2)}{2q(p+1)} J_{n+1}(itz)(1-t^{2q})^{p+1}\Big|_{-1}^{1}$$

$$+ (-1)^q z \frac{(n+2q)(n+2q-1)\ldots(n+1)}{2q(p+1)} \int_{-1}^{1} (1-t^{2q})^{p+1} J_n(itz)\, dt,$$

d. h.

$$(-1)^q \frac{(n+2q)(n+2q-1)\ldots(n+1)}{2q(p+1)} zR_n^{(p+1)}(z) = \frac{d^{2q-1}}{dz^{2q-1}} R_{n+2q}^{(p)}(z) \in L_2.$$

Wenn man in Betracht nimmt, daß bei $-1 < p \leq 0$ die Funktion $(1-t^{2q})^p$ nicht abnehmend ist, so ist in diesem Fall gemäß Satz 2.

$$R_m^{(p)}(z) = \int_{-1}^{1} (1-t^{2q})^p J_m(itz)\, dt \in L_2$$

und zwar bei jedem Index m, da nach dem Satz 1. $J_m(z) = J_m(f, z) \in L_2$ ist. Also $R_n^{(p)}(z) \in L_2$ für $p > -1$ und jede ganze positive Zahl n, w. z. b. w.

2. Die zweite Methode benutzt folgende bzw. von N. Obreschkoff [12] und L. Iliev [7] bewiesene Sätze:

Satz (0). *Es sei h eine komplexe Zahl mit Argument φ und D bezeichnet den Streifen zwischen zwei parallelen Geraden, die mit der x-Achse einen Winkel $\varphi + \frac{\pi}{2}$ bilden. Sind alle Nullstellen des Polynoms $p(z)$ in D und diese von*

(2.1) $$Q_s(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_s z^s$$

auf dem Einheitskreis $|z| = 1$, so liegen die Nullstellen von

(2.2) $$\sum_{k=0}^{s} a_k f(z + (s-2k)h)$$

in D.

Satz (I). *Wenn die Nullstellen des Polynoms*

(2.3) $$P(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n = b_n (z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n)$$

im Bereiche $|z| \geq 1$ liegen und wenn

(2.4) $$P^*(z) = z^n \bar{P}\left(\frac{1}{z}\right) = \bar{b}_n (1-\bar{\alpha}_1 z) \ldots (1-\bar{\alpha}_n z)$$

bezeichnet, so liegen die Nullstellen von

$$P(z)+\varepsilon z^k P^*(z), \tag{2.5}$$

wo $|\varepsilon|=1$ *und* $k\geq 1$ *eine ganze Zahl bezeichnen, auf dem Einheitskreis* $|z|=1$.

Wenn für das Polynom (2.1) bei jeder ganzen $s>0$,

$$a_k=\varphi\left(\frac{k}{s}\right),\ k=0, 1, 2, \ldots, s,$$

gilt, wo $\varphi(t)$ in $(0, 1)$ definierte und integrierbare Funktion ist, so wird bei $h=h_0/s$ das Polynom (2.2) eine Summe von Darbou

$$\sum_{k=0}^{s}\varphi\left(\frac{k}{s}\right)\varphi\left(z+h_0-2h_0\,\frac{k}{s}\right). \tag{2.6}$$

Bei $s\to\infty$ folgt, daß die Nullstellen des Polynoms

$$\int_0^1 \varphi(t)\, f(z+h_0-2h_0t)dt \tag{2.7}$$

in dem Streifen D liegen.

Der Satz (I) gibt die Möglichkeit Funktionen $\varphi(t)$ mit der genannten Eigenschaften zu finden.

Es sei nämlich $\varphi(t)$ eine reelle, nichtnegative, integrierbare, monoton wachsende im Intervalle $(0, 1)$ und gerade im Intervalle $(-1, 1)$ Funktion. Nach dem Satz von Kakeya liegen die Nullstellen des Polynoms (2.3) bei $a_k=\varphi\left(\frac{n-k}{n}\right)$:

$$P(z)=\sum_{k=0}^{n}\varphi\left(\frac{n-k}{n}\right)z^k$$

im Bereich $|z|\geq 1$. Dabei ist in diesem Falle das Polynom (2.4) von der Form

$$P^*(z)=\sum_{k=0}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)z^k.$$

Wenn $\varepsilon=-1$ und $k=n$, so bekommt man von dem Satz (I), daß die Nullstellen des Polynoms

$$P(z)-z^n P^*(z)=\sum_{k=0}^{n}\varphi\left(1-\frac{k}{n}\right)z^n-\sum_{k=0}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)z^{n+k}$$

auf dem Einheitskreis $|z|=1$ liegen.

Daraus folgt von (2.6) bei $s=2n$, daß die Nullstellen des Polynoms

$$\int_0^1 \varphi(1-t)\, f[z+h_0(1-t)]\, dt-\int_0^1 \varphi(t)\, f[z+h_0(1-t)]\, dt$$

$$= \int_0^1 \varphi(t) f(z+h_0 t)\, dt - \int_0^1 \varphi(t) f(z-h_0 t)\, dt = \int_{-1}^1 \varphi(t) f(z+h_0 t)\, dt$$

in D liegen.

Bei $h_0 = a > 0$ bekommt man das Ergebnis von Iliev [7]:

Satz 4. *Es sei $\varphi(t)$ eine reelle, nichtnegative, monoton wachsende im Intervall $[0, a]$, $a > 0$ und gerade im $[-a, a]$ integrierbare Funktion und es liegen die Nullstellen des Polynoms $f(z)$ im Streifen $\alpha \leqq R(z) \leqq \beta$. Dann liegen die Nullstellen des Polynoms*

$$\int_{-a}^{a} \varphi(t) f(z+t)\, dt$$

im Streifen $\alpha \leqq R(z) \leqq \beta$.

Von diesen Ergebnissen bei $f(z) = z^n$ und einem Grenzübergang, wie in [7] gezeigt wurde, bekommt man das Ergebnis von G. Polya über die Funktionen $U(z)$ und $V(z)$ von (2) und (3).

So ist ein neues Verfahren festgestellt, das in [7] und [13] entwickelt ist. L. Weisner [14] hat etwa früher den Satz (0) in dem speziellen Fall, falls $Q_s(z) = 1 + z + \cdots + z^s$ analogisch verwendet.

Obreschkoff, indem er dieses Verfahren und einen von ihm festgestellten Satz verwendet, bewies

Satz 5. Es sei $\varphi(t)$ *eine positive, nichtabnehmende, integrierbare, im Intervalle* $[0, 1]$ *deffinierte Funktion und $h(x)$ sei ein reelles Polynom, deren Nullstellen in der Halbebene $R(x) \leqq 1/2$ liegen. Dann sind die Funktionen*

$$U_1(z) = \int_0^1 \varphi(t) h(t) \cos tz\, dt$$

und

$$V_1(z) = \int_0^1 \varphi(t) h(t) \sin tz\, dt$$

ganz und alle ihre Nullstellen sind reell.

3. Jetzt zeigen wir ein neues, drittes Verfahren, damit wir Funktionen der Klasse $R(L_1)$ bekommen.

Es bezeichne π_n die Menge der Polynome der Art

(3.1) $$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

welche genau von der Potenz n sind und nur reelle einfache Nullstellen besitzen. Man kann voraussetzen, daß seine Koeffizienten reell sind.

Ist $a_{n-1} \neq 0$, so gehört das Polynom (3.1) zu der Klasse π_n wenn auch $a_n = 0$ ist. In diesem Falle nehmen wir an, es habe eine einfache Nullstelle $x = \infty$.

Wir betrachten also die durch den „unendlichen Punkt" $x = \infty$ abgeschlossene Abszisse A. Unter einer Umgebung von $x = \infty$ verstehen wir das Äussere eines jeden Intervalls $[a, b]$ in A.

Über die abgeschlossene Abszisse A führen wir weiter eine zyklische Anordnung ein durch den Begriff „folgt zyklisch nach", oder: $\dot{\rightarrow}$, so daß $x \dot{\rightarrow} y$ „y folgt zyklisch x nach" bedeutet. Dieser Begriff wird folgendermaßen definiert: ist $x_1 \neq \infty$, $x_2 \neq \infty$, $x_1 < x_2$, so ist $x_1 \dot{\rightarrow} x_2$, aber auch $x_2 \dot{\rightarrow} x_1$; ist $x_1 \neq \infty$, $x_2 \neq \infty$, $x_3 = \infty$, $x_1 < x_2$, so ist $x_1 \dot{\rightarrow} x_2$, $x_2 \dot{\rightarrow} \infty$, $\infty \dot{\rightarrow} x_1$; wenn $x_1 < x_2 < x_3$, so ist $x_1 \dot{\rightarrow} x_2 \dot{\rightarrow} x_3$ und $x_3 \dot{\rightarrow} x_1$.

Ist $p_n(x) \in \pi_n$, so kann man seine Nullstellen, unter deren auch $x = \infty$ vorkommen kann, durch $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so numerieren, daß

$$x_1 \dot{\rightarrow} x_2 \dot{\rightarrow} \cdots \dot{\rightarrow} x_{n-1} \dot{\rightarrow} x_n \dot{\rightarrow} x_1,$$

oder allgemeiner

$$x_k \dot{\rightarrow} x_{k+1} \dot{\rightarrow} \cdots \dot{\rightarrow} x_n \dot{\rightarrow} x_1 \dot{\rightarrow} x_2 \dot{\rightarrow} \cdots \dot{\rightarrow} x_{k-1} \dot{\rightarrow} x_k$$

besteht.

Es sei $p_n(x) \in \pi_n$, $q_n(x) \in \pi_n$. Man sage, daß die Nullstellen von $p_n(x)$ und $q_n(x)$ voneinander getrennt sind, falls sie bzw. mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und $y_1, y_2, \ldots, y_n$ so numeriert werden, daß

$$x_1 \dot{\rightarrow} y_1 \dot{\rightarrow} x_2 \dot{\rightarrow} \cdots \dot{\rightarrow} x_n \dot{\rightarrow} y_n \dot{\rightarrow} x_1,$$

worin einmal der Punkt ∞ vorkommen kann.

L. Tschakaloff [4] hat einen Satz bewiesen, der folgendermaßen ausgesprochen werden kann:

Satz (T). *Die notwendige und hinreichende Bedingung, damit*

$$s_{\lambda,n}(x) = \lambda p_n(x) + q_n(x) \in \pi_n,$$

bei jeder reellen Zahl λ, $s_{0,n}(x) = q_n(x)$, $s_{-\infty,n}(x) = p_n(x)$, $s_{+\infty,n}(x) = p_n(x)$ *ist*: $p_n(x) \in \pi_n$, $q_n(x) \in \pi_n$ *und die Nullstellen von* $p_n(x)$ und $q_n(x)$ *voneinander getrennt seien.*

Folgerung. Ist $p_n(x) \in \pi_n$, $q_n(x) \in \pi_n$ und die Nullstellen von $p_n(x)$ und $q_n(x)$ getrennt, so sind auch die Nullstellen von $s_{\lambda,n}(x)$ und $s_{\mu,n}(x)$ bei $\lambda \neq \mu$ getrennt.

Bemerkung. Hier ist das Parameter λ eine reelle Zahl, die auch die Werten $\lambda = -\infty$ und $\lambda = +\infty$ nehmen kann. Die Werte von x aber sind aus der abgeschlossenen Axe A zu wählen.

Hier wird dieses Ergebnis von Tschakaloff durch den folgenden Satz präzisiert:

Satz 6. *Die Nullstellen des Polynoms* $s_{\lambda,n}(x) = \lambda p_n(x) + q_n(x)$ *worin* $p_n(x) \in \pi_n$, $q_n(x) \in \pi_n$, *kann man durch* $z_1 = z_1(\lambda)$, $z_2 = z_2(\lambda), \ldots, z_n = z_n(\lambda)$ so *numerieren, daß bei* $-\infty < \lambda < 0$:

$$x_1 \dot{\rightarrow} z_1(\lambda) \dot{\rightarrow} y_1 \dot{\rightarrow} \cdots \dot{\rightarrow} x_k \dot{\rightarrow} z_k(\lambda) \dot{\rightarrow} y_k \dot{\rightarrow} \cdots \dot{\rightarrow} y_n \dot{\rightarrow} x_1$$

und bei $0 < \lambda < +\infty$:

$$y_n \dot{\rightarrow} z_n(\lambda) \dot{\rightarrow} x_1 \dot{\rightarrow} z_{n-1}(\lambda) \dot{\rightarrow} y_2 \dot{\rightarrow} \cdots \dot{\rightarrow} y_k \dot{\rightarrow} z_k(\lambda) \dot{\rightarrow} x_{k+1} \dot{\rightarrow} \cdots \dot{\rightarrow} x_n$$

besteht, wo x_k *und* y_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, *bzw. die Nullstellen von* $p_n(x)$ *und* $q_n(x)$ *bezeichnen.*

Der Beweis dieses Satzes folgt aus der Tatsache, daß die Nullstellen der Polynome von π_n stetige Funktionen der Koeffizienten auf A sind.

So z. B. sei $x_k < y_k$. Da $z_k(-\infty) = x_k$, $z_k(0) = y_k$ und $z_k(\lambda)$ stetige Funktion von $\lambda \in (-\infty, 0)$ ist, so folgt $x_k < z_k(\lambda) < y_k$, bei $-\infty < \lambda < 0$. Und zwar im

Gegenfalle existiere $\lambda_1 \in (-\infty, 0)$, so daß $z_k(\lambda_1) = y_k = z_k(0)$ oder $z_k(\lambda_1) = x_k = z_k(-\infty)$, d. h. das Polynom $s_{\lambda_1, n}(x)$ habe gemeinsame Nullstelle mit $p_n(x)$ oder $q_n(x)$, was der Folgerung von dem Satz von Tschakaloff widerspricht.

Analogisch werden die anderen Fälle erledigt, einschließlich der Fall, wenn manches x_k oder y_k (aber nicht die beiden) gleich ∞ ist.

Satz 7. *Das Polynom*

$$H_s(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_s x^s$$

habe nur reelle, negative Nullstelen und das Pollynom $f(x)$ habe nur reelle und einfache Nullstellen. Wenn $a > 0$ die kleinste Entfernung zwischen zwei beliebigen nachbaren Nullstellen von $f(x)$ bedeutet und $0 < sh < a$, so hat das Polynom

$$F(x) = a_0 f(x) + a_1 f(x-h) + \cdots + a_s f(x-sh)$$

nur reelle Nullstellen.

Der Beweis folgt aus dem

Lema. *Es sei $a > 0$ und $f(x)$ das Polynom von dem Satz 7, dessen Nullstellen $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ seien. Ist $0 < h < a$, so befriedigen die Nullstellen z_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, von*

$$\alpha f(x) + f(x-h),$$

die Bedingungen $x_k < z_k < x_k + h$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Und zwar, in diesem Falle sind die Zahlen x_k und $x_k + h$ voneinander getrennt und nach dem Satz 6 folgt die Behauptung.

Wenn $1/\alpha_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, s$, die Nullstellen von $H_s(x)$ bedeuten, so wenden wir das Lema nacheinander für die Polynome

$$f_1(x) = \alpha_1 f(x) + f(x-h),\ f_2(x) = \alpha_2 f_1(x) + f_1(x-h), \ldots,$$
$$f_n(x) = \alpha_n f_{n-1}(x) + f_{n-1}(x-h) = F(x)$$

an, da wegen $0 < sh < a$ die Nullstellen von $f_k(x)$ und $f_k(x-h)$ bei jeder $k = 1, 2, \ldots, s$ voneinander getrennt sind. Damit ist der Satz 7 bewiesen.

Man nehme an, es existiert eine Funktion $\varphi(t)$, $t \in [0, 1]$, so daß bei jedem ganzen positiven s die Nullstellen von

$$H_s(x) = \varphi(0) + \varphi\left(\frac{1}{s}\right) x + \cdots + \varphi\left(\frac{s}{s}\right) x^s$$

negativ sind.

Dann sind bei $h = \frac{a}{s}$ die Nullstellen des Polynoms

$$\varphi(0) f(x) + \varphi\left(\frac{1}{s}\right) f\left(x - \frac{a}{s}\right) + \varphi\left(\frac{2}{s}\right) f\left(x - \frac{2}{s} a\right) + \cdots + \varphi\left(\frac{s}{s}\right) f\left(x - \frac{s}{s} a\right)$$

reell, woher bei $s \to \infty$, folgt

Satz 8. *Wenn eine Funktion $\varphi(t)$ existiert, die im $[0, 1]$ definiert und integrierbar ist, so daß bei jedem ganzen $s > 0$ die Nullstellen des Polynoms*

$$H_s(x) = \varphi(0) + \varphi\left(\frac{1}{s}\right) x + \varphi\left(\frac{2}{s}\right) x^2 + \cdots + \varphi\left(\frac{s}{s}\right) x^s$$

negativ sind und wenn $f(x)$ ein Polynom mit lauter reellen Nullstellen bedeutet, so hat das Polynom

$$\int_0^1 \varphi(t) f(x-at)\, dt,$$

wo a die kleinste Entfernung zwischen zwei beliebigen nachbaren Nullstellen von $f(x)$ bedeutet, nur reelle Nullstellen.

Bei diesem Verfahren ist also die Existenz von der Funktion $\varphi(t)$ vom Satz 8 problematisch. Dagegen liefert der Satz (I) sofort bei dem zweiten Verfahren die entsprechende Funktion.

LITERATUR

1. G. Polya. Über trigonometrische Integrale mit nur reellen Nullstellen. *J. reine und angew. Math.*, **158**, 1927, 6—18.
2. J. L. W. V. Jensen. Recherches sur la théorie des équations. *Acta Math.*, **36**, 1913, 181—195.
3. G. Polya. Über die Nullstellen gewisser ganzen Funktionen. *Math Z.*, **2**, 1918, 352—383.
4. Л. Чакалов. Върху една класа цели функции. *Списание БАН*, **36**, 1927, 51—92.
5. G. Polya. On the zeros of an integral function represented by Fourier's integral. *Messenger Math.*, **52**, 1923, 185—18'.
6. L. Ilieff. Über die Nullstellen gewisser Integralausdrücke. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, **48**, 1938, 169—172.
7. L. Ilieff. Über die Nullstellen einiger Klassen von Polynomen. *Tôhoku Math. J.*, **45**, 1939, 259—269.
8. E. Laguerre. Oeuvres, 1. Paris, 1898.
9. Н. Обрешков. Върху нулите на полиномите на някои цели функции. *Год. Соф. унив., Физ.-мат. фак.* **37**, кн. 1, 1941, 1—115.
10. N. Obrechkoff. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, **36**, 1927, 43—45.
11. G. Polya. Aufgabe 35. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, **35**, 1926, 48.
12. N. Obrechkoff. Sur les racines des équations algébriques. *Tohoku Math. J.*, **38**, 1933, 93—100.
13. Л. Илиев. Върху нулите на някои класи от полиноми и цели функции. (Дисертация. София, 1940.)
14. L. Weissner. On the regional location of the roots of certain functions. *Tohoku Math. J.*, **44**, 1937, 175—177.

Centre for Research and Training in Mathematics and Mechanics

Sofia 1000
P. O. Box 373 Bulgaria

Eingegangen am 25. 1. 1974