Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ С КОНЕЧНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ, НЕНАДЕЖНЫМ ПРИБОРОМ И АБСОЛЮТНЫМ ПРИОРИТЕТОМ

БОЯН Н. ДИМИТРОВ, ХРИСТО К. КАРАПЕНЕВ

В [3] исследована система обслуживания с конечным источником и двумя типами повреждений прибора в незанятом состоянии. Отмечено, каким образом посредством подходящих модификаций участвующих случайных величин могут быть изучены и некоторые приоритетные системы подобного типа. В настоящей работе рассматривается система с несколькими конечными источниками заявок с абсолютным приоритетом при обслуживании и прибором, ненадежным в свободном состоянии. Основное внимание уделяется асимптотическому поведению некоторых нестационарных характеристик процесса обслуживания (вероятность пребывания в данном множестве состояний). Попутно выводятся и другие характеристики (период занятости прибора, период регенерации процесса, вероятности состояний), которые могут быть использованы при анализе этих систем и в других целях.

1. Описание системы. Пусть из r конечных источников поступают заявки на прибор, который ненадежен в свободном состоянии. Если прибор останется в незанятом состоянии в течение времени t, то он выйдет из строя с вероятностью $F(t)$ до момента t. Его восстановление начинается сразу после этого „повреждения" и имеет случайную продолжительность с функцией распределения (ф. р.) $G(t)$. Во время обслуживания прибор абсолютно надежден и сразу после окончания очередного обслуживания переходит к следующему, если имеется ожидающая заявка. Источники пронумерованы числами $1, 2, \ldots, r$. Заявки от источника с номером i имеют абсолютный приоритет перед заявками от источника с номером j только при $i<j$; если во время обслуживания заявки от j-го источника поступит заявка от i-го источника, обслуживание первой прерывается до тех пор, пока не будут обслужены новоприбывшая и все заявки более высокого приоритета, которые поступят. В зависимости от дисциплины обслуживания прерванной заявки получаются несколько разновидностей абсолютного приоритета (см. [1], гл. IV или [4], гл. IX, 1).

Предполагаем, что общее число заявок в k-м источнике равно n_k; времена пребывания заявок в источнике представляют независимые между собой случайные величины (сл. в.) с одинаковыми ф. р. $A_k(t)=1-e^{-\lambda_k t}$, $\lambda_k>0$, $k=1, \ldots, r$. Если обслуживание заявок k-го источника не прервется, оно продлится случайное время β_k с ф. р. $B_k(x)$. Времена обслуживания всех заявок предполагаем независимыми случайными величинами. После обслуживания каждая заявка немедленно возвращается в свой источник.

Если $A(x)$, $B(x)$, $F(x), \ldots$ суть ф. р. неотрицательных сл. в., то соответствующие им Лаплас — Стильтесовые преобразования (Л.—С.) обозначаем обычно строчными греческими или латинскими буквами $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\varphi(s), \ldots$, а их обычные преобразования Лапласа $\alpha^*(s)$, $\beta^*(s)$, $\varphi^*(s), \ldots$

2. Период занятости и период регенерации. Обозначим через $\Pi_k(x)$ ф. р. периода занятости π_k прибора обслуживанием заявок, имеющих приоритет не ниже k. Величина π_k является продолжительностью интервала времени, начинающегося с момента поступления заявки с наименьшим приоритетом k в свободном и исправном приборе и кончающегося в первый момент после того, как прибор освободится от заявок с приоритетом $1, 2, \ldots, k$, $1 \leq k \leq r$. Назовем случайную величину π_k k-периодом. Реализации π_k, которые начинаются с обслуживания заявки от источника с номером i, $i \leq k$, назовем ki-периодами и будем обозначать их π_{ki}, а соответствующую им ф. р. — $\Pi_{ki}(x)$. Обозначим $C_k(x)$ ф. р. периода занятости прибора c_k, который начинается с повреждения обслуживающего прибора (в свободном состоянии) и кончается в первый последующий момент, когда прибор становится доступным для заявок приоритета $k+1, \ldots, r$, $1 \leq k \leq r$. Ясно, что сразу после периодов занятости π_r и c_r прибор будет оставаться свободным от заявок и в исправности.

Пусть π — период занятости, который может начаться либо с повреждения прибора, либо с обслуживания некоторой заявки. Пусть также $\Pi(x) = P\{\pi < x\}$. Функция $\Pi(x)$ задается равенством

$$\Pi(x) = \varphi(\sigma) C_r(x) + [1 - \varphi(\sigma)] \Pi_r(x), \tag{1}$$

где $\sigma = n_1\lambda_1 + \cdots + n_r\lambda_r$, а через $\varphi(.)$ обозначено Л.—С. преобразование $F(x)$.

Равенство (1) выводится простыми рассуждениями, которые учитывают возможные реализации c_r и π_r величины π. Подобные рассуждения показывают, что функции $\Pi_k(x)$ и $\Pi_{ki}(x)$ $(i = 1, \ldots, k,\ k = 1, \ldots, r)$ связаны между собой равенствами

$$\Pi_k(x) = \sum_{i=1}^{k} n_i \lambda_i \Pi_{ki}(x) / \sigma_k, \tag{2}$$

где $\sigma_k = n_1\lambda_1 + \cdots + n_k\lambda_k$, $1 \leq k \leq r$.

Временем пребывания заявки приоритета k на приборе (k-блокировкой) назовем интервал времени h_k, начинающий с момента начала обслуживания некоторой заявки k-го источника и заканчивающийся первым последующим моментом, когда прибор будет доступным для заявок того же источника. Обозначим через $H_k(x)$ ф. р. k-блокировки, а через $h_k(s)$ — ее Л. — С.-преобразование. Как известно ([4], гл. IX. 4) для разных дисциплин обслуживания абсолютного приоритета функция $h_k(s)$ определяется соответствующими выражениями:

при абсолютном приоритете с дообслуживанием прерванной заявки:

$$h_k(s) = \beta_k(s + \sigma_{k-1} - \sigma_{k-1}\pi_{k-1}(s)); \tag{3}$$

при возвращении прерванной заявки обратно в источнике:

$$h_k(s) = \beta_k(s + \sigma_{k-1}) + \sigma_{k-1}[1 - \beta_k(s + \sigma_{k-1})]\pi_{k-1}(s)/(s + \sigma_{k-1}); \tag{4}$$

при неидентичном повторном обслуживании прерванной заявки:

$$h_k(s) = \beta_k(s + \sigma_{k-1}) \{1 - \sigma_{k-1}[1 - \beta_k(s + \sigma_{k-1})]\pi_{k-1}(s)/(s + \sigma_{k-1})\}^{-1}; \tag{5}$$

при идентичном повторном обслуживании прерванной заявки:

$$(6)\qquad h_k(s)=\int_0^\infty e^{-(s+\sigma_{k-1})x}\{1-\sigma_{k-1}[1-e^{-(s+\sigma_{k-1})x}]\pi_{k-1}(s)/(s+\sigma_{k-1})\}^{-1}dB_k(x).$$

Из этих выражений видно, что функции $h_k(s)$ определяются посредством функций $\pi_{k-1}(s)$. С другой стороны, для нахождения $\pi_{k-1}(s)$ необходимо знать $h_{k-1}(s)$. Следующая теорема выясняет точную связь между перечисленными функциями.

Теорема 1. а) *Л. — С.-преобразования функций $H_k(x)$, $\Pi_{ki}(x)$ и $\Pi_k(x)$ определяются однозначно системой рекуррентных уравнений*

$$(7)\qquad \pi_{kk}(s)=\left[\sum_{l=0}^{n_k}\binom{n_k}{l}V_k(l-1,\,s)\right]^{-1}\sum_{l=0}^{n_k-1}\binom{n_k-1}{l}V_k(l-1,\,s),$$

$$(8)\quad \pi_{ki}(s)=\left[\sum_{l=0}^{n_k}\binom{n_k}{l}V_k(l-1,\,s)\right]^{-1}\sum_{l=0}^{n_k}\binom{n_k}{l}V_k(l-1,\,s)\pi_{k-1,i}(s+l\lambda_k),\ 1\le i\le k-1,$$

$$(9)\qquad \pi_k(s)=\sum_{i=1}^{k}n_i\lambda_i\pi_{ki}(s)/\sigma_k$$

и одним из уравнений (3)—(6), *соответствующим рассматриваемой дисциплине обслуживания. Здесь положено*

$$V_k(l,\,s)=\begin{cases}\prod_{j=0}^{l}[1-h_k(j\lambda_k+s)]/h_k(j\lambda_k+s) & \text{при } l\ge 0,\\ 1 & \text{при } l=-1.\end{cases}$$

б) *Если* $\beta_{k1}=\int_0^\infty x\,dB_k(x)<\infty$, $k=1,\ldots,r$, *то существуют математические ожидания* $\mathbf{E}\pi_{ki}=\pi_{ki1}$, $\mathbf{E}\pi_k=\bar\pi_{k1}$ *и* $\mathbf{E}h_k=h_{k1}$, *которые определяются системой рекуррентных уравнений*

$$\pi_{kk1}=h_{k1}\sum_{l=0}^{n_k-1}\binom{n_k-1}{l}\psi_k(l,\,0),$$

$$\pi_{ki1}=\pi_{k-1,i1}+h_{k1}\sum_{l=1}^{n_k}\binom{n_k}{l}[1-\pi_{k-1,i}(l\lambda_k)]\psi_k(l-1,\,0),\ 1\le i\le k-1,$$

$$\bar\pi_{k1}=\sum_{i=1}^{k}n_i\lambda_i\pi_{ki1}/\sigma_k$$

и одним из уравнений, определяющим h_{k1} через $\bar\pi_{k-1,1}$ для соответствующего типа абсолютного приоритета, полученным из (3)—(6). *Здесь положено*

$$\psi_k(l, s) = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{l} [1 - h_k(j\lambda_k + s)] h_k(i\lambda_k + s) & \text{при } l \geqq 1, \\ 1 & \text{при } l = 0. \end{cases}$$

в) *Если* $\beta_{k2} = \int\limits_0^\infty x^2 dB_k(x) < \infty$, $k = 1, \ldots, r$, *то существуют вторые моменты* $\mathbf{E}\pi_{ki}^2 = \pi_{ki2}$, $\mathbf{E}\pi_k^2 = \overline{\pi}_{k2}$ *и* $\mathbf{E}h_k^2 = h_{k2}$, $1 \leqq i \leqq k \leqq r$, *которые определяются системой рекуррентных уравнений*

$$\pi_{kk2} = -2\pi_{kk1}\, h_{k1}\left[1 - \sum_{l=1}^{n_k} \binom{n_k}{l} \psi_k(l-1, 0)\right] + \sum_{l=0}^{n_k-1} \binom{n_k - 1}{l} [h_{k2}\psi_k(l, 0) - 2h_{k1}\psi_k'(l, 0)],$$

$$\pi_{ki2} = -2\pi_{ki1}\, h_{k1}\left[1 - \sum_{l=1}^{n_k} \binom{n_k}{l} \psi_k(l-1, 0)\right] + \pi_{k-1,i2} + 2\pi_{k-1,i1}\, h_{k1} + \sum_{l=1}^{n_k} \binom{n_k}{l} [(1 - \pi_{k-1,i}(l\lambda_k))(h_{k2}\, \psi_k(l-1, 0) - 2h_{k1}\, \psi_k'(l-1, 0)) + 2h_{k1}\, \pi_{k-1,i}'(l\lambda_k)\psi_k(l-1, 0)], \qquad 1 \leqq i \leqq k-1;$$

$$\overline{\pi}_{k2} = \sum_{i=1}^{k} n_i \lambda_i \pi_{ki2} / \sigma_k,$$

уравнениями п. б) и одним из уравнений, выражающим h_{k2} *через* $\overline{\pi}_{k-1,1}$ *и* $\overline{\pi}_{k-1,2}$ *для соответствующего типа абсолютного приоритета, полученным из равенств* (3) — (6) *по формуле* $h_{k2} = h_k''(0)$.

Доказательство. Любая из реализаций периода занятости может начаться либо с обслуживания заявки приоритета k, либо с обслуживания заявки приоритета i, $1 \leqq i < k$. Во втором случае прибор станет доступным для обслуживания заявок приоритета k лишь после того, как будет закончено обслуживание всех прибывших тем временем заявок более высокого приоритета, чем k, т. е. лишь по истечении времени $\pi_{k-1,i}$. Каждое обслуживание заявок приоритета k будет прерываться при поступлении заявок приоритета i, $1 \leqq i < k$, и любое из этих прерываний будет длиться столько же, сколько длится один из периодов занятости прибора π_{k-1}. Получается почти такая же картина, как в схеме обслуживания с прибором, ненадежным в занятом состоянии (см. [4, гл. V, т. 3]). Время пребывания h_k включает в себя все эти прерывания и времена, когда обслуживается сама заявка приоритета k. Таким образом, обслуживание заявок k-го источника сводится к обслуживанию такого же источника в системе с одним прибором, где время единичного обслуживания h_k. Для этой системы времена π_{kk} и π_{ki} $(1 \leqq i \leqq k-1)$ являются соответственно обычным периодом занятости и периодом занятости с запаздыванием, равным $\pi_{k-1,i}$ (см. [1], гл. II, п. 2). В результате этого сведения изучаемой системы к уже изученной нами в [3] мы можем сразу написать равенства (7) и (8). Взаимосвязь (9) следует из (2). Рекуррентные зависимости п. а) показывают путь последовательного определения: функции $h_2(s)$ через $\pi_1(s)$; $\pi_{22}(s)$ через $h_2(s)$; $\pi_{21}(s)$ через $\pi_1(s)$ и $h_2(s)$ и т. д.

Доказательства б) и в) сводятся к дифференцированию равенств п. а) теоремы и соответствующего равенства из (3)—(4) при использовании формул

$$h_{k1}=-h'_k(0), \quad h_{k2}=h''_k(0).$$

В случае дисциплины дообслуживания прерванной заявки к уравнениям п. п. а) и в), например, следует добавить еще два уравнения:

$$h_{k1}=\beta_{k1}\,(1+\sigma_{k-1}\bar{\pi}_{k-1,1}),$$

$$h_{k2}=\beta_{k2}(1+\sigma_{k-1}\bar{\pi}_{k-1,1})^2+\beta_{k1}\,\sigma_{k-1}\bar{\pi}_{k-1,2}.$$

Следствие. *При каждом* $k=1,\ldots,r$ *Л.—С.-преобразование* $c_k(s)$ *функции* $C_k(x)$ *связано с функциями* $c_{k-1}(s)$ *и* $h_k(s)$ *соотношением*

$$c_k(s)=\left[\sum_{l=0}^{n_k}\binom{n_k}{l}V_k(l-1,s)\right]^{-1}\sum_{l=0}^{n_k}\binom{n_k}{l}V_k(l-1,s)c_{k-1}(s+l\lambda_k), \tag{10}$$

где $\qquad g(s)\equiv c_0(s)$ *и* $\beta_1(s)\equiv h_1(s)$.

Доказательство. Равенством (10) определяется Л. — С.-преобразование ф. р. периода занятости с запаздыванием в системе обслуживания, состоящей из одного источника с характеристиками, как у k-го источника в первоначальной системе, и одного прибора, где время обслуживания h_k. Запаздывание этого периода занятости равняется c_{k-1} — т. е. длительности интервала недоступности прибора для заявок k-го источника в первоначальной системе, если к тому же прибор вышел из строя.

Вычисление моментов $\mathbf{E}c_k=c_{k1}$ и $\mathbf{E}c_k^2=c_{k2}$, $k=1,\ldots,r$, проводится в соответствии с формулами теоремы 1, б), в). Одинаковы взаимосвязи между моментами величин c_k и c_{k-1} и между моментами величин π_{ki} и $\pi_{k-1,i}$ при $i=1,\ldots,k-1$. В этом случае, однако, должно быть выполнено еще одно дополнительное условие: $\gamma_2=\int\limits_0^\infty x^2dG(x)<\infty$.

Периодом регенерации процесса обслуживания является интервал времени $\varkappa$ между двумя последовательными моментами перехода прибора в состояние „исправным и свободным от обслуживания". Пусть $K(x)$ — ф. р. периода регенерации и $k(s)$ — ее Л. — С.-преобразование. С помощью вероятностного толкования Л. — С.-преобразований и применения формулы полной вероятности для функции $k(s)$ выводим выражение

$$k(s)=\sigma[1-\varphi(s+\sigma)]\pi_r(s)/(s+\sigma)+\varphi(s+\sigma)c_r(s).$$

Если условия $\beta_{i1}<\infty$, $i=1,\ldots,r$, $\gamma_1<\infty$ выполнены, средняя продолжительность периода регенерации конечна и определяется равенством

$k_1=-k'(0)=[1-\varphi(\sigma)](1/\sigma+\bar{\pi}_{r1})+\varphi(\sigma)c_{r1}$, а если и вторые моменты времен обслуживания и времени восстановления прибора конечны, то существует и $k_2=\mathbf{E}\varkappa^2$, заданное соотношением

$$k_2=k''(0)=[1-\varphi(\sigma)]\,(2/\sigma^2+2\bar{\pi}_{r1}/\sigma+\bar{\pi}_{r2})+\varphi(\sigma)c_{r2}$$
$$+\varphi'(\sigma)\,(2/\sigma+2\bar{\pi}_{r1}-2c_{r1}). \tag{11}$$

3. Вероятности макросостояний процесса. Вводим следующие обозначения для состояний системы:

S_0 — прибор свободен от обслуживания и исправен;

S_{i0} — прибор находится в r_i-период занятости, и обслуживание первой заявки все еще не закончено, $i=1,\ldots,r$;

S_{i1} — прибор находится в r_i-периоде занятости, и обслуживание первой заявки этого периода закончено, $i=1,\ldots,r$;

$S_{r+1,0}$ — прибор находится в процессе восстановления;

$S_{r+1,1}$ — прибор находится в период занятости c_r, и его восстановление закончено.

Пусть $t_0=0$ — момент начала периода регенерации (момент попадания системы в состояние S_0). Через $P_0(t)$ обозначим вероятность того, что в момент времени t система будет в состоянии S_0, а через $P_{ij}(t)$ — вероятность нахождения системы в состоянии S_{ij}, $i=1,\ldots,r+1$, $j=0$, 1. Преобразования Лапласа функций $P_0(t)$ и $P_{ij}(t)$ обозначим соответственно через $p_0^*(s)$ и $p_{ij}^*(s)$.

Теорема 2. а) *Функции $p_0^*(s)$ и $p_{ij}^*(s)$ определяются равенствами*

$$p_0^*(s)=[1-\varphi(s+\sigma)]/\{(s+\sigma)[1-k(s)]\},$$
$$p_{i0}^*(s)=n_i\lambda_i[1-\varphi(s+\sigma)]\,[1-h_i(s)]/\{s(s+\sigma)\,[1-k(s)]\},\quad 1\leq i\leq r,$$
$$p_{i1}^*(s)=n_i\lambda_i[1-\varphi(s+\sigma)]\,[h_i(s)-\pi_{ri}(s)]/\{s(s+\sigma)\,[1-k(s)]\},\quad 1\leq i\leq r, \tag{12}$$
$$p_{r+1,0}^*(s)=\varphi(s+\sigma)\,[1-g(s)]/\{s[1-k(s)]\},$$
$$p_{r+1,1}^*(s)=\varphi(s+\sigma)\,[g(s)-c_r(s)]/\{s[1-k(s)]\}.$$

б) *Если время ремонта прибора и времена обслуживания имеют конечные математические ожидания, то существуют стационарные вероятности $P_0=\lim_{t\to\infty}P_0(t)$ и $P_{ij}=\lim_{t\to\infty}P_{ij}(t)$, и определяются выражениями*

$$P_0=[1-\varphi(\sigma)]/\sigma k_1,$$
$$P_{i0}=n_i\lambda_i[1-\varphi(\sigma)]h_{i1}/\sigma k_1,\quad P_{i1}=n_i\lambda_i[1-\varphi(\sigma)]\,(\pi_{ri1}-h_{i1})/\sigma k_1,\quad 1\leq i\leq r, \tag{13}$$
$$P_{r+1,0}=\varphi(\sigma)\gamma_1/k_1,\quad P_{r+1,1}=\varphi(\sigma)\,(c_{r1}-\gamma_1)/k_1.$$

Доказательство. а) Используя вероятностное толкование Л. — С.-преобразований и рассуждая как при выводе вероятности макросостояний для системы с одним источником (см. [3], т. 3) мы получаем линейные уравнения для вероятностей $p_0^*(s)$ и $p_{ij}^*(s)$, решение которых дает нам (12).

б) Применяя Тауберову теорему (см. [4], гл. I, т. 9), из равенств

$$P_0=\lim_{s\downarrow 0} sp_0^*(s), \quad P_{ij}=\lim_{s\downarrow 0} sp_{ij}^*(s)$$

и (12) выводим соотношения (13).

4. Интегральная оценка близости стационарных и нестационарных характеристик системы. Выражениями $E_0(T)=\int_0^T P_0(t)dt$ и $E_{ij}(T)=\int_0^T P_{ij}(t)dt$ задаются средние времена пребывания системы за время T соответственно в состояниях S_0 и S_{ij}, $i=1,\ldots,r+1$, $j=0,1$ при нестационарном режиме процесса обслуживания. Ясно, что при замене $E_0(T)$ и $E_{ij}(T)$ соответственно на P_0T и $P_{ij}T$, характеризующие стационарный процесс обслуживания, получаются ошибки, которые следует учитывать. Некоторые оценки таких ошибок при больших значениях T задаются следующим утверждением:

Теорема 3. *Если выполнены условия*

$$\beta_{k2}=\int_0^\infty x^2dB_k(x)<\infty,\ k=1,\ldots,r,\quad \gamma_2=\int_0^\infty x^2dG(x)<\infty,$$

то при $T\to\infty$ *верны асимптотические соотношения*

$$E_0(T)\sim P_0T+1\{[1-\varphi(\sigma)]\,(k_2\sigma-2k_1)-2k_1\sigma\varphi'(\sigma)\}/(2\sigma^2k_1^2),$$

$$E_{i0}(T)\sim P_{i0}T+n_i\lambda_i\,\{[1-\varphi(\sigma)][(k_2\sigma-2k_1)h_{i1}-\sigma k_1h_{i2}]-2\sigma k_1\varphi'(\sigma)h_{i1}\}/(2\sigma^2k_1^2)$$

$$1\leq i\leq r,$$

$$E_{i1}(T)\sim P_{i1}\,T+n_i\lambda_i\{[1-\varphi(\sigma)]\,[(k_2\sigma-2k_1)\,(\pi_{ri1}-h_{i1})-\sigma k_1(\pi_{ri2}-h_{i2})]$$
$$-2\sigma k_1\varphi'(\sigma)\,(\pi_{ri1}-h_{i1})\}/(2\sigma^2k_1^2)\ 1\leq i\leq r, \tag{14}$$

$$E_{r+1,0}(T)\sim P_{r+1,0}\,T+[\varphi(\sigma)\,(k_2\gamma_1-k_1\gamma_2)+2\varphi'(\sigma)k_1\gamma_1]/(2k_1^2),$$

$$E_{r+1,1}(T)\sim P_{r+1,1}\,T+\{\varphi(\sigma)[k_2(c_{r1}-\gamma_1)-k_1(c_{r2}-\gamma_2)]+2\varphi'(\sigma)k_1(c_{r1}-\gamma_1)\}(2k_1^2),$$

где величины π_{ri2} *и* k_2 *определены соответственно теоремой 1. в) и равенством* (11).

Доказательство. Воспользуемся методом, примененным в [2] при рассмотрении подобной задачи для системы типа $M/G/1$. Для этой цели представим каждую из интересующих нас характеристик как решение интегрального уравнения типа Вольтерра с замкнутым циклом (см. [5], с. 91—99):

$$\Phi(x)=Q(x)+\int_0^x R(x-u)\Phi(u)du. \tag{15}$$

При условии, что существует предел $q=\lim_{x\to\infty} Q(x)$ и что $\int_0^\infty e^{-sx}R(x)dx\neq 1$ при $\mathrm{Re}\,s\geq 0$, асимптотическое поведение решения уравнения (4.2) $\Phi(x)$

при $x \to \infty$ определяется соотношением $\lim\limits_{x\to\infty} \Phi(x) = q\left[1 - \int\limits_0^\infty R(x)dx\right]^{-1}$. При этом можно использовать равенство $\int\limits_0^\infty R(x)dx = \lim\limits_{s\downarrow 0} \int\limits_0^\infty e^{-sx} R(x)dx$.

В качестве примера приведем вывод одного из асимптотических равенств (14) для функции $E_0(T)$.

Сначала заметим, что первая из формул (12) может быть записана в виде

$$p_0^*(s) = [1 - \varphi(s+\sigma)]/s - \{\sigma[1 - k(s)]/s - k(s)\}\, p_0^*(s).$$

Это уравнение (относительно $p_0^*(s)$) эквивалентно следующему интегральному уравнению для вероятности $P_0(t)$

$$P_0(t) = 1 - \int\limits_0^t e^{-\sigma x} dF(x) - \int\limits_0^t \{\sigma[1 - K(t-x)] - K'(t-x)\} P_0(x)dx, \tag{16}$$

которое является уравнением типа Вольтерра (15). Положим $S(t) = \sigma[1 - K(t)] - K'(t)$ и $\Delta(T) = \int\limits_0^T [P_0(t) - P_0]dt$. После небольших преобразований из (16) для функции $\Delta(T)$ выводим интегральное уравнение

$$\Delta(T) = (1 - P_0)T - \int\limits_0^T \int\limits_0^t e^{-\sigma x} dF(x)dt - P_0 \int\limits_0^T \int\limits_0^t S(x)dxdt - \int\limits_0^T S(x)\Delta(T-x)dx,$$

которое также является уравнением типа (15). К тому же при $\operatorname{Re} s \geq 0$ выполнено условие

$$-\int\limits_0^\infty e^{-sx} S(x)dx = k(s) - \sigma[1 - k(s)]/s < k(s) \leq 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{T\to\infty} \Delta(T) = q\left[1 + \int\limits_0^\infty S(x)dx\right]^{-1},$$

где

$$\int\limits_0^\infty S(x)dx = \lim_{s\downarrow 0} \int\limits_0^\infty e^{-sx} S(x)dx = \lim_{s\downarrow 0} \{\sigma[1 - k(s)]/s - k(s)\} = \sigma k_1 - 1,$$

а через q обозначен предел

$$q = \lim_{T\to\infty}\left[(1 - P_0)T - \int\limits_0^T \int\limits_0^t e^{-\sigma x} dF(x)dt - P_0 \int\limits_0^T \int\limits_0^t S(x)dxdt\right].$$

После смены в порядке интегрирования для q получим

$$q=\lim_{T\to\infty}\left[(1-P_0)T-\int_0^T e^{-\sigma x}(T-x)dF(x)-P_0\int_0^T S(x)(T-x)dx\right]$$

$$=\int_0^\infty xe^{-\sigma x}dF(x)+P_0\int_0^\infty xS(x)dx+\lim_{T\to\infty}T\left[1-P_0-\int_0^T e^{-\sigma x}dF(x)-P_0\int_0^T S(x)dx\right].$$

Так как $k_2<\infty$, то

$$\lim_{T\to\infty}T\left\{-P_0[1-K(T)]+1-\int_0^T e^{-\sigma x}dF(x)-\frac{1}{k_1}[1-\varphi(\sigma)]\int_0^T[1-K(x)]dx\right\}=0.$$

Таким образом находим, что

$$q=-\varphi'(\sigma)+P_0(\sigma k_2/2-k_1),$$

откуда следует

$$\lim_{T\to\infty}\Delta(T)=(1-\varphi(\sigma))(\sigma k_2/2-k_1)/(\sigma^2k_1^2)-\varphi'(\sigma)/(\sigma k_1). \tag{17}$$

Соотношение (17) и первое из асимптотических равенств в (14) эквивалентны. Таким же способом выводятся и остальные асимптотические равенства в (14).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Джейсуол. Очереди с приоритетами. Москва, 1973.
2. Б. Н. Димитров. Интегральная оценка близости нестационарных и стационарных характеристик процесса обслуживания. *Годишник Соф. унив., Мат. фак.*, **66**, 1971/72, 219—231.
3. Б. Н. Димитров, Хр. К. Карапенев. О системах обслуживания с конечным источником и ненадежным прибором. *Годишник Соф. унив., Мат. фак.*, **67** (в печати).
4. А. Обретенов, Б. Димитров, Е. Даниелян. Масово обслужване и приоритетни системи на обслужване. София, 1973.
5. Н. Винер, Р. Пэли. Преобразования Фурье в комплексной области. Москва, 1964.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике

София 1000 п. я. 373

Поступила 12. 3. 1974