Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ И ПАРАМЕТРОМ

МИХАИЛ М. КОНСТАНТИНОВ, ДРУМИ Д. БАЙНОВ

В работе находятся достаточные условия существования и единственности решения одного класса краевых задач для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

1. Постановка задачи. Основные предположения. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом изучались многими авторами в различных постановках [1]—[6]. Существует большой класс краевых задач для дифференциальных уравнений с параметрами [2]—[4], которые сводятся к проблемам управления при помощи начальной функции [7], [8].

Исследуемая ниже краевая задача обобщает результаты работы [4] — рассмотрена более общая постановка и наложены менее жесткие ограничения в теоремах существования и единственности решения.

Рассмотрим следующую з а д а ч у: найти такое значение скалярного параметра λ из некоторого компакта Λ, чтобы функция $y=y(s)$ принимала заданное значение y_T для фиксированного $s=T$, где y является решением начальной задачи:

$$(1)\qquad \begin{gathered} y'(s)=\frac{a}{T}\lambda+Y(s, \lambda, y(s), y(\tau(s, \lambda, y(s)))),\ s>0, \\ y(s)=\varphi(s, \lambda),\ s\leq 0\ (\tau\leq s,\ '\equiv\frac{d}{ds}). \end{gathered}$$

Положим

$$(2)\qquad \begin{gathered} y(s)=x(s)+\varphi(0, \lambda)+\frac{1}{T}(y_T-\varphi(0, \lambda))t,\quad s>0, \\ y(s)=x(s)+\varphi(s, \lambda),\ s\leq 0, \\ s=Tt,\ a\lambda=\mu. \end{gathered}$$

Тогда задачу можно сформулировать следующим образом.

З а д а ч а (P). *Найти $\mu\in M=[-\mu_0, \mu_0]$, такое, что $x(1)=0$, где $x=x(t)$ является решением начальной задачи:*

$$(3)\qquad \begin{gathered} \dot{x}(t)=\mu+X(t, \mu, x(t),\ x(\Delta(t, \mu, x(t)))),\ t\in I=[0, 1], \\ x(t)=0,\ t\leq 0. \end{gathered}$$

Здесь элементы начальной задачи (3) очевидным образом получены из элементов начальной задачи (1) при помощи постановок (2).

Всюду дальше будем предполагать, что выполнены следующие условия (A):

A1. Функции $X(t, \mu, \xi_1, \xi_2)$ и $\Delta(t, \mu, \xi)$ определены и непрерывны по всем аргументам в областях $Q_X = I \times M \times D^2$ и $Q_\Delta = I \times M \times D$, где $D = \{\xi : |\xi| \leqq d < \infty\}$.

A2. Имеет место неравенство $d_0 \leqq d$,

$$d_0 = \max \{ \int_0^1 |G(t, s)| X_0(s) ds : t \in I \},$$

$$X_0(t) = \max \{ |X(t, \mu, \xi_1, \xi_2)| : (\mu, \xi_1, \xi_2) \in M \times D^2 \},$$

$$G(t, s) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \leqq s \leqq t \leqq 1, \\ -t, & 0 \leqq t < s \leqq 1. \end{cases}$$

2. Существование решений краевой задачи.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (A). Пусть, кроме того,*

$$\int_0^1 X_0(t)\, dt \leqq \mu_0.$$

Тогда задача (P) имеет хотя бы одно решение.

Доказательство. Рассмотрим произведение $\Omega = \omega \times M$, где ω — множество непрерывных функций x на интервале

$$I_0 = [\Delta_0, 1], \quad \Delta_0 = \min \{ \Delta(t, \mu, \xi) : (t, \mu, \xi) \in Q_\Delta \},$$

таких, что

$$|x(t)| \leqq g(t) \int_0^1 |G(t, s)| X_0(s) ds, \quad g(t) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sign} t), \tag{4}$$

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leqq m |t_1 - t_2|, \tag{5}$$

где $m = 2 \max \{ X_0(t) : t \in I \}$.

Пусть оператор Π действует в Ω по формуле $\Pi(z) = (\Pi(x), \Pi(\mu))$, $z = (x, \mu)$:

$$\begin{aligned} \Pi(x)(t) &= g(t) \int_0^1 G(t, s) X(s, \mu, x(s), x(\Delta(s, \mu, x(s)))) ds, \\ \Pi(\mu) &= -\int_0^1 X(s, \mu, x(s), x(\Delta(s, \mu, x(s)))) ds. \end{aligned} \tag{6}$$

Покажем, что операторное уравнение $z = \Pi z$ эквивалентно начальной задаче (3) с краевым условием $x(1) = 0$. Действительно, тогда $\Pi(x)(t) = x(t)$ и $\Pi(\mu) = \mu$. Для $t \leqq 0$ из (6) следует $x(t) = 0$, а для $t > 0$ в силу определения ядра G имеем

$$x(t) = (1 - t) \int_0^t X(s, .) ds - t \int_t^1 X(s, .) ds,$$

$$\dot{x}(t) = -\int_0^1 X(s, .)ds + X(t, .) = \mu + X(t, .),$$

т. е. x является решением начальной задачи (3) с краевым условием $x(1)=0$.

Из (6) и A2. следует, что функция $H(x)$ удовлетворяет условию (4), $H(u) \in M$, а область значений функции $H(x)$ содержится в области D.

Пусть $t_1, t_2 \in I$, $t_2 - t_1 = \theta \geq 0$. Тогда

$$|Hx(t_1) - H(x)(t_2)| \leq \int_0^1 |G(t_1, s) - G(t_2, s)| \, |X_0(s)|ds$$

$$\leq \frac{m}{2} \left(\int_0^{t_1} |t_1 - t_2| ds + \int_{t_1}^{t_2} |-1 - t_1 + t_2| ds + \int_{t_2}^{1} |t_1 - t_2| ds\right)$$

$$= m(\theta t_1 + \theta(1-\theta) + \theta(1-t_2))/2 = m\theta(1-\theta) \leq m\,|t_1 - t_2|.$$

Следовательно, функция $H(x)$ удовлетворяет условию (5) и $H(\Omega) \subset \Omega$.

На основе теорем Вейерштрасса, Асколи и Тихонова множество Ω — компактное. Так как множество Ω — выпуклое, то ссылка на принцип Шаудера о неподвижной точке завершает доказательство теоремы 1 (непрерывность оператора H на Ω следует ив условия A1, в силу которого функции X и Δ равномерно непрерывны на компактах Q_X и Q_Δ).

3. Единственность решения краевой задачи.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть, кроме того, в областях Q_X и Q_Δ функции X и Δ удовлетворяют условиям Липшица*

$$|X(t, \mu, \xi_1, \xi_2) - X(t, \bar{\mu}, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)| \leq L\,|\mu - \bar{\mu}| + \sum_{i=1}^{2} L_i\,|\xi_i - \bar{\xi}_i|,$$

$$|\Delta(t, \mu, \xi) - \Delta(t, \bar{\mu}, \bar{\xi})| \leq \nu\,|\mu - \bar{\mu}| + \nu_1\,|\xi - \bar{\xi}|.$$

Пусть, наконец, $A + 2B < 2$, где $A = L_1 + L_2(1 + m\nu_1)$, $B = L + L_2 m\nu$.

Тогда задача (P) имеет единственное решение.

Доказательство. Введем в Ω норму $\|z\|_\Omega = \|x\| + q\,|\mu|$, где

$$\|x\| = \max\{|x(t)| : t \in I\}, \quad q = (2 - A - 2B)/4A(1-B).$$

Для $z, \bar{z} \in \Omega$ $(z = (x, \mu))$ имеем

$$|H(x)(t) - H(\bar{x})(t)| \leq \int_0^1 |G(t, s)| \, (L\,|\mu - \bar{\mu}| + L_1\,|x(s) - \bar{x}(s)|$$

$$+ L_2(|x(\Delta) - \bar{x}(\Delta)| + |\bar{x}(\Delta) - \bar{x}(\bar{\Delta})|))ds,$$

т. е. $\|H(x) - H(\bar{x})\| \leq \frac{A}{2}\,\|x - \bar{x}\| + \frac{B}{2}\,|\mu - \bar{\mu}|$, так как $\int_0^1 |G(t, s)|\,ds \leq \frac{1}{2}$.

Аналогичным образом получаем $|\Pi(\mu)-\Pi(\bar{\mu})| \le A\|x-\bar{x}\| + B|\mu-\bar{\mu}|$. Следовательно, $\|\Pi(z)-\Pi(\bar{z})\|_{\Omega} \le \alpha\|x-\bar{x}\| + \beta|\mu-\bar{\mu}|$,

$$\alpha = A\left(\frac{1}{2}+q\right), \quad \beta = B\left(\frac{1}{2}+q\right).$$

На основе определения числа q находим оценки

$$\alpha = \frac{A}{2}\left(1+\frac{2-A-2B}{2A(1-B)}\right) \le \frac{A}{2}\left(1+\frac{2-A}{2A}\right) = \frac{A+2}{4} < 1,$$

$$\beta = B\left(\frac{1}{2}+q\right) < \frac{2q}{1+2q}\left(\frac{1}{2}+q\right) = q.$$

Итак, Π — сжимающий оператор на множестве Ω. Теорема 2 доказана.

Покажем применение теорем 1 и 2 на конкретном примере. Пусть

$$X(t, \mu, \xi_1, \xi_2) = a(1-|\mu|)e^{t-1}\cos \pi t - \frac{2b\mu}{1+\mu^2} + \xi_2,$$

$$\Delta(t, \mu, \xi) = t - \frac{1}{16}|\mu|,$$

где a, $b>0$.

Для выполнения условий теоремы 1 достаточно, чтобы $a<\frac{1}{2}$. Пусть кроме того, $b=1$. Тогда задача (P) имеет три решения:

(7) $$\mu = 0, \ x = \frac{a}{\pi}e^{t-1}\sin \pi t,$$

(8) $$\mu = 1, \ x = 0,$$

(9) $$\mu = -1, \ x = 0.$$

В силу сделанных предположений имеем $L_1=0$, $L_2=1$, $\nu_1=0$, $\nu=1/16$, $L=a+2b$, а число μ_0 можно выбрать из условия $\mu_0=2(a+b)/(1-2a)$, $m=2\mu_0$. Тогда

$$A=1, \ B=a+2b+\frac{a+b}{4(1-2a)}.$$

Условия теоремы 2 принимают вид

$$a+2b+(a+b)/4(1-2a)<1/2.$$

В этом случае $b<1/4$ и задача (P) имеет единственное решение (7), потому что решения (8) и (9) для $b<1$ уже не существуют.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Каменский. Вариационные и краевые задачи с отклоняющимся аргументом. *Дифф. уравнения*, **6**, 1970, № 8, 1349—1358.

2. Х. Бенсаад, С. Б. Норкин. Краевая задача с управлением в начальной функции для нелинейных систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. *Укр. мат. ж.*, **26**, 1974, № 1, 3—12.

3. Б. Улашев. Об одном экстремально-интегро-дифференциальном уравнении с авторегулируемым запаздыванием. *Докл. АН Уз. ССР*, 1969, № 7, 10—12.

4. З. Б. Сеидов. Краевая задача для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. *Укр. мат. ж.*, **25**, 1973, 830—834.
5. М. М. Константинов. Существование и единственность решений краевых задач для дифференциальных уравнений сверхнейтрального типа. *Math. Balkanica*, **3**, 1974, 213—219.
6. М. М. Константинов, Д. Д. Байнов. Об одной краевой задаче второго порядка для систем дифференциальных уравнений сверхнейтрального типа. *Сообщ. АН ГрузССР*, **74**, 1974, № 2, 285—288.
7. В. Б. Колмановский. Оптимальное управление системами с запаздыванием выбора начальных условий. *Прикл. матем. и механ.*, **34**, 1970, № 5, 827—835.
8. М. М. Константинов, Д. Д. Байнов. О прогнозировании и идентификации при линейных системах нейтрального типа. *Мат. весн.*, **9**, 1972, № 4, 379—382.

ул. Омортаг 10 1504 София *Поступила 12. 6. 1974*

Медицинская академия София