**Serdica**
Bulgariacae mathematicae
publicationes

**Сердика**
Българско математическо
списание

# СОВПАДЕНИЕ СЛАБОГО И СИЛЬНОГО РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

НЕДЮ И. ПОПИВАНОВ

Исследуются однородные краевые задачи для линейных систем уравнений в частных производных первого порядка. Доказывается совпадение слабого и сильного решений в следующих случаях: для областей с дважды гладкой границей, если граничная матрица зависит только от переменной, нормальной к границе; для областей с липшицовой границей, на которой не заданы сопряженные граничные условия; для областей с углами (можно и нулевых), одна грань которых — дважды гладкая, а на другой нет граничных или сопряженных граничных условий.

В теореме 1 для областей с дважды гладкой границей доказывается, что „слабое решение — сильно", если граничная матрица зависит только от переменной, нормальной к границе. Это является обобщением результатов П. Лакса и Р. Филлипса [3], Л. Сарасона [4], Г. Пейзера [5], у которых ранг граничной матрицы должен сохраниться в окрестности границы.

В [3] установлено, что для областей с липшицовой границей, на которой нет граничных условий, „слабое решение — сильно". В теореме 2 доказываем, что слабое решение — сильно, если на границе нет сопряженных условий. В связи с этим исследуется вопрос, в каком случае каждая непрерывная в некоторой области функция с ограниченными первыми производными удовлетворяет условию Липшица в этой области. Доказывается, что это имеет место, если граница области — липшицовая — и не имеет места, если она только гельдеровая.

Насколько нам известно, в связи с совпадением слабого и сильного решений в областях с углами до сих пор опубликованы только результаты для ненулевых углов с дважды гладкими гранями (К. Фридрихс [2], Р. Лакс и Р. Филлипс [3], Г. Пейзер [5]). В теореме 3 доказываем, что „слабое решение — сильно" и для ненулевых углов, одна грань которых — дважды гладкая, а другая — только липшицовая, и на ней нет граничных или сопряженных граничных условий. В теореме 4 доказываем такой же результат и для широкого класса нулевых углов.

Результаты этой работы были опубликованы без доказательств в [8].

**1. Основные определения и обозначения.** Пусть $D$ — ограниченная область в $m$-мерном евклидовом пространстве $R^m$ $(m \geqq 2)$ точек $x=(x_1, \ldots, x_m)$, имеющая $(m-1)$-мерную кусочно-гладкую границу $S$. Рассмотрим в области $D$ линейный дифференциальный оператор первого порядка $L \equiv A^j \partial/\partial x_j + B$, где $A^j$ и $B$ — $n \times n$ матрицы с кусочно-гладкими и соответственно с кусочно-непрерывными элементами. Функцию $u(x)$ будем называть кусочно-непрерывной в $D$, если она ограничена в $D$ и при помощи конечного числа кусочно-гладких поверхностей $D$ можно разбить на области, внутри которых функция непрерывна. Функцию $u(x)$ будем называть кусочно-гладкой в $D$, если она непрерывна в $\bar{D}$ и ее первые производные являются кусочно-непрерывными в $D$. Здесь и далее по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до $m$. Все функции вещественны и измеримы в $D$.

Рассмотрим в $D$ систему

$$Lu=f, \tag{1}$$

где $u=(u_1,\ldots,u_n)$, $f=(f_1,\ldots,f_n)$. Для почти всех $x\in S$ определена граничная матрица $\beta(x)=n_j(x)A^j(x)$, где $(n_1(x),\ldots,n_m(x))$ — единичный вектор внешней нормали к $S$ в точке $x\in S$. Для каждой точки $x\in S$ обозначим через $N(x)$ линейное подпространство $R^n$. Граничное условие будет

$$u(x)\in N(x) \text{ при } x\in S. \tag{2}$$

Сопряженное граничное условие будет

$$v(x)\in P(x) \text{ при } x\in S, \tag{3}$$

где $P(x)$ является ортогональным дополнением $\beta(x)N(x)$. Пусть $L^*=-\partial/\partial x_jA^{j\prime}+B'$, где $A^{j\prime}$ и $B'$ — транспонированные матрицы соответственно $A^j$ и $B$. Через $\hat{L}_2(D)$ обозначаем гильбертово пространство векторных функций $u=(u_1,\ldots,u_n)$ со скалярным произведением

$$(u,v)=\int_D(u_1v_1+\cdots+u_nv_n)dx,$$

норму в котором обозначаем через $\|u\|$. Пусть $f\in\hat{L}_2(D)$. Функция $u\in\hat{L}_2(D)$ называется слабым решением задачи (1), (2), если $(u,L^*v)=(f,v)$ для каждой кусочно-гладкой в $D$ функции $v$, удовлетворяющей сопряженному граничному условию (3).

Функция $u\in\hat{L}_2(D)$ называется сильным решением задачи (1), (2), если существует последовательность кусочно-гладких в $D$ функций $u_k$, удовлетворяющих граничному условию (2) и $\|u_k-u\|\to 0$, $\|Lu_k-f\|\to 0$ при $k\to\infty$.

Легко заметить, что каждое сильное решение задачи (1), (2) является и слабым решением этой задачи. В настоящей работе рассматриваются некоторые случаи, когда каждое слабое решение является сильным.

**2. Случай дважды гладкой границы**. Пусть граница $S$ принадлежит классу $C^2$. Исполним в окрестности $D_{x_0}$ произвольной точки $x_0\in S$ в $\bar{D}$ неособое преобразование $T:x\ y\mapsto$ класса $C^2$, причем $T(D_{x_0}\cap S)\subset\{y_1=0\}$. Рассмотрим следующие условия для матрицы $A^{y_1}$ ($A^{y_1}$ — коэффициент перед $\partial_1=\partial/\partial y_1$ в операторе $L$):

1. Ранг $A^{y_1}$ постоянный в некоторой окрестности точки $T(x_0)$ в $T(D_{x_0})$.

2. В некоторой окрестности точки $T(x_0)$ в $T(D_{x_0})$

$$A^{y_1}(y)=E(y)\operatorname{diag}[a_1(y_1),\ldots,a_n(y_1)]C(y),$$

где матрицы $E$ и $C$ — неособые, с кусочно-гладкими элементами, а функции $a_1,\ldots,a_n$ — кусочно-гладкие. Здесь и далее через diag $[a_1,\ldots,a_n]$

будем обозначать диагональную матрицу с элементами главной диагонали $a_1, \ldots, a_n$.

Определение. *Если для каждой точки $x_0 \in S$ выполнено условие 1, будем говорить, что „ранг граничной матрицы $\beta$ сохраняется в окрестности границы", а если выполнено условие 2 — что „граничная матрица $\beta$ зависит только от переменной, нормальной к границе".*

Эти условия связаны с доказательством совпадения слабого и сильного решений задачи (1), (2). Условие 1 рассматривалось многими авторами — Лакс и Филлипс [3], Сарасон [4], Пейзер [5]. Условие 2 введено нами в [8]. Так как функции $a_i$ могут обращаться в нуль в некоторых точках, не обращаясь тождественно в нуль, условие 2 является более слабым ограничением, чем 1. Поэтому в некоторых случаях (см., например, в [9]) условие 1 не выполнено, а условие 2 выполнено.

Определим гладкость граничного пространства $N(x)$. Определение, которое даем, удобно для проверки в конкретных задачах.

Определение. *Пусть существует такая совокупность $N$ из кусочно-гладких в $D$ функций $u$, что $N(x) = \{u(x) : u \in N\}$ для каждой точки $x \in S$. Тогда будем говорить, что граничное пространство $N(x)$ кусочно-гладко на $S$.*

Теорема. 1. *Пусть граница $S$ принадлежит классу $C^2$ и граничная матрица $\beta$ зависит только от переменной, нормальной к границе. Пусть граничное пространство $N(x)$ сохраняет размерность, кусочно-гладко на $S$ и содержит ядро матрицы $\beta(x)$ для всех точек $x \in S$. Тогда каждое слабое решение задачи* (1), (2) *является сильным решением этой задачи.*

Замечание. Случай, когда ранг $\beta$ сохраняется в окрестности границы, рассмотрен Г. Пейзером в [5].

Доказательство. Обозначим $y_0 = T(x_0)$, $D_{y_0} = T(D_{x_0})$. Без ограничения общности можно считать, что $a_i(0) \neq 0$ для $i = 1, \ldots, r$ и $a_i(0) = 0$ для $i = r+1, \ldots, n$, где $0 \leq r \leq n$. Стесняя (если необходимо) $D_{x_0}$, можем предполагать, что $a_i \neq 0$ в $D_{y_0}$ для $i = 1, \ldots, r$. Тогда можно найти такие неособые и кусочно-гладкие матрицы $E_1$ и $C_1$, что

$$E_1 A^{y_1} C_1 = \operatorname{diag}[1, \ldots, 1, \ a_{r+1}(y_1), \ldots, a_n(y_1)],$$

где $a_{r+1}(0) = \cdots = a_n(0) = 0$. Сделаем замену переменных

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} w_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n \end{pmatrix} = C_1 w. \tag{4}$$

Получаем $L^1 w = E_1 L u = \operatorname{diag}[1, \ldots, 1, \ a_{r+1}(y_1), \ldots, a_n(y_1)] \partial_1 w + L_1 w$, где $L_1$ — матричный дифференциальный оператор первого порядка, не содержащий $\partial_1$. После замены (4) новое граничное пространство будет $N_1(y) = C_1^{-1} N(y)$. На $D_{y_0} \cap \{y_1 = 0\}$ имеем $E_1 \beta u = E_1 \beta C_1 w = (w_1, \ldots, w_r, 0, \ldots, 0)'$. Ядро $\beta(y)$ содержится в $N(y)$, и граница $E_1$ — неособая. Поэтому векторы $v_i$ $(i = r+1, \ldots, n)$ с координатами $v_i^k = 0$ для $k \neq i$, $v_i^i = 1$ принадлежат $N_1(y)$ для каждого $y \in D_{y_0} \cap \{y_1 = 0\}$. Они являются линейно независимыми и, следовательно, $p = \operatorname{codim} N_1(y) \leq r$. Векторы $v_{r+1}, \ldots, v_n$ можно дополнить до базиса в $N_1(y_0)$ с $v_{p+1}, \ldots, v_r$, а все векторы — до базиса в $R^n$

с $v_1, \ldots, v_p$. Пространство $N_1(y)$ — кусочно-гладко на $S$. Поэтому можно найти кусочно-гладкие в $D_{y_0}$ функции $v_i(y) \in N_1(y)$ для $y \in D_{y_0} \cap \{y_1 = 0\}$, $v_i(y_0) = v_i$, $i = p+1, \ldots, r$. При этом функции $v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}(y), \ldots, v_r(y), v_{r+1}, \ldots, v_n$ будут линейно независимыми в достаточно малой окрестности $D'_{y_0} = D_{y_0} \cap \{|y - y_0| \leqq \varrho_0\}$. Определим функции $v'_i(y) = (v^1_i(y), \ldots, v^r_i(y), 0, \ldots, 0)$ для $i = 1, \ldots, r$ и $v'_i(y) = v_i$ для $i = r+1, \ldots, n$. В $D'_{y_0}$ сделаем замену переменных

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n \end{pmatrix} = (v'_1, \ldots, v'_n) \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_n \end{pmatrix} = C_2 \omega$$

и рассмотрим оператор

$$L^2\omega \equiv C_2^{-1} L^1 w \equiv C_2^{-1} \operatorname{diag}[1, \ldots, 1, a_{r+1}(y_1), \ldots, a_n(y_1)] C_2 \partial_1 \omega + L_2 \omega$$
$$\equiv \operatorname{diag}[1, \ldots, 1, a_{r+1}(y_1), \ldots, a_n(y_1)] \partial_1 \omega + L_2 \omega,$$

где $L_2$ не содержит $\partial_1$. Граничные условия для $\omega$ будут

(5) $$\omega_1 = \cdots = \omega_p = 0,$$

а сопряженные будут

(6) $$v_{p+1} = \cdots = v_r = 0.$$

Вводя новые обозначения, продолжаем доказательство обычным путем. Строим такое конечное покрытие $\bar{D}$, чтобы каждое множество из них, пересекающее $S$, содержалось во множестве вида $D'_{x_0} = T^{-1}(D'_{y_0})$ для некоторой точки $x_0 \in S$. При помощи бесконечно гладкого разбиения единицы, подчиненного этому покрытию, локализируем рассматриваемую задачу. Для внутренних подобластей результат следует из работы Фридрихса [1]. Набросим доказательство для подобластей, примыкающих к границе. Рассмотрим образ каждой из них после применения соответствующего неособого преобразования класса $C^2$ в области $D' = \{y_1 > 0\}$, причем граница (и только она) отображается в $y_1 = 0$. Преобразуем оператор и граничные условия, как показано выше. После продолжения в $\bar{D}'$ все сводится к решению такой задачи. Функция $\omega \in \hat{L}_2(D')$ является слабым решением уравнения

(7) $$L\omega \equiv A_j \partial\omega / \partial y_j + B\omega = g,$$

при граничных условиях

(5) $$\omega_1(y) = \cdots = \omega_p(y) = 0 \quad \text{для} \quad y = (0, y_2, \ldots, y_m).$$

Здесь матрицы $A_j$ имеют кусочно-гладкие элементы, $B$ — кусочно-непрерывные, $A_1 = \operatorname{diag}[1, \ldots, 1, a_{r+1}(y_1), \ldots, a_n(y_1)]$. Носитель функции $\omega$ ограничен. Сопряженные условия для $v = (v_1, \ldots, v_n)$ будут

(6) $$v_{p+1}(y) = \cdots = v_r(y) = 0 \quad \text{для} \quad y = (0, y_2, \ldots, y_m).$$

Надо доказать, что $\omega$ — сильное решение задачи (7), (5).

Введем (следуя Пейзера [5]) такой вариант усреднения по Фридрихсу. Пусть $j(s)$ — неотрицательная функция одной переменной класса

$C^\infty$ с носителем в $(-1, 1)$ и $\int j(s)ds=1$. Пусть $\varepsilon>0$ и $k_\varepsilon(y_1-z_1)$ — диагональная $n\times n$ матрица, первые $p$-элементы главной диагонали которой равняются $\varepsilon^{-1}j(\varepsilon^{-1}(y_1-z_1)-2)$, следующие $r-p$ элементы $\varepsilon^{-1}j(\varepsilon^{-1}(y_1-z_1)+2)$ и, наконец, последние $n-r$ элементы $\varepsilon^{-1}j(\varepsilon^{-1}(y_1-z_1))$. Пусть для $\eta>0$ и $y'=(y_2,\ldots,y_m)$, $q_\eta(y'-z')$ — диагональная $n\times n$ матрица, все элементы главной диагонали которой равняются

$$\eta^{1-m}\prod_{\nu=2}^{m} j(\eta^{-1}(y_\nu-z_\nu)).$$

Рассмотрим функции класса $C^\infty(\overline{D'})$

$$R_{\varepsilon\eta}\omega(y)=\int_{D'} k_\varepsilon(y_1-z_1)q_\eta(y'-z')\omega(z)dz,$$

удовлетворяющие граничным условиям (5). Для достаточно малых $\varepsilon$ и $\eta$ их можно продолжить нулем в $\overline{D}\diagdown D'_{x_0}$, и при этом они будут гладкими. Обозначим через $R^*_{\varepsilon\eta}$ сопряженный к $R_{\varepsilon\eta}$ интегральный оператор. Его ядро имеет вид $k_\varepsilon(z_1-y_1)\,q_\eta(z'-y')$. Тогда для каждой $v\in\hat{L}_2(D')$ функции $R^*_{\varepsilon\eta}v\in C^\infty(\overline{D'})$ удовлетворяют (6), и поэтому $(\omega, L^*R^*_{\varepsilon\eta}v)=(g, R^*_{\varepsilon\eta}v)$. Следовательно, $(L^*R^*_{\varepsilon\eta})^*\omega=R_{\varepsilon\eta}g$, где $(L^*R^*_{\varepsilon\eta})^*$ — сопряженный к $L^*R^*_{\varepsilon\eta}$ интегральный оператор. Однако $R_{\varepsilon\eta}\omega\to\omega$ и $R_{\varepsilon\eta}g\to g$ в $\hat{L}_2(D')$ при $\varepsilon,\eta\to 0$. Допустим, что нами найдены такие последовательности $\varepsilon_k\to+0$ и $\eta_k\to+0$, что

$$\|(L^*R^*_{\varepsilon_k\eta_k})^*\omega-LR_{\varepsilon_k\eta_k}\omega\|\to 0 \text{ при } k\to\infty. \tag{8}$$

Отсюда следует, что $\omega$ — сильное решение задачи (7), (5) с приближающей последовательностью $\{R_{\varepsilon_k\eta_k}\omega\}$.

Рассмотрим

$$(L^*R^*_{\varepsilon\eta})^*\omega(y)-LR_{\varepsilon\eta}\omega(y) \tag{9}$$

$$=\int_{D'}\Big\{\frac{\partial}{\partial z_j}[A_j(y)k_\varepsilon(y_1-z_1)q_\eta(y'-z')-k_\varepsilon(y_1-z_1)q_\eta(y'-z')A_j(z)]$$

$$-[B(y)k_\varepsilon(y_1-z_1)q_\eta(y'-z')-k_\varepsilon(y_1-z_1)q_\eta(y'-z')B(z)]\Big\}\,\omega(z)dz.$$

Как и в работе [5], можно найти такие последовательности $\eta_k\to+0$, $\varepsilon_k\to+0$, $\varepsilon_k\leq\eta_k$, что выражение в правой стороне равенства (9), исключая слагаемое при $j=1$, сходилось к нулю в $\hat{L}_2(D')$ при $k\to\infty$. Обозначим $r_{\varepsilon\eta}(y-z)=\varepsilon^{-1}\eta^{1-m}j(\varepsilon^{-1}(y_1-z_1))\prod j(\eta^{-1}(y_\nu-z_\nu))$. Вспоминая вид матрицы $A_1$, находим, что (8) будет доказано, если для каждого $i=r+1,\ldots,n$ выполнено

$$\int_{D'}\frac{\partial}{\partial z_1}\{[a_i(y_1)-a_i(z_1)]r_{\varepsilon\eta}(y-z)\}\omega_i(z)dz\to 0 \text{ в } L_2(D') \tag{10}$$

для $\varepsilon=\varepsilon_k$, $\eta=\eta_k$ при $k\to\infty$. Заметим, что функции $a_i$ удовлетворяют условию Липшица в $D'$ ($D'$ — выпуклая область). Тогда (10) доказывается обычным путем (см. [6], 51—52, только там $\varepsilon=\eta$, а здесь $\varepsilon\leq\eta$). При этом используется то, что функции $a_i$ зависят только от переменной $y_1$. Теорема 1 доказана.

Замечание. В работе [6], в доказательстве утверждения, аналогичного (10), самым существенным образом используется, что функции $a_i$ удовлетворяют условию Липшица. Однако для некоторых областей последнее не следует из $a_i\in C^1$ (см. конец п. 3 этой статьи). Поэтому сформулированные теоремы надо прецизировать.

**3. Случай липшицовой границы.** Граница $S$ называется липшицовой, если для каждой ее точки существует окрестность в $S$, которая после некоторого вращения $T:x\mapsto y$ задается с уравнением $y_1=F(y_2,\ldots,y_m)$, где функция $F$ удовлетворяет условию Липшица.

Теорема 2. *Пусть граница $S$ — липшицовая и на ней не заданы граничные или сопряженные граничные условия. Тогда в предположении* п. 1, *каждое слабое решение задачи* (1), (2) — *сильное.*

Доказательство. Используя разбиение единицы, локализируем задачу и сводим ее к следующей задаче. Область будет $D'=\{y_1\geq F(y_2,\ldots,y_m)\}$, где носитель функции $F$ ограничен, и для каждых двух точек, $y', z'\in R^{m-1}$

$$|F(y')-F(z')|\leq E|y'-z'|,\quad E=\text{const}.$$

В $D'$ задан оператор $L=A^j\partial/\partial y_j+B$, где матрицы $A^j$ — кусочно-гладкие, а $B$ — кусочно-непрерывная. Функция $\omega$ (носитель которой ограничен) является слабым решением уравнения $L\omega=g$, где $g\in\hat{L}_2(D')$. Граничные условия задаются на поверхности $y_1=F(y_2,\ldots,y_m)$, притом или

а) нет граничных условий, или

б) нет сопряженных граничных условий.

Надо доказать, что $\omega$ — сильное решение. Рассмотрим функции

$$R'_{\varepsilon\varepsilon}\omega(y)=\int_{D'}k'_\varepsilon(y_1-z_1)q_\varepsilon(y'-z')\omega(z)dz,$$

где матрица $q_\varepsilon$ определена в п. 2 (здесь $\eta=\varepsilon$). Матрица $k'_\varepsilon$ — диагональная, и все элементы ее главной диагонали равняются

$$\varepsilon^{-1}j(\varepsilon^{-1}(y_1-z_1)+\delta_1(m-1)E+2\delta_1),$$

где $\delta_1=1$ или $\delta_1=-1$ для случаев а) и б) соответственно. Функции $R'_{\varepsilon\varepsilon}\omega$ и $R'^{*}_{\varepsilon\varepsilon}v$ для каждого $v\in\hat{L}_2(D')$ удовлетворяют соответственно граничным и сопряженным граничным условиям. Покажем, например, что в случае б) выполнено $R'_{\varepsilon\varepsilon}\omega(y)=0$, если $y_1\leq F(y_1)+\varepsilon$. В самом деле, для таких точек $(y_1,y')$ и для $(z_1,z')\in D'$

$$\varepsilon^{-1}(y_1-z_1)-(m-1)E-2\leq\varepsilon^{-1}(F(y')+\varepsilon-F(z'))\tag{11}$$
$$-(m-1)E-2\leq\varepsilon^{-1}E|y'-z'|-(m-1)E-1.$$

Если хотя бы одно из неравенств $|y_\nu-z_\nu|<\varepsilon$, $\nu=2,\ldots,m$, нарушено, то $q_\varepsilon(y'-z')=0$. Если все они выполнены, из (11) следует, что $k'_\varepsilon(y_1-z_1)=0$, т. е. $R'_{\varepsilon\varepsilon}\omega(y)=0$. Тогда, как в теореме 1, все в точности сводится к доказательству, что

$$\|(L^*R'^{*}_{\varepsilon\varepsilon})^*\omega-LR'_{\varepsilon\varepsilon}\omega\|\to0\quad\text{при}\quad\varepsilon\to0.$$

Однако здесь матрицы $k'_\varepsilon$ и $q_\varepsilon$ коммутируют со всеми $n\times n$ матрицами, так что, имея в виду (9), надо доказать, что при $\varepsilon\to 0$

$$\left\| \int_{D'} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_j} [(A^j(y)-A^j(z))k'_\varepsilon q_\varepsilon] - [B(y)-B(z)[k'_\varepsilon q_\varepsilon\right\} \omega(z)dz \right\| \to 0.$$

Это можно сделать, как в [6]. В доказательстве используется, что элементы $A^j$ удовлетворяют условию Липшица в $D'$. Это является частью леммы 2, которую сформулируем и докажем ниже. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Случай, когда на границе не заданы граничные условия, рассмотрен в [3]. Для верности теоремы в этом случае достаточно, что равенство $(u, L^*v)=(f, v)$ выполнено только для функций $v\in C^\infty$, которые аннулируются в окрестности границы.

Замечание 2. В теореме 1 приближающая последовательность функций $R_{\varepsilon\eta}\omega\in C^\infty(\overline{D'})$. Пусть граничное пространство $N(x)$ не только кусочно-гладкое, но и всюду принадлежит $C^1$. Тогда в теореме 1 приближающая сильное решение последовательность будет с непрерывными первыми производными в области $D$, с эвентуальным исключением тех точек, где некоторые из матриц $A^j$ не принадлежат $C^1$. В теореме 2 функции из приближающей последовательности принадлежат классу $C^\infty$.

Теперь сформулируем лемму, которая представляет и самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Пусть функция $F$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $E$ в области $G=\{(y_1,\dots,y_p): y_1>0,\dots,y_k>0\}$ или $G=R^p$. Тогда существует равномерно сходящая к функции $F$ последовательность функций класса $C^\infty(\overline{G})$, все первые производные которых ограничены постоянной $E$.*

Доказательство. Для $y\in R^p$ определим функцию $\overline{F}(y)=F(y)$, если $G=R^p$ и $\overline{F}(y_1,\dots,y_p)=F(|y_1|,\dots,|y_k|, y_{k+1},\dots,y_p)$ в другом случае. Она удовлетворяет условию Липшица с постоянной $E$. Для $\varepsilon>0$ рассмотрим функцию класса $C^\infty(R^p)$

$$F_\varepsilon(y)=\int_{R^p}\varepsilon^{-p}\prod_{\nu=1}^{p} j((y_\nu-z_\nu)/\varepsilon)\overline{F}(z)dz,$$

где $j$ — функция, определенная в п. 2. Для всех $h\neq 0$ имеем

$$|[F_\varepsilon(y_1,\dots,y_q+h,\dots,y_p)-F_\varepsilon(y_1,\dots,y_q,\dots,y_p)]/h|$$

$$\leq \int \varepsilon^{-p}\prod j((y_\nu-z_\nu)/\varepsilon)\,|[\overline{F}(z_1,\dots,z_q+h,\dots,z_p)-\overline{F}(z_1,\dots,z_q,\dots,z_p)]/h|\,dz.$$

Так как $\int\varepsilon^{-p}\prod j(\varepsilon^{-1}(y_\nu-z_\nu))dz=1$, то $|\partial F_\varepsilon/\partial y_q|\leq E$ и выполнено

$$|F_\varepsilon(y)-F(y)|\leq E\int\varepsilon^{-p}\prod j(\varepsilon^{-1}(y_\nu-z_\nu))\,|y-z|\,dz\leq pE\varepsilon,$$

чем лемма 1 доказана.

Замечание. Ясно, что при помощи разбиения единицы эта лемма распространяется и на другие области $G$, например, для параллелепипеда. Кроме того, используя замену независимых переменных, лемму переносим на большой класс областей.

Лемма 2. *Пусть функция $F$ удовлетворяет условию Липшица в области $G=\{(y_2,\dots,y_m):y_1>0,\dots,y_k>0\}$ или $G=R^{m-1}$. Пусть функция $a(y)$ непрерывна в $\overline{G'}=\{(y_1,\dots,y_m):y_1\geqq F(y'),\ y_2\geqq 0,\dots,\ y_k\geqq 0\}$ или соответственно в $\overline{G'}=\{y_1\geqq F(y')\}$ и в $G'$ имеет ограниченные первые производные. Тогда функция $a(y)$ удовлетворяет условию Липшица в $G'$.*

Доказательство. Покажем сначала, что с некоторой постоянной $c$ выполнено

$$|a(F(y'),y')-a(F(z'),z')|\leqq c|y'-z'|,\ (y',z')\in G\times G. \tag{12}$$

Пусть $\varepsilon_k\to+0$ при $k\to\infty$. Рассмотрим функции

$$F'_k(y')=F_{\varepsilon_k}(y')+2(m-1)E\varepsilon_k, \tag{13}$$

где $F_{\varepsilon_k}$ — функции из леммы 1 при $p=m-1$. Функции (13) принадлежат $C^\infty$, их первые производные ограничены постоянной Липшица $E$ функции $F$ и

$$|F_{\varepsilon_k}(y')-F(y')|\leqq(m-1)E_{\varepsilon_k}, \tag{14}$$

так что $F'_k(y')\geqq F(y')+(m-1)E\varepsilon_k$. Отсюда вытекает, что $(F'_k(y'),y')\in G'$ для $y'\in G$. Все первые производные функции $F'_k$ равномерно ограничены, и область $G$ выпуклая. Тогда из предположений для функции $a(y)$ следует, что существует постоянная $c$, независящая от $k$, так что

$$|a(F'_k(y'),y')-a(F'_k(z'),z')|\leqq c|y'-z'|,\ (y',z')\in G\times G. \tag{15}$$

Из (14) вытекает, что для всех $y'\in G$, $z'\in G$

$$|a(F(y'),y')-a(F(z'),z')|=\lim_{k\to\infty}|a(F'_k(y'),y')-a(F'_k(z'),z')|,$$

а отсюда и из (15) следует, что неравенство (12) выполнено.

Пусть теперь $y\in G'$, $z\in G'$. Рассмотрим отрезок между ними. Если он не пересекает границу, то

$$|a(y)-a(z)|\leqq c_1|y-z|,\ c_1=m\sum\sup|\partial a/\partial y_j|. \tag{16}$$

Если отрезок пересекает границу $G'$, это возможно только в точках поверхности $y_1=F(y')$. Пусть первая и последняя точки пересечения (из $y$ к $z$) будут $(F(u'),u')$ и $(F(v'),v')$. Тогда

$$|a(y)-a(z)|\leqq|a(y)-a(F(u'),u')|$$
$$+|a(z)-a(F(v'),v')|+|a(F(u'),u')-a(F(v'),v')|\leqq c_2|y-z|,$$

где $c_2=\max(c,c_1)$. В этом неравенстве для первых двух слагаемых мы применили (16), а для последнего — (12). Этим доказано, что функция $a(y)$ удовлетворяет условию Липшица в $G'$ с постоянной Липшица $c_2$.

Замечание. То, что лемма 2 является необходимой, видно на следующих примерах. Рассмотрим в $R^2$ область $D_\varepsilon=\{y<|x|^{1/\varepsilon}\}\cap\{x^2+y^2<2\}$, где $\varepsilon>0$. Из леммы 2 следует, что для $0<\varepsilon\leqq 1$ каждая функция из $C^1(\overline{D}_\varepsilon)$ удовлетворяет условию Липшица в $D_\varepsilon$. Однако для $\varepsilon>1$ это уже не так. Действительно, рассмотрим в этом случае функцию

$$a_\alpha(x,y)=0 \text{ в } R^2\setminus\{x>0,y>0\},\ a_\alpha(x,y)=2y^\alpha/(x+y) \text{ в } \{x>0,y>0\}.$$

Для $\alpha>2$ функция $a_\alpha\in C^1(\overline{D}_\varepsilon)$. Однако, если $\alpha<1+\varepsilon$, нет такой постоянной $E$, чтобы для всех $0<y<1$ имели $y^{\alpha-1}\leqq|a_\alpha(y^\varepsilon,y)-a_\alpha(-y^\varepsilon,y)|\leqq Ey^\varepsilon$.

Поэтому, если выберем $2<\alpha<1+\varepsilon$, функция $a_\alpha \in C^1(\bar{D}_\varepsilon)$, однако она не удовлетворяет условию Липшица в $D_\varepsilon$. Заметим, что функция $|x|^{1/\varepsilon}$ удовлетворяет условию Гельдера.

**4. Граница с углами.** Опубликованные до сих пор результаты о совпадении слабого и сильного решений для углов относятся только к таким углам, которые могут быть локально отображены в прямых посредством неособого преобразования класса $C^2$, иными словами, только для некоторых ненулевых углов с дважды гладкими гранями. Для полноты изложения, даем критерий 1, указывающий на то, какими должны быть эти углы в случае двух независимых переменных. Возникает, однако, вопрос, нельзя ли доказать, что слабое решение — сильно и для ненулевих углов, одна грань которых — дважды гладкая поверхность, а другая — однократно гладкая или только липшицовая? Нельзя ли рассмотреть и нулевые углы? Насколько нам известно, такие результаты до сих пор не опубликованы. Теоремы 3 и 4 дают в некоторых случаях утвердительный ответ на этот вопрос.

Критерий 1. Рассмотрим две дважды гладкие кривые на плоскости, общее начало которых $O$. Если угол между их тангентами в точке $O$ отличный от $\pi$ и ненулевой, то со стороны, где угол меньше $\pi$, существует окрестность точки $O$, отображаемая в части $\{y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0\}$ неособым преобразованием класса $C^2$. При этом кривые отображаются в отрезках прямых $y_1=0$ и $y_2=0$, т. е. грани угла выпрямляются. Это условие является также и необходимым, т. е. для углов не менее $\pi$ или нулевых такая окрестность не существует.

Теорема 3. *Пусть граница $S$ области $D$ состоит только из точек $x_0$:*

1) *в окрестности которых применимы теорема 1 или 2;*

2) *для каждой из которых существуют окрестность в $\bar{D}$ и неособое преобразование класса $C^2$, отображающее эту окрестность в части угла $\{(y_1,\ldots,y_m): y_1 \geqq F(y_2,\ldots,y_m),\ y_2 \geqq 0,\ldots,y_m \geqq 0\}$, причем сечение этой окрестности с $S$ отображается в частях его граней. Здесь $2 \leqq s=s(x_0) \leqq m$. Функция $F$ удовлетворяет условию Липшица.*

*Пусть выполнено одно из следующих условий:*

*а. На той части $S$, которая отображается в $y_2=0$, граничное пространство $N(x)$ — кусочно-гладко, сохраняет размерность и содержит ядро $\beta(x)$; граничная матрица $\beta$ зависит только от переменной, нормальной к границе. На некоторых из других $s-1$-граней не заданы граничные, а на остальных — сопряженные граничные условия.*

*б. На некоторых гранях не заданы граничные, а на остальных — сопряженные граничные условия.*

*Тогда каждое слабое решение задачи* (1), (2) *является сильным.*

Доказательство. Можно считать, что посредством разбиения единицы задача уже локализирована.

Рассмотрим сначала окрестность некоторой точки вида 2а. В рассматриваемом угле $D'$ оператор, граничные и сопряженные граничные условия на $y_2=0$ преобразуем, как в теореме 1. Пусть $E$ — постоянная Липшица функции $F$ и $y''=(y_1, y_3,\ldots,y_m)$. Надо доказать, что слабое решение $\omega$ является сильным. Построим приближающие функции. Для $0<\varepsilon\leqq\eta$ их определяем таким образом:

$$R''_{\varepsilon\eta}\omega(y)=\int_{D'} k_\varepsilon(y_2-z_2)q'_\eta(y''-z'')\omega(z)dz, \tag{17}$$

где $k_\varepsilon$ — матрица из доказательства теоремы 1, а $q'_\eta$ — диагональная $n\times n$ матрица, все элементы главной диагонали которой равняются

$$\eta^{1-m}j[(y_1-z_1)/\eta+3\delta_1(m-1)E+2\delta_1]\prod_{\nu=3}^{s}j[(y_\nu-z_\nu)/\eta+2\delta_\nu]\prod_{\nu=s+1}^{m}j[(y_\nu-z_\nu)/\eta].$$

Здесь $\delta_\nu=1$ ($\delta_\nu=-1$), если на соответствующей грани не заданы граничные (сопряженные граничные) условия. Функции $R''_{\varepsilon\eta}\omega$ и $R''^{*}_{\varepsilon\eta}v$ для каждой $v\in\hat{L}_2(D')$ удовлетворяют соответственно граничным и сопряженным граничным условиям. Это понятно для граней $y_\nu=0$, $\nu=2,\ldots,s$. Рассмотрим $y_1=F(y_2,\ldots,y_m)$. Пусть, например, на ней не заданы граничные условия. Тогда $\delta_1=1$ и $R''^{*}_{\varepsilon\eta}v(y)=0$, если $y_1\leqq F(y_2,\ldots,y_m)+\eta$. Действительно, для таких точек $y$ и для всех $z\in D'$ имеем

$$(18)\qquad (z_1-y_1)/\eta+3(m-1)E+2\geqq[F(z_2,\ldots,z_m)-F(y_2,\ldots,y_m)-\eta]/\eta$$
$$+3(m-1)E+2\geqq3(m-1)E+1-E\eta^{-1}\sum_{\nu=2}^{m}|y_\nu-z_\nu|.$$

Если некоторое из неравенств $|y_2-z_2|<3\varepsilon$, $|y_\nu-z_\nu|<3\eta$, $\nu=3,\ldots,m$, не выполнено, ядро $R''^{*}_{\varepsilon\eta}$ $k_\varepsilon(z_2-y_2)q'_\eta(z''-y'')=0$. Если все они выполнены, из (18) получаем

$$\eta^{-1}(z_1-y_1)+3(m-1)E+2\geqq3(m-1)E+1-3(m-2)E-3\varepsilon\eta^{-1}E\geqq1,$$

т. е. $q'_\eta(z''-y'')=0$. Анологичным образом рассматривается и случай, когда на грани $y_1=F(y')$ не заданы сопряженные граничные условия. Дальше доказательство продолжается, как в теореме 1. Естественно, используется и лемма 2. Заметим, что при выборе $\varepsilon_k$ и $\eta_k$ можно выполнить и условие $\varepsilon_k\leqq\eta_k$ (см. доказательство теоремы 1).

Рассмотрим окрестность точки вида 2б. Доказательство здесь протекает, как в теореме 2, опять при $\eta=\varepsilon$, только носитель усредняющего ядра сдвинут. Ядро — это диагональная матрица, все элементы главной диагонали которой равняются

$$\varepsilon^{-m}j[(y_1-z_1)/\varepsilon+3\delta_1(m-1)E+2\delta_1]\prod_{\nu=2}^{s}j[(y_\nu-z_\nu)/\varepsilon+2\delta_\nu]\prod_{\nu=s+1}^{m}j[(y_\nu-z_\nu)/\varepsilon].$$

Теорема 3 доказана.

Для проверки условия теоремы 3 даем следующий критерий (для двух независимых переменных):

Критерий 2. Пусть у кривых $\gamma_1$ и $\gamma_2$ общее начало $O$ и они соответственно однажды и дважды гладкие. Пусть угол между их тангентами в $O$ отличен от $\pi$ и ненулевой. Тогда со стороны, где угол меньше $\pi$, существует окрестность точки $O$, отображаемая в угле вида $\{y_1\geqq F(y_2), y_2\geqq0\}$, посредством неособого преобразования класса $C^2$. При этом граница переходит в $y_1=F(y_2)$ и $y_2=0$. Функция $F\in C^1$.

Сейчас обобщим теорему 3 и для нулевых углов.

Теорема 4. *Пусть элементы матриц $A^j$ — удовлетворяют условию Липшица в $D$. Тогда в теореме 3 в случае 2а условие липшицовости функции $F$ можно заменить следующим: для каждых двух точек $(y_2,\ldots,y_m)$, $(z_2,\ldots,z_m)$ выполнено*

$$(19) \qquad |F(y_2,\ldots,y_m)-F(z_2,\ldots,z_m)| \leqq \varphi(|y_2-z_2|)+E\sum_{\nu=3}^{m}|y_\nu-z_\nu|,$$

*где функция* $\varphi$ *— ограничена и* $\varphi(\varepsilon)\to 0$ *при* $\varepsilon\to+0$, *а* $E$ *— постоянная*

Доказательство. Для $\delta\geqq 0$ определим монотонно возрастающую функцию $\psi(\delta)=\sup\limits_{0\leq\varepsilon\leq\delta}\varphi(\varepsilon)$. Очевидно, $\varphi\leqq\psi$ и $\psi(\delta)\to 0$ при $\delta\to+0$. Рассмотрим функции $R''_{\varepsilon\eta}\omega$ (см. (17)). Можно считать, что $E>0$. Пусть положительные числа $\varepsilon$ и $\eta$ связаны неравенством $\psi(3\varepsilon)\leqq 3E\eta$. В таком случае, если $|y_2-z_2|<3\varepsilon$ и $|y_\nu-z_\nu|<3\eta$ для $\nu=3,\ldots,m$, то

$$|F(y_2,\ldots,y_m)-F(z_2,\ldots,z_m)|\leqq\psi(|y_2-z_2|)+E\sum|y_\nu-z_\nu|$$
$$\leqq\psi(3\varepsilon)+3(m-2)E\eta\leqq 3(m-1)E\eta.$$

Отсюда можно легко доказать, что на грани $y_1=F(y_2,\ldots,y_m)$ функции $R''_{\varepsilon\eta}\omega$ и $R''^{*}_{\varepsilon\eta}\omega$ удовлетворяют соответственно граничным и сопряженным граничным условиям. На остальных гранях это тоже выполнено. Доказательство продолжается, как в теореме 1, только последовательности $\varepsilon_k$ и $\eta_k$ надо выбрать такими, чтобы дополнительно выполнялось $\psi(3\varepsilon_k)\leqq 3E\eta_k$. Заметим, однако, что в теореме 1 ограничения на $\varepsilon_k$ и $\eta_k$ имеют такой вид: $\eta_k\to+0$, $0<\varepsilon_k\leqq\eta_k$, $\varepsilon_k\leqq\varepsilon(\eta_k)$, где $\varepsilon(\eta_k)>0$. Так как здесь $\psi(\delta)\to 0$ при $\delta\to+0$, для каждого $\eta>0$ можно найти такое число $\delta(\eta)>0$, что $\psi(3\delta(\eta))\leqq 3E\eta$. Тогда для всех $0<\varepsilon\leqq\delta(\eta)$ имеем $\psi(3\varepsilon)\leqq 3E\eta$. Поэтому сначала выбираем последовательность $\eta_k\to+0$ и потом для каждого $k$ — число $\varepsilon_k$, которое удовлетворяет неравенствам $0<\varepsilon_k\leqq\eta_k$, $\varepsilon_k\leqq\varepsilon(\eta_k)$, $\varepsilon_k\leqq\delta(\eta_k)$. Последовательность $\{R''_{\varepsilon_k\eta_k}\}$ имеет все нужные свойства. Теорема 4 доказана.

Замечание. В случае двух переменных каждая непрерывная функция $F(y_2)$, с ограниченным носителем удовлетворяет условию (19). Действительно, для $\varepsilon\geqq 0$ можно определить $\varphi(\varepsilon)=\max\limits_{|y-z|\leqq\varepsilon}|F(y)-F(z)|$.

Теоремы 1, 2 и 3 применимы, например, при исследовании некоторых новых краевых задач для рассмотренного в [7] классе уравнений смешанного типа. Теорему 4 мы использовали в [10].

Отметим, что большинство результатов имеет место и в случае неограниченных областей. После соответствующих изменений аналогичные результаты можно получить и для уравнений в частных производных второго порядка.

## ЛИТЕРАТУРА

1. K. O. Friedrichs. The identity of weak and strong extensions of differential operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **55**, 1944, 132—151.
2. K. O. Friedrichs. Symmetric positive linear differential equations. *Comm. Pure and Appl. Math.*, **11**, 1958, 333—418.
3. P. D. Lax, R. S. Phillips. Local boundary conditions for dissipativ symmetric linear differential operators. *Comm. Pure and Appl. Math*, **13**, 1960, 427—455.
4. L. Sarason. On weak and strong solutions of boudary value problems. *Comm. Pure and Appl. Math.*, **15**, 1962, 237—288.

5. G. Peyser. On the identity of weak and strong solutions of differential equations with local boundary conditions. *Amer. J. Math.*, **87**, 1965, 267—277.
6. М. Нагумо. Лекции по современной теории уравнений в частных производных. Москва, 1967, с. 132.
7. Н. И. Попиванов. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями параболического вырождения. *Доклады БАН*, **25**, 1972, 441—444.
8. Н. И. Попиванов. О совпадении слабого и сильного решения краевых задач линейных систем первого порядка. *Доклады БАН*, **26**, 1973, 1147—1150.
9. Н. И. Попиванов. Краевые задачи для уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения. *Сердика*, **1**, 1975, (в печати).
10. Н. И. Попиванов. Об одном классе вырождающихся многомерных гиперболических уравнений. *Годишник на Соф. ун-тет, Мат. фак.*, **67** (в печати).

*Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике*
*София 1000 п. я. 373*

*Поступила 4. 4. 1973*