Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

АННА А. ПОПОВА, МИТКО М. ЦВЕТАНОВ

Рассматривается вариационная задача с фиксированными концами, в которой нижняя грань достигается на кривой, которая вместе с производными до некоторого порядка терпит разрывы в конечном числе точек Дано несколько примеров такой задачи.

В [2] рассматривалась задача о нижней грани функционала

$$F(x_0, x_1, \dots, x_n)=\int_{t_0}^{t_1} f(t, x_0(t), x_1(t), \dots, x_n(t))dt,$$

где f предполагалась выпуклой по $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ для всех $t\in[t_0, t_1]$ и непрерывной по $(t, x_0, x_1, \dots, x_n)$ на $[t_0, t_1]\times R^{n+1}$ при условиях, что $x_i(t)=(d^i/dt^i)x_0(t)$, $x_i(\,.\,)\in B^{n-1-i}[t_0, t_1]$, $i=0,1,\dots,n-1$, $x_n(\cdot)\in L$. Здесь $B^k[t_0, t_1]=\{x: x^{(k)}$ — абсолютно непрерывна на $[t_0, t_1]\}$. Далее была получена двойственная функция и доказано равенство $\inf F+\min F^*=0$. Для задачи с фиксированными концами, в которой $x^{(i)}(t_0)=x_0^i$; $x^{(i)}(t_1)=x_1^i$, $i=0,1,\dots,n-1$ последнее равенство имеет вид

$$\inf_{x\in B^{n-1}}\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t),x'(t), \dots, x^{(n)}(t))dt+\min\Big[\int_{t_0}^{t_1} f^*(t,(-1)^n y_0^{(n)}, \dots, y_n(t))dt$$

$$+\Big|(-1)^{n-1}x(t)\,y_0^{(n-1)}(t)+(-1)^{n-2}x'(t)\sum_{i=0}^{1} y_i^{(n-2)}(t)+\dots+x^{(n-1)}(t)\sum_{i=0}^{n-1} y_i(t)\Big|_{t_0}^{t_1}\Big]=0,$$

где минимум берется по всем $y_i\in B^{n-1-i}[t_0, t_1]$, для которых $y_0(t)+y_1(t)+\dots+y_n(t)=0$ для почти всех $t\in[t_0, t_1]$ и

$$f^*(t, z_0, z_1, \dots, z_n)=\sup_{x_0, x_1, \dots x_n}[x_0\, z_0+x_1z_1+\dots+x_nz_n-f(t, x_0, \dots, x_n)].$$

Аналогичные результаты можно получить и если $\inf F(x)$ достигается на кривой, которая вместе с производными до $(n-1)$-го порядка терпит разрывы первого рода в конечном числе точек. Рассмотрим задачу с фиксированными концами. Пусть $\bar{x}(t)$ — произвольная кривая с конечным числом точек разрыва $\tau_i\in[t_0, t_1]$, $i=0,1,\dots,k+1$ (здесь $\tau_0=t_0$, $\tau_{k+1}=t_1$) и такая, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\bar{x}^{(j)}(\tau_i-\varepsilon)=\bar{x}^{(j)}(\tau_i-0)\neq\pm\infty \quad i=1, 2, \dots, k+1, \quad \varepsilon>0$$
$$j=0,1,\dots,n-1$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\bar{x}^{(j)}(\tau_i+\varepsilon)=\bar{x}^{(j)}(\tau_i+0)\neq\pm\infty \quad i=0,1,\dots,k, \quad \varepsilon>0.$$
$$j=0,1,\dots,n-1$$

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 2, 1976 с. 112–121

Будем считать $\bar{x}^{(j)}(t_0)=\bar{x}^{(j)}(t_0-0)$, $\bar{x}^{(j)}(t_1)=\bar{x}^{(j)}(t_1+0)$. По неравенству Юнга для „кривых" $(\bar{x}(t), \bar{x}'(t), \ldots, \bar{x}^{(n)}(t))$ и $((-1)^n y_0^{(n)}(t), (-1)^{n-1} y_1^{(n-1)}(t), \ldots, y_n(t))$, где $y_i \in B^{n-1-i}[t_0, t_1]$, $i=0,1,\ldots,n-1$; $y_n \in L[t_0, t_1]$ и $y_0(t)+y_1(t)+\cdots+y_n(t)=0$, получаем, что для почти всех $t\in[t_0, t_1]$ имеет место

$$f(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t), \ldots, \bar{x}^{(n)}(t))+f^*(t, (-1)^n y_0^{(n)}(t), (-1)^{n-1} y_1^{(n-1)}(t), \ldots, y_n(t))$$
$$\geq (-1)^n \bar{x}(t)\, y_0^{(n)}(t)+(-1)^{n-1}\bar{x}'(t)\, y_1^{(n-1)}(t)+\cdots+\bar{x}^{(n)}(t)\, y_n(t).$$

Проинтегрируем это неравенство на отрезке $t_0\leq t\leq t_1$:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t), \ldots, \bar{x}^{(n)}(t))\, dt+\int_{t_0}^{t_1} f^*(t, (-1)^n y_0^{(n)}(t), \ldots, y_n(t))dt$$
$$\geq \int_{t_0}^{t_1}[(-1)^n\bar{x}(t)\, y_0^{(n)}(t)+(-1)^{n-1}\bar{x}'(t)\, y_1^{(n-1)}(t)+\cdots+\bar{x}^{(n)}(t)\, y_n(t)]dt$$
$$=\sum_{i=0}^{k+1}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}[(-1)^n\bar{x}(t)\, y_0^{(n)}(t)+(-1)^{n-1}\bar{x}'(t)\, y_1^{(n-1)}(t)+\cdots+\bar{x}^{(n)}(t)\, y_n(t)]dt.$$

Как и при доказательстве теоремы 6 из [2] для слагаемых правой части верхнего равенства, получаем

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}[(-1)^n\bar{x}(t)\, y_0^{(n)}(t)+(-1)^{n-1}\bar{x}'(t)\, y_1^{(n-1)}(t)+\cdots+\bar{x}^{(n)}(t)\, y_n(t)]dt$$
$$=\left|(-1)^n\bar{x}(t)\, y_0^{(n-1)}(t)+(-1)^{n-1}\bar{x}'(t)\sum_{j=0}^{1} y_j^{(n-2)}(t)+\cdots-\bar{x}^{(n-1)}(t)\sum_{j=0}^{n-1} y_j(t)\right|_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}.$$

Тогда

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t), \ldots, \bar{x}^{(n)}(t))dt+\int_{t_0}^{t_1} f^*(t, (-1)^n y_0^{(n)}(t), \ldots, y_n(t))dt$$
$$\geq \sum_{j=0}^{k+1}\{(-1)^n[\bar{x}(\tau_i-0)-\bar{x}(\tau_i+0)]\, y_0^{(n-1)}(\tau_i)+(-1)^{n-1}[\bar{x}'(\tau_i-0)-\bar{x}'(\tau_i+0)]$$
$$\times\sum_{j=0}^{1} y_j^{(n-2)}(\tau_i)+\cdots+(-1)\,[\bar{x}^{(n-1)}(\tau_i-0)-\bar{x}^{(n-1)}(\tau_i+0)]\sum_{j=0}^{n-1} y_j(\tau_i)$$
$$+\left|[(-1)^n\bar{x}(t)\, y_0^{(n-1)}(t)+(-1)^{n-1}\bar{x}'(t)\sum_{i=0}^{1} y_j^{(n-2)}(t)+\cdots+(-1)\bar{x}^{(n-1)}(t)\sum_{j=0}^{n-1} y_j(t)]\right|_{t_0}^{t_1}$$

Отсюда следует, что

$$F(\bar{x})=\int_{t_0}^{t_1} f(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t), \ldots, \bar{x}^{(n)}(t))dt$$
$$+\sum_{i=0}^{k+1}\{(-1)^n[\bar{x}(\tau_i+0)-\bar{x}(\tau_i-0)]\, y_0^{(n-1)}(\tau_i)+(-1)^{n-1}[\bar{x}'(\tau_i+0)$$

$$-\bar{x}'(\tau_i-0)]\sum_{j=0}^{1}y_j^{(n-2)}(\tau_i)+\cdots+(-1)[\bar{x}^{(n-1)}(\tau_i+0)-\bar{x}^{(n-1)}(\tau_i-0)]\sum_{j=0}^{n-1}y_i(\tau_i)\}$$

$$\geqq|(-1)^n\bar{x}(t)\tilde{y}_0^{(n-1)}(t)+(-1)^{n-1}\bar{x}'(t)\sum_{j=0}^{1}\tilde{y}_j^{(n-2)}(t)+\cdots \tag{1}$$

$$+(-1)\bar{x}^{(n-1)}(t)\sum_{j=0}^{n-1}\tilde{y}_j(t)\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}f^*(t,(-1)^n y_0^{(\tilde{n})}(t),(-1)^{n-1}y_1^{(n-1)}(t),\ldots,\tilde{y}_n(t))dt$$

$$=\inf_{x\in B^{n-1}[t_0,t_1]}\int_{t_0}^{t_1}f(t,x(t),x'(t),\ldots,x^{(n)}(t))dt.$$

(Здесь $(\tilde{y}_0(t),\tilde{y}_1(t),\ldots,\tilde{y}_n(t))$ — „кривая“, на которой двойственный функционал достигает экстремума).

Итак, мы получили, что $F(\bar{x})\geq\inf\{F(x)\mid x\in B^{n-1}\}$ для любой из рассматриваемых „кривых“ $\bar{x}$. Следовательно, задачу об $\inf\{F(x)\mid x\in B^{n-1}\}$ можно заменить задачей об $\inf F(\bar{x})$, где inf берется по всем „кривым“ $\bar{x}$ с конечным числом точек разрыва.

Пусть $F(\bar{x}_0)=\inf\{F(x)\mid x\in B^{n-1}\}$, где $\bar{x}_0(t)$ имеет вместе с производными до $n-1$-го порядка разрывы первого рода в точках $(\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_{k+1})\subset[t_0,t_1]$ и $x_0\in B^{n-1}$ на отрезках $[\tau_i,\tau_{i+1}]$, $i=0,1,\ldots,k$. Из (1) следует, что

$$\int_{t_0}^{t_1}f(t,\bar{x}_0(t),\bar{x}_0'(t),\ldots,\bar{x}_0^{(n)}(t))dt+\sum_{i=0}^{k+1}\{(-1)^n[\bar{x}_0(\tau_i+0)-\bar{x}_0(\tau_i-0)]\tilde{y}_0^{(n-1)}(\tau_i)$$

$$+(-1)^{n-1}[\bar{x}_0'(\tau_i+0)-\bar{x}_0'(\tau_l-0)]\sum_{j=0}^{1}\tilde{y}_j^{(n-2)}(\tau_i)+\cdots+(-1)[\bar{x}_0^{(n-1)}(\tau_i+0)$$

$$-\bar{x}_0^{(n-1)}(\tau_i-0)]\sum_{j=0}^{n-1}\tilde{y}_j(\tau_i)\}=|(-1)^n\bar{x}_0(t)\tilde{y}_0^{(n-1)}(t)+(-1)^{n-1}\bar{x}_0'(t)\sum_{j=0}^{1}\tilde{y}_j^{(n-2)}(t) \tag{2}$$

$$+\cdots+(-1)\bar{x}_0^{(n-1)}(t)\sum_{j=0}^{n-1}\tilde{y}_j(t)\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}f^*(t,(-1)^n\tilde{y}_0^{(n)}(t),\ldots,\tilde{y}_n(t))dt,$$

где $(\tilde{y}_0,\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_n)$ — экстремальная „кривая“ для двойственного функционала.

С помощью равенства (2) можно доказать (как и в теореме 6 [2]) следующее утверждение:

Для того, чтобы функционал $F(x)$ достигал минимума на „кривой“ $\bar{x}_0(t)$, необходимо и достаточно существование такой „кривой“ $\tilde{y}_0(t),\tilde{y}_1(t),\ldots,\tilde{y}_n(t)$, что

$$((-1)^n\tilde{y}_0^{(n)}(t),(-1)^{n-1}\tilde{y}_1^{(n-1)}(t),\ldots,\tilde{y}_n(t))\in\partial f(t,\bar{x}_0(t),\bar{x}_0'(t),\ldots,\bar{x}_0^{(n)}(t))$$

для почти всех $t\in[t_0,t_1]$.

Решая конкретные задачи мы будем пользоваться равенством (2) и связями, существующими между $x^{(j)}$ и $y_i^{(n-j)}$, получаемыми при нахождении функции f^*.

Эти результаты применяются с успехом для решения некоторых неклассических вариационных задач, в частности таких, при которых нельзя написать уравнение Эйлера в его классическом виде из-за нерегулярности подынтегральной функции по некоторой из переменных $x^{(i)}$ $i=0,1,\ldots,n$.

Рассмотрим три примера такого рода.

П р и м е р 1. *Найти нижнюю грань функционала*

$$I(x)=\int_0^T t^2\left(\frac{x^2}{2}+|\dot{x}|+\frac{\ddot{x}^2}{2}\right)dt$$

$$x(0)=\dot{x}(0)=0;\quad x(T)=x_1>0,\quad \dot{x}(T)=\dot{x}_1>0.$$

Р е ш е н и е. Найдем функцию f^*:

$$f^*(t,\ddot{y}_0,-\dot{y}_1,y_2)=\sup_{x,\dot{x},\ddot{x}}\left[x\ddot{y}_0-\dot{x}\dot{y}_1+\ddot{x}y_2-t^2\left(\frac{x^2}{2}+|\dot{x}|+\frac{\ddot{x}^2}{2}\right)\right].$$

Отсюда $\ddot{y}_0=t^2x,\ y_2=t^2\ddot{x}$ и $f^*=\frac{\ddot{y}_0^2}{2t^2}+\frac{y_2^2}{2t^2}+\delta_Y(\dot{y}_1)$, где $Y=\{\dot{y}_1:|\dot{y}_1|\leq t^2\}$.

Двойственный функционал принимает вид

$$J(y_0,y_1,y_2)=x_1\dot{y}_0(T)-\dot{x}_1[y_0(T)+y_1(T)]-\int_0^T\frac{\ddot{y}_0^2+y_2^2}{2t^2}\,dt.$$

Используя равенство $y_0+y_1+y_2=0$ для J, получаем

$$J=x_1\dot{y}_0(T)+\dot{x}_1y_2(T)-\int_0^T\frac{\ddot{y}_0^2+y_2^2}{2t^2}\,dt.$$

Двойственная задача является задачей с ограничениями

$$\sup J=\sup\left\{x_1\dot{y}_0(T)+\dot{x}_1y_2(T)-\int_0^T\frac{\ddot{y}_0^2+y_2^2}{2t^2}\,dt\ \middle|\ y_0+y_1+y_2=0,\quad |\dot{y}_1|\leq t^2\right\}.$$

Решим сначала эту задачу, не принимая ввиду ограничения. Имеем $\ddot{y}_0t^{-2}=at+b$, $y_2t^{-2}=0$, откуда $y_2\equiv 0$, а для y_0 условия трансверсальности на правом конце дают $aT+b=x_1$, $a=0$, т. е. $\ddot{y}_0t^{-2}=x_1$, $\ddot{y}_0=x_1t^2$, $\dot{y}_0=x_1t^3/3$, $y_0=x_1t^4/12$.

Условия $y_0+y_1+y_2=0$, $|\dot{y}_1|\leq t^2$ и полученное $y_2\equiv 0$ дают, что $|\dot{y}_0|\leq t^2$, т. е. $x_1t^3/3\leq t^2$, откуда следует, что $t\leq 3/x_1$, т. е. при $T\leq 3/x_1$ двойственная задача на самом деле является задачей без ограничений. Из соотношения $x=\ddot{y}_0t^{-2}$ получаем, что $x=x_1$ для всех $t\in(0,T]$.

Используя доказанное выше соотношение для достижения нижней грани на кривой, имеющей вместе с производными конечное число точек разрыва, для I и J получаем

$$I(x_0)=\frac{1}{2}\int_0^T t^2x_1^2dt=x_1^2T^3/6$$

$$J(y_0)=x_1x_1T^3/3-\frac{1}{2}\int_0^T x_1^2t^2dt=x_1^2T^3/6.$$

Равенство $I(x_0)=J(y_0)$ доказывает, что кривые

$$y_0(t)=x_1t^4/12 \quad \text{и} \quad x_0(t)=\begin{cases}0 & t=0\\ x_1 & 0<t\leq T\end{cases}$$

являются экстремалями.

Пусть теперь $T>3/x_1$. Рассмотрим кривую $y(t)=bt^4/12$. Условие $|\dot{y}|\leq t^2$ дает, что $bt^3/3\leq t^2$, откуда $\dot{y}=t^3/T$, $y=t^4/4T+C$. Для x_0 получаем $x_0=\ddot{y}_0t^{-2}=3/T$.

Функционал J на кривой $y_0=t^3/4T$ принимает значение

$$J(y_0)=x_1T^2-\frac{1}{2}\int_0^T 9t^2T^{-2}dt=x_1T^2-\frac{3}{2}T.$$

Найдем значение функционала I на „кривой"

$$x_0(t)=\begin{cases}0 & t=0\\ 3/T & 0<t<T\\ x_1 & t=T\end{cases}$$

$$I(x_0)=\frac{1}{2}\int_0^T t^2(3/T)^2dt+T^2[x_1-3/T]=x_1T^2-\frac{3}{2}T.$$

Равенство $I(x_0)=J(y_0)$ дает, что x_0 и y_0 являются экстремалями.

Метод двойственности позволяет проверить правильность полученного каким-нибудь образом априорного решения задачи.

Покажем теперь, что к решению $y_0(t)=t^4/4T^2$ мы обязаны были прийти и регулярным путем. Действительно, поскольку кривая $y(t)=t^3/3$ не удовлетворяет уравнение Эйлера и, следовательно, не является решением двойственной задачи, то решение должно быть таким, что на некоторых подинтервалах отрезка $[0, T]$ удовлетворялось строгое неравенство $|\dot{y}(t)|<t^2$. Там оно должно удовлетворять уравнение Эйлера, т. е. иметь вид $y(t)=at^5/20+bt^4/12$. Так будет, например, при малых t. Решение $y_0(t)$ должно выходить на ограничение $|\dot{y}(t)|\leq t^2$, поскольку иначе не будут удовлетворяться условия трансверсальности. При выходе на ограничение экстремаль $y_0(t)$ должна быть такой, чтобы $\dot{y}$ имела излом (напомним, что поскольку $y\in B^1$, то $\dot{y}$ абсолютно непрерывна на всем отрезке $[0, T]$ и разрывы может иметь только $\ddot{y}$). Для точки излома проверим условие Вейерштрасса—Эрдмана. Обозначим

$$y_0(t)=\begin{cases}y(t): & \ddot{y}(t)=at^3+bt^2 & 0\leq t\leq \bar{t}\\ z(t): & z''(t)=a_1t^3+b_1t^2 & \bar{t}\leq t\leq T\end{cases}$$

($\bar{t}$ обозначает точку излома $\dot{y}(t)$). Имеем

$$f_1^*-\dot{y}f^*_{1\dot{y}}-\ddot{y}f^*_{1\ddot{y}}+\dot{y}\frac{d}{dt}f^*_{1\ddot{y}}+f^*_{1\ddot{y}}\dot{\varphi}\,|_{t=\bar{t}-0}$$

$$=f_2^*-\dot{z}f^*_{2\dot{z}}-\ddot{z}f^*_{2\ddot{z}}+\dot{z}\frac{d}{dt}f^*_{2\ddot{z}}+f^*_{2\ddot{z}}\dot{\varphi}\,|_{t=\bar{t}+0}$$

$$f^*_{1\dot{y}}-\frac{d}{dt}f^*_{1\ddot{y}}|_{t=\bar{t}-0}=f^*_{2\dot{z}}-\frac{d}{dt}f^*_{2\ddot{z}}|_{t=\bar{t}+0}$$

(здесь $f_1^*=f^*$ левее точки $t=\bar{t}$, а $f_2^*=f^*$ правее этой точки).

Второе равенство дает, что $a=a_1$, а условие трансверсальности на правом конце отрезка $[0, T]$ для z дает, что $a_1=0$. Из первого равенства следует, что $b=b_1$, что возможно только при $t=T$, иначе $|\dot{z}(t)|>t^2$.

Итак, решение $y_0(t)$ будем иметь вид $y_0(t)=bt^4/12+C$ и оно выходит на ограничение $|\dot{y}(t)|=t^2$ только в концах отрезка. Очевидно, что $b>0$, поскольку по условию $x_1>0$.

Равенство $\dot{y}(T)=T^2$ дает $bT^3/3=T^2$, $b=3/T$, $\dot{y}_0(t)=t^3/T$, $y_0(t)=t^4/4T+C$. Итак, мы доказали, что кривая $y_0(t)=t^4/4T+C$ действительно является (единственным) решением двойственной задачи.

Пример 2.

$$I(x)=\int_0^T t^\alpha\left(\frac{|x|^\beta}{\beta}+\frac{|\dot{x}|^\gamma}{\gamma}+|\ddot{x}|\right)dt,$$

где $x(0)=\dot{x}(0)=0$, $x(T)=x_1$, $\dot{x}(T)=0$, $\alpha>0$, $\beta>1$, $\gamma>1$. *Пусть для определенности* $x_1>0$.

Решение

$$f^*(t, \ddot{y}_0, -\dot{y}_1, y_2)=\sup\left[x\ddot{y}_0-\dot{x}\dot{y}_1+\ddot{x}y_2-t^\alpha\left(\frac{|x|^\beta}{\beta}+\frac{|\dot{x}|^\gamma}{\gamma}+|\ddot{x}|\right)\right].$$

Для дальнейшего нам понадобится только связь между x и $\ddot{y}_0$. Имеем $x=|\ddot{y}_0|^{\beta_1-1}/t^{\alpha(\beta_1-1)}$, где $1/\beta+1/\beta_1=1$.

Для f^* получаем

$$f^*=|\ddot{y}_0|^{\beta_1}/\beta_1 t^{\alpha(\beta_1-1)}+|\dot{y}_1|^{\gamma_1}/\gamma_1 t^{\alpha(\gamma_1-1)}+\delta_Y(y_2),$$

где $1/\gamma+1/\gamma_1=1$, а $Y=\{y_2:|y_2|\leqq t^\alpha\}$.

Двойственный функционал принимает вид

$$J(y_0, y_1, y_2)=x_1\dot{y}_0(T)-\int_0^T[|\ddot{y}_0|^{\beta_1}/\beta_1 t^{\alpha(\beta_1-1)}+|\dot{y}_1|^{\gamma_1}/\gamma_1 t^{\alpha(\gamma_1-1)}]dt,$$

где $|y_0+y_1|\leqq t^\alpha$.

Как и в предыдущем примере, найдем $\sup J$ сначала не обращая внимания на ограничения.

$$\sup J=\sup\left[x_1\dot{y}_0(T)-\int_0^T[|\ddot{y}_0|^{\beta_1}/\beta_1 t^{\alpha(\beta_1-1)}+|\dot{y}_1|^{\gamma_1}/\gamma_1 t^{\alpha(\gamma_1-1)}]dt\right];$$

$$\operatorname{sgn}\ddot{y}_0|\ddot{y}_0|^{\beta_1-1}/t^{\alpha(\beta_1-1)}=at+b.$$

Условия трансверсальности на правом конце дают $a=0$, $b=x_1$, т. е. $\operatorname{sgn}\ddot{y}_0|\ddot{y}_0|^{\beta_1-1}/t^{\alpha(\beta_1-1)}=x_1$.

Поскольку мы предполагаем, что $x_1>0$, то $\operatorname{sgn}\ddot{y}_0=1$, т. е. $\ddot{y}_0>0$ при $t>0$. Отсюда $(\ddot{y}_0t^{-\alpha})^{\beta_1-1}=x_1$, $\ddot{y}_0(t)=t^\alpha\cdot x_1^{1/\beta_1-1}$, $\dot{y}_0(t)=x^{1/\beta_1-1}t^{\alpha+1}(\alpha+1)$, $y_0(t)=x_1^{1/\beta_1-1}\,t^{\alpha+2}/(\alpha+1)(\alpha+2)$. Для y_1, используя условие трансверсальности, получаем $y_1(t)=0$. Таким образом, мы свели двойственную задачу к следующей

$$\sup J=\sup\left\{x_1\dot{y}(T)-\int_0^T\frac{\ddot{y}^{\beta_1}}{\beta_1 t^{\alpha(\beta_1-1)}}dt\,\Big|\,|y|\leqq t^\alpha\right\}.$$

Условие $|\ddot{y}|\leq t^{\alpha}$ дает $x_1^{1/(\beta_1-1)}t^{\alpha+2}/(\alpha+1)(\alpha+2)\leq t^{\alpha}$, откуда получаем

$$T\leq\sqrt{(\alpha+1)(\alpha+2)x_1^{-1/(\beta_1-1)}}. \tag{3}$$

Итак, при условии (3) двойственная задача на самом деле становится задачей без ограничений. Связь $x=\ddot{y}^{\beta_1-1}/t^{\alpha(\beta_1-1)}$ дает (при $0<t\leq T$) $x=x_1$ и, следовательно, кривые

$$x_0(t)=\begin{cases}0 & t=0\\ x_1 & 0<t\leq T\end{cases} \quad \text{и} \quad y_0(t)=x_1^{1/(\beta_1-1)}t^{\alpha+2}/(\alpha+1)(\alpha+2)$$

являются экстремалями для функционалов $I(x)$ и $J(y)$ соответственно.

Действительно

$$I(x_0)=\frac{1}{\beta}\int_0^T t^{\alpha}x_1^{\beta}dt-x^{\beta}\,T^{\alpha+1}/\beta(\alpha+1)$$

$$J(y_0)=x_1x_1^{1/(\beta_1-1)}T^{\alpha+1}/(\alpha+1)-\int_0^T\frac{x^{\beta_1/(\beta_1-1)}t^{\alpha\beta_1}}{\beta_1\,t^{\alpha(\beta_1-1)}}dt$$

$$=(x_1^{\beta}T^{\alpha+1}/(\alpha+1))(1-1/\beta_1)=x_1^{\beta}T^{\alpha+1}/\beta(\alpha+1),$$

т. е. $J(y_0)=I(x_0)$

Пусть теперь $T>x_1^{-1/2(\beta_1-1)}\sqrt{(\alpha+1)(\alpha+2)}$. Как и в предыдущем примере, доказывается, что кривая $y_0(t)=bt^{\alpha+2}/(\alpha+1)(\alpha+2)$ касается границы области $|\ddot{y}_0|\leq t^{\alpha}$ только в точках $t=0$ и $t=T$. Это дает, что

$$bT^{\alpha+2}/(\alpha+1)(\alpha+2)=T^{\alpha},$$

откуда $b=(\alpha+1)(\alpha+2)T^{-2}$ и для $y_0(t)$ получаем $y_0(t)=t^{\alpha+2}T^{-2}$.

Из равенства $x=\ddot{y}^{\beta_1-1}/t^{\alpha(\beta_1-1)}$ получаем

$$x=\frac{[(\alpha+1)(\alpha+2)]^{\beta_1-1}}{T^{2(\beta_1-1)}}\cdot\frac{t^{\alpha(\beta_1-1)}}{t^{\alpha(\beta_1-1)}}=[\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{T^2}]^{\beta_1-1}.$$

Функционалы $I(x)$ и $J(y)$ на кривых

$$x_0(t)=\begin{cases}0 & t=0\\ [(\alpha+1)(\alpha+2)T^{-2}]^{\beta_1} & 0<t<T\\ x_1 & t=T\end{cases} \quad \text{и} \quad y_0(t)=t^{\alpha+2}/T^2$$

принимают значения

$$I(x_0)=\int_0^T\frac{t^{\alpha}}{\beta}[(\alpha+1)(\alpha+2)T^{-2}]^{\beta_1}dt+(\alpha+2)T^{\alpha-1}\{x_1-[(\alpha+1)(\alpha+2)T^{-2}]^{\beta_1-1}\}$$

$$=x_1(\alpha+2)T^{\alpha-1}-(\alpha+1)^{\beta_1-1}(\alpha+2)^{\beta_1}T^{\alpha+1-2\beta_1}/\beta_1$$

$$J(y_0)=x_1(\alpha+1)T^{\alpha-1}-\int_0^T\frac{[(\alpha+1)(\alpha+2)]^{\beta_1}t^{\alpha\beta_1}}{\beta_1t^{\alpha(\beta_1-1)}T^{2\beta_1}}dt$$

$$=x_1(\alpha+1)T^{\alpha-1}-(\alpha+1)^{\beta_1-1}(\alpha+2)^{\beta_1}T^{\alpha+1-2\beta_1}/\beta_1,$$

т. е. $I(x_0)=J(y_0)$, чем и закончено решение задачи.

В важном частном случае $n=1$, т. е. когда функционал имеет вид

$$F(x)=\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))\,dt,$$

двойственная задача получается проще и связь, если на f наложить те же ограничения выпуклости и непрерывности, имеет вид

$$\inf_x \int_{(t_0,x_0)}^{(t_1,x_1)} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt = \max\,[xy\,|_{t_0}^{t_1} - f^*(t, \dot{y}(t), y(t))\,dt],$$

где inf и max берутся в пространстве B^0. Рассмотрим один пример такого рода

Пример 3.

$$I(x)=\int_{(0,0)}^{(t_1,\xi)} t^\alpha \left(\frac{|\dot{x}|^\beta}{\beta}+|x|\right)dt,$$

где $\alpha\geqq 0$, $\beta>1$, $\xi\neq 0$.

В этом примере снова методы классического вариационного исчисления требуют специального обоснования в силу строения подынтегральной функции. Интересно отметить, что в качестве двойственной получается типичная задача теории управления.

Решение. Поскольку подынтегральная функция определена по x на всем R^1 и имеет рост выше линейного для всех $t\neq 0$ и ограниченный рост только в точке $t=0$, то отсюда следует [1], что решение $x_0(t)$ может терпеть разрыв только в точке $t=0$ и, обязательно, непрерывна для всех $t\in(0, t_1]$.

Найдем функцию f^*

$$f^*(t, \dot{y}, y)=\sup\left[x\dot{y}+\dot{x}y-t^\alpha\left(|x|+\frac{|\dot{x}|^\beta}{\beta}\right)\right]=|y|^{\beta_1}/\beta_1 t^{\alpha(\beta_1-1)}+\delta_Y(\dot{y}),$$

$$1/\beta+1/\beta_1=1,$$

где $Y=\{\dot{y}:|y|\leqq t^\alpha\}$ и $\dot{y}(t=0)=0$. Двойственная задача принимает вид

$$\sup J(y)=\sup\left\{\xi y(t_1)-\int_0^{t_1}\frac{(y)^{\beta_1}}{\beta_1 t^{\alpha(\beta_1-1)}}\,dt\,|\,y:|y|\leqq t^\alpha\right\}.$$

Из соотношения между x и $\dot{y}$ видно, что $x_0(t)=0$ всюду, где $|\dot{y}|\leqq t^\alpha$. Поскольку на полусегменте $(0, t_1]$ функция $x_0(t)$ непрерывна, то здесь возможны два случая:

1) $\dot{y}_0(t)=\pm t^\alpha$.

2) На некотором интервале $(0, \tau)$ имеем $|\dot{y}_0(t)|<t^\alpha$ и на $[\tau, t_1]$ соответственно $|\dot{y}_0|=t^\alpha$.

Рассмотрим первый случай. Пусть $\dot{y}_0(t)=\pm t^\alpha$. Тогда $y_0(t)=\pm t^{\alpha+1}/(\alpha+1)+C$. Но, из соотношения $y_0(t)=t^\alpha\,|\dot{x}|^{\beta-1}\operatorname{sgn}\dot{x}$ следует, что $C=0$. Итак, $\pm t^{\alpha+1}(\alpha+1)=t^\alpha\,|\dot{x}|^{\beta-1}\operatorname{sgn}\dot{x}$, т. е. $\dot{x}$ и y имеют одинаковый знак и $x_0(t)=\pm t^{\beta_1}/\beta_1(\alpha+1)^{\beta_1-1}$. Если $\xi\neq t_1^{\beta_1}/\beta_1(\alpha+1)^{\beta_1-1}$, то эта кривая не является экстремалью на отрезке $[0, t_1]$.

Мы покажем, что если $|\xi|>t_1^{\beta_1}/\beta_1(\alpha+1)^{\beta_1-1}$, то функция $x_0(t)$ терпит разрыв в нуле.

Обозначим $|\xi|-t_1^{\beta_1}/\beta_1(\alpha+1)^{\beta_1-1}=\eta$.

1) Пусть $\xi>0$. Тогда

$$I(x_0)=\int_0^{t_1} t^\alpha\Big[\frac{t^{\beta_1}}{\beta_1(\alpha+1)^{\beta_1}}+\frac{t^{\beta_1}}{\beta_1(\alpha+1)^{\beta_1-1}}+\eta\Big]dt=\frac{t_1^{\alpha+\beta_1+1}(\alpha+\beta_1)}{\beta_1(\alpha+\beta_1+1)(\alpha+1)^{\beta_1}}+\eta\frac{t_1^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

$$J(y_0)=\xi\frac{t_1^{\alpha+1}}{\alpha+1}-\int_0^{t_1}\frac{t^{\alpha+\beta_1}}{\beta_1(\alpha+1)^{\beta_1}}dt=\eta\frac{t_1^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\frac{t_1^{\alpha+\beta_1+1}}{\beta_1(\alpha+1)^{\beta_1}}-\frac{t_1^{\alpha+\beta_1+1}}{\beta_1(\alpha+\beta_1+1)(\alpha+1)^{\beta_1}}$$

$$=\eta\frac{t_1^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\frac{t_1^{\alpha+\beta_1+1}(\alpha+\beta_1)}{\beta_1(\alpha+\beta_1+1)(\alpha+1)\beta_1}. \tag{4}$$

Итак, мы получили, что $I(x_0)=J(y_0)$.

Очевидно при $\xi=t_1^{\beta_1}/\beta_1(\alpha+1)^{\beta_1-1}$ для $I(x_0)$ и $J(y_0)$ получаем

$$I(x_0)=J(y_0)=\frac{t_1^{\alpha+\beta_1+1}(\alpha+\beta_1)}{\beta_1(\alpha+\beta_1+1)(\alpha+1)^{\beta_1}}. \tag{5}$$

2) Пусть $\xi<0$. Тогда $y_0(t)=-t^{\alpha+1}/(\alpha+1)$ и

$$x_0(t)=\begin{cases}0 & t=0\\ -t^{\beta_1}/\beta_1(\alpha+1)^{\beta_1-1}-\eta & 0<t<t_1\\ \xi & t=t_1.\end{cases}$$

Проводя те же выкладки, получаем для I и J значение (4), соответственно (5). Отметим, что этот результат (и следующий) можно получить и с помощью принципа максимума Понтрягина.

Пусть теперь $|\xi|<t_1^{\beta_1}/\beta_1(\alpha+1)^{\beta_1-1}$. Покажем, что имеет место второй случай, т. е. $|\dot y_0(t)|<t^\alpha$ на $(0,\tau)$ и $|\dot y_0(t)|=t^\alpha$ на $[\tau,t_1]$. Но если $|\dot y_0(t)|<t^\alpha$, то $x_0(t)=0$ на $[0,\tau]$ и, следовательно, $\dot x_0(t)=0$. Тогда из равенства $y=t^\alpha|\dot x|^{\beta-1}\operatorname{sgn}\dot x$ следует, что $y_0(t)=0$ на $[0,\tau]$, что верно только при $\dot y_0(t)=0$ на $[0,\tau)$ и $|\dot y_0(t)|=t^\alpha$ на $[\tau,t_1]$. Тогда

$$y_0(t)=\pm\frac{t^{\alpha+1}-\tau^{\alpha+1}}{\alpha+1},\quad \dot x_0(t)=\pm\frac{(t^{\alpha+1}-\tau^{\alpha+1})^{\beta_1-1}}{(\alpha+1)^{\beta_1-1}t^{\alpha(\beta_1-1)}}.$$

Пусть $\xi>0$. Тогда

$$x(t)=\int_\tau^t\Big[\frac{\sigma^{\alpha+1}-\tau^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\sigma^\alpha}\Big]^{\beta_1-1}d\sigma$$

и τ находится из равенства

$$\xi=\int_\tau^{t_1}\Big[\frac{t^{\alpha+1}-\tau^{\alpha+1}}{(\alpha+1)t^\alpha}\Big]^{\beta_1-1}dt.$$

Найдем значения I и J на этих кривых

$$I(x_0)=\int_\tau^{t_1}\Big[\frac{t^\alpha(t^{\alpha+1}-\tau^{\alpha+1})^{\beta_1}}{\beta(\alpha+1)^{\beta_1}t^{\alpha\beta_1}}+t^\alpha\int_\tau^t\Big[\frac{\sigma^{\alpha+1}-\tau^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\sigma^\alpha}\Big]^{\beta_1-1}d\sigma\Big]dt$$

$$=\frac{t_1^{\alpha+1}-\tau^{\alpha+1}}{\alpha+1}\xi-\int_\tau^{t_1}\frac{(t^{\alpha+1}-\tau^{\alpha+1})^{\beta_1}}{\beta_1(\alpha+1)^{\beta_1}\,t^{\alpha(\beta_1-1)}}\,dt$$

$$J(y_0)=\xi\,\frac{t_1^{\alpha+1}-\tau^{\alpha+1}}{\alpha+1}-\int_\tau^{t_1}\frac{(t^{\alpha+1}-\tau^{\alpha+1})^{\beta_1}}{\beta_1(\alpha+1)^{\beta_1}\,t^{\alpha(\beta_1-1)}}\,dt.$$

Итак, значения функционалов I и J совпадают на кривых $x_0(t)$ и $y_0(t)$. Это, согласно общей теории, означает, что $x_0(t)$ и $y_0(t)$ являются экстремальными кривыми.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Цветанов. Двойственность в задачах вариационного исчисления и оптимального управления. *Известия мат. инст. БАН*, **13**, 277—315.
2. А. А. Попова, М. М. Цветанов. Двойственность в задачах вариационного исчисления с производными порядка выше первого. *Сердика*, **1**, 1975, № 3—4, 269—284.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике 1000 София П. Я. 373

Поступила 31. 1. 1974