Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ПРИБЛИЖЕНИЕ ЛОКАЛЬНО-МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ В L И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ

Г. М. ГАСАНОВ И ВАСИЛ А. ПОПОВ

Получены оценки для приближения интегрируемых функций линейными положительными операторами в метрике L через модуль немонотонности функций. Эти оценки применены для оценки погрешности метода коллокации для интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Полученные оценки улучшают соответствующий результат А. И. Гусейнова и Г. М. Гасанова (1973).

1. Рассмотрим класс $B_\mu[a, b]$ ($B_\mu[0, 2\pi]$) локально монотонных функций на отрезке $[a, b]$ (2π-периодических локально-монотонных функций на отрезке $[0, 2\pi]$), который определяется следующим образом: $f \in B_\mu[a, b]$ ($f \in B_\mu[0, 2\pi]$) если

а) $\sup\limits_{x \in [a, b]} |f(x)| \leqq B \quad (\sup\limits_{x} |f(x)| \leqq B)$.

б) модуль немонотонности $\mu(f, \delta)$ функции f удовлетворяет условию $\mu(f; \delta) \leqq \mu(\delta)$, где $\mu(\delta)$-заданная монотонно неубывающая функция, $\lim\limits_{\delta \to 0} \mu(\delta) = 0$.

Напомним, что модуль немонотонности $\mu(f; \delta)$ функции f, введенный Бл. Сендовым [1], [2], определяется следующим образом:

$$\mu(f; \delta) = \frac{1}{2} \sup_{|x_2 - x_1| \leqq \delta} \{ \sup_{x_1 \leqq x \leqq x_2} \{|f(x_1) - f(x)| + |f(x_2) - f(x)| - |f(x_2) - f(x_1)|\}\},$$

где x_1, x_2 принадлежат области определения функции f.

В [3] получена следующая оценка для расстояния между f и g в $L[a, b]$ через $\mu(f; \delta)$ и хоусдорфово расстояние между f и g (относительно определения и основные свойства хаусдорфового расстояния см. [2]).

Теорема А. *Пусть f и g-ограниченчые интегруемые функции на отрезке $[a, b]$ и $f \in B_\mu[a, b]$. Тогда*

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \leqq \inf_{p \in Z} \{4Brp + (b-a)\{\mu\left(\frac{b-a}{p}\right) + r\}\}, \tag{1}$$

где $r = r(f, g)$ — хаусдорфовое расстояние между f и g на интервале $[a, b]$, а Z обозначает множество положительных натуральных чисел.

Если $B \geqq 1$, то оценку (1) можно написать и так

Существует постоянная c, зависящая только от интервала $[a, b]$, такая, что

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx \leqq \inf_{\delta>0} cB\{\mu(\delta)+r(f, g)/\delta\}. \tag{2}$$

В [2], [3] получены оценки для хаусдорфового расстояния между f и Pf, где P — линейный положительный оператор. Эти оценки выражаются через модуль немонотонности функции f. В [4], пользуясь этими оценками и неравенством (2), получены оценки для $\int_a^b |f(x)-(Pf)(x)|\,dx$ для функции из класса $B_\mu[a, b]$ и эти оценки применены для решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода методом коллокации. Здесь мы получим более точные оценки для $\int_a^b |f(x)-(Pf)(x)|\,dx$ и как следствие получим более точные оценки для метода коллокации.

2. Будем рассматривать два случая-приближение интегральными положительными операторами и приближение сумматорными положительными операторами.

Рассмотрим сначала случай интегральных положительных операторов. Пусть $f \in B_\mu\,[0,2\pi]$ и

$$(Pf)(x)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K(t)dt, \tag{3}$$

где $K(t) \geq 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} K(t)dt=1$, K-четное 2π-периодическое ядро.

Имеем

$$\|f-Pf\|_{L[a,\, b]} \leq \int_{-\delta}^{-\delta} K(t)\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)-f(x)|\,dxdt+\int_{\delta}^{\pi} K(t)\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) \tag{4}$$

$$-f(x)|\,dxdt+\int_{-\pi}^{-\delta} K(t)\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)-f(x)|\,dxdt$$

$$\leq \omega(f;\,\delta)_L+2\int_{\delta}^{\pi} K(t)\omega(f;\,t)_L\,dt,$$

где

$$\omega(f;\ \delta)_L = \sup_{0<h\leqq\delta} \int\limits_0^{2\pi} |f(x+h)-f(x)|\,dx \tag{5}$$

— интегральный модуль непрерывности функции f.

Если обозначим $(T(t)f)(x)=f(x+t)$, имеем очевидно $r(T(t)f, f)\leqq t$ и, следовательно, из (2) и (5) получаем (считая, что $B\geqq 1$):

$$\omega(f;\ \delta)_L \leqq \inf_{\theta>0} cB\left\{\frac{\delta}{\theta}+\mu(\theta)\right\}, \tag{6}$$

где c — абсолютная постоянная. Из (4) и (6) получаем:

Лемма 1. *Пусть $f\in B_\mu[0, 2\pi]$, $B\geqq 1$ и P — линейный положительный оператор типа* (3). *Тогда, для любого $\delta>0$:*

$$\|f-Pf\|_{L[0,\,2\pi]}\leqq \inf_{\Theta>0} cB\{\delta/\theta+\mu(\theta)\} \quad +2cB\int\limits_\delta^\pi K(t) \inf_{\Theta_1>0}\{t/\theta_1+\mu(\theta_1)\}dt,$$

где c — абсолютная постоянная.

Рассмотрим частный случай, когда $K(t)$ — ядро Фейера: $K_n(t)= \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin nt/2}{\sin t/2}\right)^2$.

Пусть $\mu(\theta)=O(\theta^\alpha)$, $0<\alpha\leqq 1$. Тогда

$$\inf_{\Theta>0} B\left(\frac{t}{\theta}+O(\theta_1^\alpha)\right)$$

$$\leqq c_1 Bt^{\alpha\,(1+\alpha)}$$

$$\frac{1}{\pi n}\int\limits_\delta^\pi \left(\frac{\sin nt/2}{\sin t/2}\right)^2 c_1 Bt^{\alpha/(1+\alpha)}dt = O(Bn^{-1}\delta^{1/(1+\alpha)}).$$

Если выберем $\delta=n^{-1}$, то получаем для операторов Фейера

$$(\Phi_n f)(x)=\frac{1}{2\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\frac{\sin nt/2}{\sin t/2}\right)^2 dt$$

следующую оценку: $\|f-\Phi_n f\|_{L[0,2\pi]}\leqq c_2 Bn^{-\alpha/(1+\alpha)}$, где c_2 — абсолютная постоянная.

Рассмотрим теперь случай сумматорных положительных операторов. Пусть $f\in B_\mu[a, b]$ и

$$(P_n f)(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_{kn})\Psi_{kn}(x) \tag{7}$$

где $\Psi_{kn}(x)\geqq 0$, $k=0, \ldots, n$, $\sum\limits_{k=0}^{n}\Psi_{kn}(x)=1$, $x\in[a, b]$ и $x_{kn}\in[a, b]$, $k=0, \ldots, n$

Оценим $\| f-P_n f\|_{L[a,b]}$.

Положим:

$$(P_n f)\delta(x)=\sum_{|x_{kn}-x|\leqq\delta} f(x_{kn})\Psi_{kn}(x),$$

(8)
$$\varphi_\delta=\sup_{x\in[a,b]}\sum_{|x_{kn}-x|>\delta}\Psi_{kn}(x).$$

Имеем

$$\{\inf_{|x-t|\leqq\delta} f(t)\}\sum_{|x_{kn}-x|\leqq\delta}\Psi_{kn}(x)\leqq(P_n f)_\delta(x)\leqq\{\sup_{|x-t|\leqq\delta} f(t)\}\sum_{|x_{kn}-x|\leqq\delta}\Psi_{kn}(x)$$

или

$$\inf_{|x-t|\leqq\delta} f(t)-B\varphi_\delta\leqq(P_n f)_\delta(x)\leqq\sup_{|x-t|\leqq\delta} f(t)+B\varphi_\delta.$$

Определим функцию $\varphi(f;x)$ следующим образом:

$$\varphi(f;x)=\begin{cases}(P_n f)_\delta(x), & \text{если} \inf\limits_{|x-t|\leqq\delta} f(t)\leqq(P_n f)_\delta(x)\leqq\sup\limits_{|x-t|\leqq\delta} f(t),\\ \inf\limits_{|x-t|\leqq\delta} f(t), & \text{если} (P_n f)_\delta(x)<\inf\limits_{|x-t|\leqq\delta} f(t),\\ \sup\limits_{|x-t|\leqq\delta} f(t), & \text{если} (P_n f)_\delta(x)>\sup\limits_{|x-t|\leqq\delta} f(t).\end{cases}$$

Очевидно

(9)
$$|\varphi(f;x)-(P_n f)_\delta(x)|\leqq B\varphi_\delta,\quad x\in[a,b].$$

и

(8)
$$h(\varphi(f;x),\quad f(x))\leqq\delta,$$

где $h(\varphi,f)$ — едностороннее хаусдорфовое расстояние от функции φ до f (см. например, [5], [6]). Пользуясь (10) и связью между расстояниями h и r [5, 6], получаем оценку для хаусдорфового расстояния $r(f,\varphi)$ между f и φ через модуль немонотонности функции f:

(11)
$$r(f,\varphi)\leqq\delta+\mu(4\delta).$$

Кроме того очевидно

(12)
$$\|(P_n f)_\delta-P_n f\|_{L[a,b]}\leqq B\varphi_\delta.$$

Из (9), (11), (12) и (2) получаем, если $B\geqq 1$:

$$\|f-P_n f\|_{L[a,b]}\leqq\|f-\varphi\|_{L[a,b]}+\|\varphi-P_n f\|_{L[a,b]}$$

(13)
$$\leqq\inf_{\theta>0} c_3 B\left(\frac{\delta+\mu(4\delta)}{\theta}+\mu(\theta)\right)+\|\varphi-(P_n f)_\delta\|_{L[a,b]}+\|(P_n f)_\delta$$

$$-P_n f\|_{L[a,b]}\leqq\inf_{\theta>0} c_4 B\left(\frac{\delta+\mu(4\delta)}{\theta}+\mu(\theta)+\varphi\delta\right),$$

где постоянная c_4 зависит только от интервала $[a,b]$.

Оценка (13) дает нам

Лемма 2. *Пусть линейный положительный оператор P_n задан через* (7) *и* $f \in B_\mu[a, b]$, $B \geqq 1$. *Тогда, для любого* $\delta > 0$

$$\| f - P_n f \|_{L[a, b]} \leqq \inf_{\theta > 0} c_4 B((\delta + \mu(4\delta))/\theta + \mu(\theta) + \varphi\delta),$$

где φ_δ *определяется через* (8), *а* c_4 — *постоянная, зависящая только от интервала* $[a, b]$.

В частном случае, например, когда $[a, b] = [-1, 1]$ $P_n = \Phi_n$ — оператор Фейера:

$$\Psi_{kn}(x) = (T_n(x)/n(x - x_{kn}))^2 \ (1 - x x_{kn}), \tag{14}$$

где x_{kn} — корни полиномов Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, имеем $\varphi_\delta = O(n^{-1}\delta^{-1})$. Если $\mu(\delta) = O(\delta^\alpha)$, $0 < \alpha \leqq 1$, то легко получается

$$\| f - \Phi_n f \|_{L[-1, 1]} = O(n^{-\alpha/(1+\alpha+\alpha^2)}).$$

3. Полученные результаты позволяют установить оценки погрешности приближенных решений линейных интегральных уравнений методом коллокации, в метрике L в терминах модуля немонотонности ядра и свободного члена данного уравнения [4].

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)\, y(t)\, dt + f(x), \tag{15}$$

где $K(x, t)$, $y(t)$ — заданные суммируемые функции в областях $a \leqq x, t \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$, соответственно.

Приближенные решения ищем в виде:

$$y_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_k \Psi_{kn}(x), \tag{16}$$

где $\Psi_{kn}(x) \geqq 0$, $k = 0, \ldots, n$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \Psi_{kn}(x) = 1$, $x \in [a, b]$

$$_k\Psi_n(x_{in}) = \begin{cases} 0, & k \neq i \\ 1, & k = i \end{cases}$$

x_{kn} — узлы коллокации, $a \leqq x_{0n} \leqq \ldots \leqq x_{nn} = b$.

Согласно методу коллокации коэффициенты c_k, $k = 0, \ldots, n$ в (16) находим таким образом, чтобы выражение (16) удовлетворяло уравнению (15) в точках x_{kn}, $k = 0, \ldots, n$. Тогда, для определения c_k получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$c_i = \lambda \int_a^b K(x_{in}, t) \left\{ \sum_{k=0}^{n} c_k \Psi_{kn}(t) \right\} dt + f(x_{in}), \qquad i = 0, \ldots, n, \tag{17}$$

Обозначим через $B_{x\mu}[a, b]$ класс функций $F(x, t)$, заданных на $a \leq x$, $t \leq b$, для которых $\sup\limits_{x, t \in [a, b]} |F(x, t)| \leq B$ и $\mu(F; \delta)_x \leq \mu(\delta)$ для любого $t \in [a, b]$, где $\mu(F; \delta)_x$ — модуль немонотонности функции $F(x, t)$ относительно x при фиксированном t, а $\mu(\delta)$ — монотонно неубывающая функция, $\lim\limits_{\delta \to 0} \mu(\delta) = 0$.

Введем обозначения:

$$(P_n K)(x, t) - \sum_{k=0}^{n} K(x_{kn}, t) \Psi_{kn}(x)$$

$$(P_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_{kn}) \Psi_{kn}(x)$$

$$\beta_n = \| f - P_n f \|_{L[a, b]}, \quad \varepsilon_n = \sup_{t \in [a, b]} \| P_n K - K \|_{L[a, b]},$$

где вторая норма взята по x.

Пользуясь леммой 2 получаем, если предположим, что $f \in B_{\mu 1}[a, b]$ и $K \in B_{x\mu_2}[a, b]$:

$$\beta_n \leq \inf_{\theta > 0} cB\{(\delta + \mu_1(\delta))/\theta + \mu_1(\theta) + \varphi\delta\}$$

$$\varepsilon_n \leq \inf_{\theta > 0} cB\{(\delta + \mu_2(\delta))/\theta + \mu_a(\theta) + \varphi\delta\},$$

где φ_δ определяется через (8).

Будем предполагать, что операторы P_n такие, что для любой непрерывной функции f на отрезке $[a, b]$ $P_n f$ равномерно стремится к f.

Имеет место следующая теорема [4].

Теорема. *Пусть уравнение* (15) *имеет единственное решение* $y \in L[a, b]$ *и пусть* $f \in B_{\mu_1}[a, b]$, $K \in B_{x\mu_2}[a, b]$. *Тогда при всех достаточно больших* n *и приближенные решения* y_n, *полученные алгоритмом* (16) *и* (17), *существуют и имеет место неравенство*:

$$\| y - y_n \|_{L[a, b]} \leq (1 + R_\lambda)\left\{\beta_n + \frac{(b-a)B\,|\lambda|\,(1+R_\lambda)\varepsilon_n}{1 - |\lambda|\,(1+R_\lambda)\varepsilon_n}\right\},$$

где $R_\lambda = |\lambda| \sup\limits_{t \in [a, b]} \int\limits_a^b |R(x, t, \lambda)|\, dx$, а $R(x, t; \lambda)$ — резольвента ядра $K(x, t)$.

Как следствие из этой теоремы можно получить оценки погрешности приближенного решения при различном выборе функции Ψ_{kn} и узлов x_{ki}. Отметим, что эта теорема улучшает соответствующий результат из [4], что наглядно видно из следующего

Следствие. *Пусть* P_n — *оператор Фейера, т. е.* Ψ_{in} *определяются через* (14), и $\mu_1(\delta) = O(\delta^\alpha)$, $\mu_2(\delta) = O(\delta^\beta)$. *Тогда*

$$\| y - y_n \|_{L[a, b]} = O(n^{-s}),$$

где

$$s = \min\left\{\frac{\alpha}{1 + \alpha + \alpha^2}, \frac{\beta}{1 + \beta + \beta^2}\right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бл. Сендов. Линейные методы приближения периодических функций относительно одной метрики хаусдорфовского типа. *Докл. АН СССР*, **160**, 1965, 1023—1025.
2. Бл. Сендов. Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в метрике Хаусдорфа. *Успехи мат. наук*, **24**, 1969, 141—178.
3. Бл. Сендов, В. А. Попов. О некоторых свойствах хаусдорфовой метрики. *Mathematica, Cluj*, **8** (31), 1966, № 1, 163—172.
4. А. И. Гусейнов, Г. М. Гасанов. Об одной оценке погрешности приближенных решений линейного интегрального уравнения. *Докладва АН СССР*, **211**, 1973, № 6, 1270—1272.
5. А. Андреев, В. А. Попов. Апроксимиране на функции относно една Δ-метрика от хаусдорфов тип. *Годишник Соф. унив., Мат. фак.*, **64**, 1969/1970, 127—142.
6. Bl. Sendov, V. A. Popov. On a Generalization of Jackson's Theorem for best approximation. *J. Approx. Theory*, **9**, 1973, No. 2, 102—111.

Институт математики и механики
Азербайджанской ССР Баку

Единый центр науки и подготовки
кадров по математике и механике
1000 София п. я. 373

Поступила 23. I. 1975 г.