Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА, АССОЦИИРОВАННЫХ С ФУНКЦИЯМИ ОРЛИЧА, НЕ УДОВЛЕТВОРЯЮЩИМИ Δ_2-УСЛОВИЮ

КИРИЛ П. КИРЧЕВ, СТАНИМИР Л. ТРОЯНСКИ

В работе рассмотрены пространства h_M, являющиеся подпространствами пространства Орлича l_M, ассоциированных с функциями Орлича, не удовлетворяющими Δ_2-условию. Для пространства h_M распространены основные результаты Дж. Линденштрауса и Л. Тцафрири (1971, 1973).

1. Дж. Линденштраус и Л. Тцафрири [2—4] подробно исследовали вопрос о изоморфных вложениях в пространствах Орлича l_M в случае, когда $M(t)$ удовлетворяет Δ_2-условию. Если $M(t)$ не удовлетворяет Δ_2-условию, то пространство l_M несепарабельно и универсально с точностью до изоморфизма относительно всех сепарабельных пространств Банаха.

В настоящей заметке рассматриваются пространства h_M, порожденные последовательностью единичных ортов пространства l_M. Если $M(t)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то l_M совпадает с h_M, в противном случае это неверно. Оказывается, что для пространства h_M возможно распространить основные результаты Линденштрауса и Тцафрири [2—4].

2. Функция $M(t)$ называется функцией Орлича, если она непрерывна, строго возрастает, выпукла в интервале $[0, \infty)$ и $M(0)=0$. Каждой функцией Орлича $M(t)$ ассоциируется пространство Орлича l_M, состоящее из всех действительных числовых последовательностей $\{\xi_i\}_1^\infty$, таких, что $\sum M(|\xi_i|/t)<\infty$ для некоторого $t>0$. Норма в l_M вводится формулой

$$\|\{\xi_i\}_1^\infty\| = \inf\{t>0;\ \sum M(|\xi_i|/t)\leq 1\}.$$

Обозначим через h_M подпространство l_M, состоящее из всех последовательностей $\{\xi_i\}_1^\infty$, таких, что $\sum M(|\xi_i|/t)<\infty$ для всех $t>0$. Отметим, что h_M является пространством с базисом $e_m=\{\delta_{km}\}_{k=1}^\infty$ $\left(\text{т. е., если } x=\{\xi_i\} \in h_M, \text{ то } \lim_{i\to\infty}\left\|x-\sum_1^n \xi_i e_i\right\|=0\right)$.

Функции $M(t)$ и $N(t)$ называются эквивалентными, если существуют положительные постоянные c, k, C, K, t_0 такие, что

$$CM(ct)\leq N(t)\leq KM(kt),\quad t\in[0, t_0].$$

СЕРДИКА. Българско математическо списание. Том 1, 1975, с. 88—95.

Заметим, что если функции $N(t)$ и $M(t)$ являются эквивалентными, то пространства l_M и h_M изоморфны соответственно пространствам l_N и h_M. Обратное, вообще говоря, неверно [2].

Говорят, что $M(t)$ удовлетворяет Δ_2 - условию, если $\overline{\lim\limits_{t\to 0}}\frac{M(2t)}{M(t)}<\infty$.

3. Через $C[a, b]$ обозначим пространство всех непрерывных функций (t) на $[a, b]$, $\|f\|=\max\{|f(t)|;\quad t\in[a, b]\}$.

Следуя (2), обозначим через $C_{M,\tau}$, $\tau\in(0, 1]$, выпуклую замкнутую fоболочку в нормированной топологией пространства $C[0, 1/2]$ множества $\{M(\sigma t)/M(\sigma);\ 0<\sigma\leq\tau\}$. Положим $C_M=\bigcap\limits_{0<\tau\leq 1}C_{M,\tau}$.

Лемма 1. *Пусть $M(t)$ — функция Орлича. Тогда для всех $t\in[0, \infty)$*

$$tM'(t)\leq M(2t). \tag{1}$$

Доказательство. Так как $M(t)$ абсолютно непрерывна и $M'(t)$ монотонно возрастает, то

$$M(2t)=\int\limits_0^{2t} M'(u)\,du\geq\int\limits_t^{2t} M'(u)\,du\geq tM'(t).$$

Лемма 2. *Множества $C_{M,\tau}(\tau\leq 1)$ и C_M являются компактными множествами в нормированной топологии пространства $C[0, 1/2]$.*

Доказательство. В силу (1) $d/dt\quad M(ut)/M(u)\leq 2$, $t\in[0, 1/2]$. Так как $M(ut)/M(u)\leq 1$, $t\in[0, 1/2]$, $u\in(0, 1]$, то применяя теорему Асколи — Арцела, получим утверждение леммы 2.

Предложение 1. *Если функция Орлича $N\in C_M$, то h_N изоморфно некоторому подпространству пространства h_M.*

Доказательство. Зафиксируем q, $0<q<1$. Так как $N\in C_M$, выберем $\{u_i\}_1^{n_1}$ и $\{\mu_i\}_1^{n_1}$ так, чтобы $0<u_i<q$, $\mu_i\geq 0$, $i=1, 2, \ldots, n_1$; $\sum\limits_{i=1}^{n_1}\mu_i=1$

$$\left|N(t)-\sum_{i=1}^{n_1}\mu_i M(u_i t)/M(u_i)\right|<1/2,\quad 0\leq t\leq 1/2.$$

Пусть число j_1 выбрано так, чтобы $q^{j_1}<t_i$, $i=1, 2, \ldots, n_1$. Теперь, используя, что $N\in C_{M,\nu}(\nu\leq q^{j_1})$, выберем $\{u_i\}_{n_1+1}^{n_2}$ и $\{\mu_i\}_{n_1+1}^{n_2}$ так, чтобы

$$0<u_i\leq q^{j_1},\ \mu_i\geq 0,\ i=n_1+1, \ldots, n_2;\ \sum_{i=n_1+1}^{n_2}\mu_i=1,$$

$$\left|N(t)-\sum_{i=n_1+1}^{n_2}\mu_i M(u_i t)/M(u_i)\right|<2^{-2},\ 0\leq t\leq 1/2.$$

Продолжая этот процесс, получим последовательности чисел

$$\{u_i\},\ \lim_{i\to\infty}u_i=0;\ \{j_k\},\ \lim_{k\to\infty}j_k=\infty.$$

При этом $u_{n_k+1}\leq q^{j_k}<u_{n_k}$; $\mu_k\geq 0$; $\sum\limits_{i=n_k+1}^{n_{k+1}}\mu_i=1$, $k=1, 2, \ldots,$

$$(2) \qquad \left| N(t) - \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \mu_i M(u_i t)/M(u_i) \right| < 2^{-k-1}, \quad 0 \le t \le 1/2$$

Положим

$$\sigma_j = \{i;\ q^{j+1} \le u_i < q^j\};\ \lambda_j = \sum_{i \in \sigma_j} \mu_i/M(u_i).$$

Тогда

$$(3) \qquad \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \mu_i M(u_i t)/M(u_i) = \sum_{j=j_k}^{j_{k+1}-1} \sum_{i \in \sigma j} \mu_i M(u_i t)/M(u_i).$$

Из (2) и (3) получим

$$\sum_{j=j_k}^{j_{k+1}-1} \lambda_j M(q^{j+1}t) - 2^{-k-1} \le N(t) \le 2^{-k-1} + \sum_{j=j_k}^{j_{k+1}-1} \lambda_j M(q^j t).$$

Через $[\lambda]$ обозначим целую часть λ. Тогда

$$(4) \qquad \sum_{j=j_k}^{j_{k+1}-1} [\lambda_j]\, M(q^{j+1}t)^{-2-k-1} \le N(t) \le 2^{-k-1} + \sum_{j=j_k}^{j_{k+1}-1} [\lambda_j] M(q^j t)$$

$$+ M\left(\frac{1}{2}\right) \sum_{j=j_k}^{j_{k+1}-1} q^{j+1}, \quad 0 \le t \le 1/2.$$

Пусть $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ являются непересекающимися множествами целых чисел, притом A_j имеет ровно $[\lambda_j]$ элементов. Построим блок-базисную последовательность в h_M по формуле

$$(5) \qquad v_k = \sum_{j=j_k}^{j_{k+1}-1} q^j \left(\sum_{m \in A_j} e_m \right) = \sum_{i \in B_k} a_i e_i,$$

где

$$B_k = \bigcup_{j=j_k}^{j_{k+1}-1} A_j;\ a_i = q^j \ (i \in A_j).$$

Положим

$$f_k(t) = \sum_{i \in B_k} M(|a_i| t),\ k = 1, 2, \ldots;\ 0 \le t \le 1/2.$$

Тогда (4) можно записать в следующем виде:

$$(6) \qquad f_k(qt) - 2^{-k-1} \le N(t) \le 2^{-k-1} + f_k(t) + M(1/2) \sum_{j=j_k}^{j_{k+1}-1} q^{j+1}.$$

Из (1) и (6) следует, что

$$f_k(t) \leq N(1/2) + 1/2, \quad 0 \leq t \leq q/2, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$f_k'(t) = \sum_{i \in B_k} |a_i| M'(|a_i| t) \leq 4/q f_k(q/2), \quad 0 \leq t \leq q/4, \ k = 1, 2, \ldots$$

В силу теоремы Асколи — Арцела, не уменьшая общности, можно считать, что

$$(7) \qquad |f_k(t) - f_{k+1}(t)| < 2^{-k-1}, \quad 0 \leq t \leq q/4.$$

Пусть $f(t) = \lim_{k \to \infty} f_k(t)$. Из (7) следует, что

$$f(t) - 2^{-k} \leq \sum_{i \in B_k} M(|a_i| t) \leq f(t) + 2^{-k}, \ 0 \leq t \leq q/4, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

т. е. ряд $\sum f(|b_i|/t)$ сходится для каждого t тогда и только тогда, когда ряд $\sum b_n v_n$ сходится в нормированной топологии пространства h_M. Значит h_f изоморфно подпространству X пространства h_M, порожденное $\{v_k\}_1^\infty$.

После предельного перехода в (6) получим $f(qt) \leq N(t) \leq f(t)$, $0 \leq t \leq q/4$. Следовательно h_f и h_N изоморфны. Теперь мы докажем основную теорему о изоморфных вложениях в h_M.

Теорема 1. *Для того, чтобы пространство h_N было изоморфно некоторому подпространству пространства h_M, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $R \in C_{M,1}$, эквивалентной N.*

Доказательство. Достаточность: Обозначим через $E_{M,\tau}$, $0 < \tau \leq 1$, замыкание множества $\{M(\sigma t)/M(\sigma)\}_{0 < \sigma \leq \tau}$ в нормированной топологии пространства $C[0, 1/2]$. Положим $E_M = \bigcap_{\tau > 0} E_{M,\tau}$. Заметим, что крайные точки множества $C_{M,1}$ принадлежат $E_{M,1}$.

Пусть $N \in C_{M,1}$. Тогда в силу теоремы Крейна — Мильмана

$$N(t) = \int_{E_{M,1}} n(\omega, t)\, \mu(d\omega),$$

где $\mu(\omega)$ — некоторая вероятностная мера на $E_{M,1}$.

Пусть $\beta = \mu(E_M)$. Тогда $N(t) = \beta f(t) + (1 - \beta)\, g(t)$, где $f \in C_M$, $g(t) = \int_0^1 M(st)/M(s) \nu(ds)$, $0 \leq t \leq 1/2$, а $\nu(s)$ — некоторя вероятностная мера на $[0, 1]$, удовлетворяющая условию $\nu(\{0\}) = 0$. Тогда

$$(8) \qquad \sum_{k=0}^{m} \lambda_k M(2^{-(k+1)}\, t) \leq g(t) \leq \sum_{k=0}^{m} \lambda_k M(2^{-k} t) + \nu_m, \ 0 \leq t \leq 1/2,$$

где $\lambda_k = \int_{2^{-(k+1)}}^{2^{-k}} M(st)/M(s) \nu(ds)$, $\nu_m = \nu([0, 2^{-m}])$.

Так как $\lim_{m \to \infty} \nu_m = 0$, выберем подпоследовательность $\{m_j\}_1^\infty$, чтобы $\nu_{m_j} < 2^{-j}$.

Пусть k_0 первый индекс, для которого $\lambda_{k_0} \neq 0$, и пусть $\sigma(j)$ состоит из тех $k \leq m_j$, для которых $\lambda_{k_0} \leq \lambda_k$. Обозначим $g_j(t) = \sum_{k=0}^{m_j} n_k M(2^{-k}t)$, $n_k = [\lambda_k/\lambda_{k_0}]$. Используя (8), получим

$$g_j(t/2) + \sum_{k=0}^{m_j} \lambda_k/\lambda_{k_0} M(2^{-k-1}t) \leq 1/\lambda_{k_0} g(t), \quad 0 \leq t \leq 1/4,$$

$$g(t) \leq \sum_{k \in \sigma(j)} \lambda_k M(2^{-k}t) + \lambda_{k_0} \sum_{k=k_0+1}^{m_j} M(2^{-k}t) + 2^{-j}$$

$$\leq \sum_{k \in \sigma(j)} \lambda_k M(2^{-k}t) + \lambda_{k_0} M(2^{-k_0}t) \sum_{k=k_0+1}^{m_j} 2^{-k} + 2^{-j}$$

$$\leq 2 \sum_{k \in \sigma(j)} \lambda_k M(2^{-k}t) + 2^{-j} \leq 4\lambda_{k_0} \sum_{k \in \sigma(j)} M(2^{-k}t) + 2^{-j}.$$

Окончательно

(9) $$\lambda_{k_0} g_j(t/2) \leq g(t) \leq 4\lambda_{k_0} g_j(t) + 2^{-j}, \quad 0 \leq t \leq 1/4.$$

Теперь, пусть $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ являются непересекающимися множествами натуральных чисел и пусть $A_j = \bigcup_{k=1}^{m_j} A_{j,k}$, где $A_{j,k}$ имеет ровно n_k элементов. Положим $w_j = \sum_{k=0}^{m_j} 2^{-k} \sum_{i \in A_{j,k}} e_{2i}$.

Из (9) вытекает, что ряд $\sum b_j w_j$ сходится в h_M тогда и только тогда, когда ряд $\sum g(|b_j|/t)$ сходится для любого $t > 0$.

Возвращаясь к доказательству предложения 1, заметим, что в (5) можно положить $v_k = \sum_{i \in B_k} a_i e_{2i+1}$, $k = 1, 2, \ldots$

Для того, чтобы ряд $\sum b_j(v_j + w_j)$ сходился в h_M, необходимо и достаточно, чтобы сходились $\sum b_j v_j$, $\sum b_j w_j$. Это выполнено тогда и только тогда, когда ряды $\sum f(|b_j|/t)$ и $\sum g(|b_j|/t)$ сходятся для любого $t > 0$. Другими словами, $\sum b_j(v_j + w_j)$ сходится тогда и только тогда, когда $\sum N(b_j/t) < \infty$ для любого $t > 0$, т. е. h_N изоморфно подпространству X пространства h_M, порожденному $\{(v_i + w_i)\}_1^{\infty}$.

Учитывая компактность множества $C_{M,1}$, необходимость доказывается точно также, как у Линдберга [1] (см. также [3]).

4. Изоморфные вложения пространства l_p, $1 \leq p < \infty$, в пространство h_M. Следуя (4), положим

$$\alpha_M = \sup\{p; \sup_{0 < x, t \leq 1} M(tx)/M(t)x^p < \infty\},$$

$$\beta_M = \inf\{p;\ \inf_{0<x,t\leq 1} M(tx)/M(t)x^p > 0\}.$$

Очевидно $1 \leq \alpha_M \leq \beta_M \leq \infty$. Если функция $M(t)$ не удовлетворяет Δ_2-условию, то $\beta_M = \infty$. Пусть

$$(10) \qquad M_0(t) = M(t),\ M_{n+1}(t) = \int_0^1 M_n(\tau t)\, d\tau, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Легко доказать индуктивно, что

$$(11) \qquad M_n(t) = 1/(n-1)! \int_0^1 M(\tau t) \ln^{n-1} 1/\tau\, d\tau, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Лемма 3. *Пусть* $a_M = \underline{\lim}_{t\to\infty} tM'(t)/M(t)$, $b_M = \overline{\lim}_{t\to 0} tM'(t)/M(t)$. *Тогда*

$$(12) \qquad a_{M_n} \leq a_{M_{n+1}} \leq b_{M_{n+1}} \leq b_{M_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Найдем $\delta > 0$ так, чтобы $-\varepsilon + a_{M_n} \leq \tau M_n'(\tau)/M_n'(\tau) \leq b_{M_n} + \varepsilon$, $0 < \tau < \delta$. Отсюда при $0 < t < \delta$

$$(-\varepsilon + a_{M_n}) \int_0^t M_n(\tau)\, d\tau \leq \int_0^t \tau M_n'(\tau)\, d\tau \leq (b_{M_n} + \varepsilon) \int_0^t M_n(\tau)\, d\tau,$$

т. е. $-\varepsilon + a_{M_n} \leq tM_{n+1}'(t)/M_{n+1}(t) \leq b_{M_n} + \varepsilon$ при $0 < t < \delta$.

Из этого неравенства следует (12). Пусть $A_M = \lim_{n\to\infty} a_{M_n}$, $B_M = \lim_{n\to\infty} b_{M_n}$. Заметим, что, вообще говоря, числа a_M, A_M, соответственно b_M, B_M, не совпадают. Если $M(t)$ не удовлетворяет Δ_2-условию, то $b_M = \infty$. Нетрудно заметить, что $B_M \geq \beta_M$, $A_M \leq \alpha_M$. В дальнейшем мы покажем, что $A_M = \alpha_M$, $B_M = \beta_M$.

Предложение 2. *Для любого* $p \in [A_M, B_M)$ *существует последовательность положительных чисел* $\{\tau_n\}_1^\infty$, *сходящаяся к нулю, такая, что последовательность функции* $\{M_n(\tau_n t)/M_n(\tau_n)\}$ *равномерно в интервале* $[0, 1/2]$ *сходится к функции* $t^p \in C_M$.

Доказательство. Пусть $f_n(t) = tM_n'(t)/M_n(t)$, $A_M \leq p < B_M$. Покажем, что существует последовательность $\{\tau_n\}_1^\infty$ такая, что

$$(13) \qquad \tau_n > 0,\ \lim_{n\to\infty} \tau_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} f_n(\tau_n t) = p,\ t \in (0, 1].$$

Обозначим $g_n(t) = 1/f_n(t)$. Легко подсчитать

$$(14) \quad tg_n'(t) = -(M_{n-2}(t)\, M_n(t) - M_{n-1}^2(t))(M_{n-1}(t) - M_n(t))^{-2}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots$$

В силу неравенства Коши — Буняковского и (11)

$$(15) \qquad -\frac{1}{n-1} M_{n-1}^2(t) \leq M_n(t) M_{n-2}(t) - M_{n-1}^2(t), \quad n = 3, 4, \ldots$$

Так как $tM_n'(t)/M_n(t) \geq 1$, то из (14) и (15) получим

(16) $$tg'_n(t) \leqq (n-1)^{-1}(1-M_n(t)/M_{n-1}(t))^{-2} \leqq 4/(n-1).$$

Для всех достаточно больших n можно найти ξ_n и η_n так, чтобы $f_n(\xi_n)=p$, $f_n(\eta_n)=p+\varepsilon_n$, $0<\eta_n<\xi_n\leqq\varepsilon_n$, где $\varepsilon_n=2\sqrt{p}\sqrt{(p+1)}/\sqrt{(n-1)}$. Пусть $\tau_n=\min\{t; f_n(t)=p, t>\eta_n\}$, $\theta_n=\max\{t; f_n(t)=p+\varepsilon_n, \eta_n\leqq t<\tau_n\}$. Тогда если $\theta_n/\tau_n\leqq t\leqq 1$, то

(17) $$0\leqq f_n(\tau_n t)-p\leqq\varepsilon_n.$$

Применим теорему о среднем к функции $g_n(\tau_n t)$ и интервалу $[\theta_n/\tau_n, 1]$. Затем воспользуемся (16). Получим $\theta_n/\tau_n<\varepsilon_n$. Зафиксируем $t\in(0, 1]$. Зададим $\varepsilon>0$. Найдем n_0 так, что при $n>n_0$, $\varepsilon_n<\min\{\varepsilon, t\}$. Тогда при $n>n_0$ имеет место (17), что и доказывает (13).

Положим $y_n(t)=M_n(\tau_n t)/M_n(\tau_n)$. Очевидно

(18) $$y_n(t)\leqq 1,\ y'_n(t)=\tau_n M'_n(t\tau_n)/M_n(\tau_n)\leqq p, \quad 0\leqq t\leqq 1.$$

Не уменьшая общности, можно считать, что $\lim_{n\to\infty} y_n(t)=y(t)$ равномерно на $[0, 1]$, где $y(t)$ — непрерывная выпуклая функция.

Так как $f_n(\tau_n t)=ty'_n(t)/y_n(t)$, то в силу (13) получим $ty'(t)/y(t)=p$ для всех $t\in(0, 1)$, для которых $y'(t)$ существует. Отсюда, учитывая, что $y(t)$ абсолютно непрерывна на $[0, 1]$ и $y(1)=1$, получим, что $y(t)=t^p$.

С другой стороны, легко видеть, что $y_n(t)\in C_{M,\tau_n}$. Значит $y\in C_M$.

Теорема 2. *Пространство l_p изоморфно подпространству X пространства h_M тогда и только тогда, когда $p\in[\alpha_M, \beta_M]$.*

Замечание. Если $p=\infty$, то под l_∞ будем понимать пространство c_0 (состоящее из всех числовых последовательностей $\{\xi_i\}$, сходящихся к нулю, $\|\{\xi_i\}\|=\max_i|\xi_i|$.

Доказательство. Легко видеть, что базис $\{e_i\}$ пространства h_M безусловен и не является ограниченно полным (относительно определения ограниченно полного базиса и безусловного базиса [5]) тогда и только тогда, когда $M(t)$ не удовлетворяет Δ_2-условию (т. е. $\beta_M=\infty$). Джеймс [5] показал, что пространство с безусловным базисом содержит c_0 тогда и только тогда, когда базис не является ограниченно полным.

Пусть $p<\infty$. Допустим, что $p<\alpha_M$. Тогда найдем $\varepsilon>0$ и K_ε такие, что $p+\varepsilon<\alpha_M$ и $M(ut)\leqq K_\varepsilon M(u)t^{p+\varepsilon}$, $0\leqq u, t\leqq 1$.

Тогда, если $G\in C_{M,1}$, то $G(t)\leqq K_\varepsilon t^{p+\varepsilon}$. Значит t^p не является эквивалентной ни одной из функций, принадлежащих $C_{M,1}$. Согласно теоремы 1 l_p не вкладывается изоморфно в h_M. Аналогично доказывается, что если $p>\beta_M$, то l_p не вкладывается изоморфно в h_M. Значит, если l_p является подпространством, с точностью до изоморфизма пространства h_M, то $p\in[\alpha_M, \beta_M]$. Из предложения 2 следует, что $\alpha_M=A_M$, $\beta_M=B_M$. Тогда в силу предложения 1 и предложения 2, если $p\in[\alpha_M, \beta_M]$, то l_p изоморфно некоторому подпространству пространства h_M.

5. В заключение для любого $\alpha\geqq 1$ построим функцию Орлича $M(t)$ такую, что $\alpha_M=\alpha$, $\beta_M=\infty$. Пусть $p(t)=t^{\alpha-1}/k!$, если $t\in(1/(k+1)!, 1/k!]$, $k=1, 2, \ldots$ Положим $M(t)=\int_0^t p(\tau)\,d\tau$. Так как

$$M(2/n!)/M(1/n!)\geq\int_{1/n!}^{2/n!}p(\tau)d\tau/\int_{0}^{1/n!}p(\tau)\,d\tau\geq n,\quad n=1,2,\ldots,$$

то $M(t)$ не удовлетворяет Δ_2-условию, т. е, $\beta_M=\infty$. Так как $p(t)/t^{\alpha-1}$ не убывает, то $tp(t)/M(t)\geq\alpha$. Отсюда

$$M(\tau t)/t^{\alpha}M(\tau)\leq 1,\ \text{т. е. }\ \alpha\leq\alpha_M. \tag{19}$$

Пусть $t\in(1/(n+1)!,\ 1/n!]$. Легко просчитать

$$p(t)/M(t)\leq p(t)/\int_{1/(n+1)!}^{t}p(\tau)\,d\tau\leq\alpha t^{\alpha-1}/(t^{\alpha}-[(n+1)!]^{-\alpha}). \tag{20}$$

Зафиксируем $t>0$. Тогда в силу (20) для $n>(t+1)/t$

$$M(t/n!)/M(1/n!)=\exp\int_{1/n!}^{t/n!}p(\tau)/M(\tau)\,d\tau\geq t^{\alpha}-(n+1)^{-\alpha}/(1-(n+1)^{-\alpha}).$$

Отсюда, учитывая (19), получим, что $\lim\limits_{n\to\infty}M(t/n!)/M(1/n!)=t^{\alpha}$. Таким образом $\alpha\geq\alpha_M$ и значит $\alpha_M=\alpha$.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. J. Lindberg. Contractive projections in Orlicz sequence spaces. Thesis. Berkeley, 1970.
2. J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. On Orlicz sequence spaces. *Israel J. Math.*, **10**, 1971, 379—390.
3. J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. On Orlicz sequence spaces II. *Israel J. Math.*, **11**, 1972, 359—379.
4. J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. On Orlicz sequence spaces III. *Israel J. Math.*, **14**, 1973, 368—389.
5. В. Д. Мильман. Геометрическая теория пространств Банаха, ч. 1. *Успехи мат. наук*, **25**, 1970, 113—174.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике

София 1000
п. я. 373 *Болгария*

Поступила 7. 5. 1974