Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

GÉOMETRIE DIFFÉRENTIELLE D'UN COMPLEXE DE DROITES DANS L'ESPACE ELLIPTIQUE OU HYPERBOLIQUE

ALIPI N. MATÉEV

Dans M a t e e v (1969) entre outre on a étudié le voisinage de deuxième ordre d'une droite d'un complexe de droites dans un espace elliptique ou hyperbolique à trois dimensions.

Dans le présent travail on applique quelques de ces résultats pour étudier des questions liées avec les centres d'inflexion sur une droite d'un complexe de droites K. On obtient l'équation de quatrième degré qui donne les centres d'inflexion sur une telle droite, Les coefficients de cette équation sont éxprimés par les invariants appartenants au voisinage différentiel de deuxième ordre de la droite considérée. On étudie de même les surfaces principales passantes par une droite du complexe et on obient l'équation caractéristique correspondante aux surfaces principales. On considère le cas spécial où sur chaque droite de K ils existent deux centres d'inflexion doubles. Dans ce cas l'équation caractéristique correspondante aux surfaces principales possède une racine double et une — simple. Elles sont trouvées effectivement et on étudie l'équation unique correspondante à la racine double.

Soit $g=\{I_0I_3\}$ une droite quelconque d'un complexe K de droites de l'espace elliptique $\mathcal{E}_3$, ou de l'espace hyperbolique $\mathcal{H}_3$. On choisit les points I_0, I_3 de g tels que le tétraèdre $T=\{I_0I_1I_2I_3\}$ soit autopolaire canonique dans $\mathcal{E}_3$, ou dans $\mathcal{H}_3$.

A. Dans l'espace elliptique $\mathcal{E}_3$, on a:

$$I_0^2=I_1^2=I_2^2=I_3^2=1, \quad (I_0I_1I_2I_3)=1,$$

$$(I_3I_2I_1)=I_2, \quad (I_3I_2I_0)=I_1, \quad (I_1I_0I_3)=I_2, \quad (I_0I_1I_2)=I_3.$$

B. Dans l'espace hyperbolique $\mathcal{H}_3$, on a:

$$I_0^2=-1, \quad I_1^2=I_2^2=I_3^2=1, \quad (I_0I_1I_2I_3)=1,$$

$$(I_3I_2I_1)=-I_0, \quad (I_2I_3I_0)=I_1, \quad (I_1I_0I_3)=I_2, \quad (I_0I_1I_2)=I_3$$

Dans $\mathcal{E}_3$ et dans $\mathcal{H}_3$, on a encore $I_0I_1=I_0I_2=I_0I_3=I_1I_2=I_1I_3=I_2I_3=0$. Pour les déplacements infinitésimaux du tétraèdre T, on a:

$$\begin{aligned} dI_0 &= *+\omega^1I_1+\omega^2I_2+\omega^3I_3 \\ dI_1 &= -\eta\omega^1I_0+*+pI_2+qI_3 \\ dI_2 &= -\eta\omega^2I_0-rI_1+*+pI_3 \\ dI_3 &= -\eta\omega^3I_0+qI_1-pI_2+* \end{aligned} \qquad \eta=\begin{cases} +1 & \text{dans } \mathcal{E}_3 \\ -1 & \text{dans } \mathcal{H}_3 \end{cases}$$

où l'on a posé $\omega_2^3=-\omega_3^2=p$, $\omega_3^1=-\omega_1^3=q$, $\omega_1^2=-\omega_2^1=r$.

Les formes différencielles ω^1, ω^2, ω^3, p, q, r dépendent de trois variables indépendantes u, v, w et elles vérifient les équations de structure

SERDICA. Bulgaricae mathematicae publicationes. Vol. 2, 1976, p. 126—130.

$$d\omega^1 = r\wedge\omega^2 + \omega^3\wedge q, \quad dp = r\wedge q + \eta\omega^3\wedge\omega^2,$$
$$d\omega^2 = p\wedge\omega^3 + \omega^1\wedge r, \quad dq = p\wedge r + \eta\omega^1\wedge\omega^3,$$
$$d\omega^3 = q\wedge\omega^1 + \omega^2\wedge p, \quad dr = q\wedge p + \eta\omega^2\wedge\omega^1.$$

L'équation du complexe K considéré par rapport au tétraèdre T, est [1]:

$$\omega^1 + k(u, v, w)p = 0. \tag{1}$$

On suppose encore que les formes différentielles ω^2, p, q sont indépendantes. L'invariant $k(u, v, w)$ appartient au voisinage différentiel du premier ordre de la droite $g(u, v, w)$. Le point du contact d'une surface réglée S qui appartient au complexe K et passe par la droite g est un point M sur la droite g, tel que le plan tangent correspondant par rapport à la surface réglée S, coïncide avec le plan qui correspond au point M dans la corrélation normale [2].

Dans l'espace elliptique $\mathcal{E}_3$, on a $M = \cos tI_0 + \sin tI_3$, $t\in[0\ \pi)$, resp. dans l'espace hyperbolique: $M = \operatorname{ch} tI_0 + \operatorname{sh} t\, I_3$, $t\in(-\infty, \infty)$.

Si M est un point fixe ($dM = 0$) dans $\mathcal{E}_3$, on a

$$\cos t\,\omega^1 + \sin t\, q = 0, \quad \cos t\,\omega^2 - \sin t\, p = 0, \quad \omega^3 + dt = 0. \tag{2}$$

Le pôle P du plan μ s'obtient comme il suit:

$$P = (I_0 dI_0 I_3) = (I_0,\ \omega^1 I_1 + \omega^2 I_2,\ I_3) = \omega^1(I_0 I_1 I_3) + \omega^2(I_0 I_2 I_3) = \omega^2 I_1 - \omega^1 I_2.$$

Si l'on tient compte de (1) et (2) on obtient $\omega^1 : \omega^2 = -k\cos t : \sin t$. Par conséquent on a définitivement

$$P = \sin t\, I_1 + k \cos t\, I_2. \tag{3}$$

Le pôle P^* du plan tangent au point M par rapport à S est donné par l'égalité

$$P^* = (I_0 I_3 dM) = (\cos t\ \omega^1 + \sin t\ q)I_2 - (\cos t\ \omega^2 - \sin t\ p)I_1. \tag{4}$$

Les pôles P et P^* coïncident, si et seulement si

$$\sin t / k\cos t = (\sin t\ p - \cos t\ \omega^2)/(\cos t\ \omega^1 + \sin t q),$$

d'où l'on trouve

$$q tg^2 t + 2\omega^1 tg t + k\omega^2 = 0. \tag{5}$$

Dans l'espace $\mathcal{H}_3$ on obtient des résultats analogues, en remplaçant $\sin t$ et $\cos t$ resp. par. $\operatorname{sh} t$ et $\operatorname{ch} t$.

Théorème. *Les points du contact définis par l'équation (4) coïncident si et seulement si, la surface réglée S est développable.*

En effet, de (4) on obtient pour la coïncidence de points du contact:

$$(\omega^1)^2 - kq\omega^2 = 0. \tag{6}$$

D'autre part la condition nécessaire et suffisante pour que la surface S soit développable, c'est $(I_0 I_3 dI_0 dI_3) = 0$, qui est équivalente à

$$p\omega^1 + q\omega^2 = 0. \tag{7}$$

Si l'on tient compte de (1), l'équation (5) prend la forme $k(p\omega^1+q\omega^2)=0$, d'où il suit que si $k\neq 0$ (5) et (6) sont équivalentes.

Centres d'inflexion sur une droite d'un complexe K dans $\mathcal{E}_3$ ou $\mathcal{H}_3$. Le centre d'inflexion sur la droite g dans $\mathcal{E}_3$ ou dans $\mathcal{H}_3$ est un point M tel que son plan μ correspondant dans la corrélation normale est fixe, c'est-à-dire le pôle P de μ est fixe.

Soit K dans $\mathcal{E}_3$ et prenons les différentiels des deux côtés de (3). Il s'ensuit

$$dP=-(\sin t\ \omega^1+k\cos t\omega^2)I_0+\cos t(dt-kr)I_1$$
$$+(\sin tp-k\sin tdt+\cos tdk)I_2+(\cos t\ p-\sin t\ q)I_3.$$

En remplaçant I_1 de (13) dans (7), le point P est fixe, si et seulement si, on a

$$k\cos t\ p-\sin t\ q=0,$$
$$\sin t\ w^1+k\cos t\quad\omega^2=0, \tag{8}$$
$$k\frac{\cos^2 t}{\sin t}(kr-dt)+\sin t(r-kdt)+\cos tdk=0.$$

Si l'on tient compte de (1), la première et la deuxième équation dans (8) coïncident, resp. avec la première et la deuxième équation de (2). La troisième équation de (8) prend la forme

$$(r+k\omega^3)\,\mathrm{tg}^2 t+dk\ \mathrm{tg}\, t+k(\omega^3+kr)=0. \tag{9}$$

En tenant compte de [1, (51), p. 302] la dernière équation peut s'écrire

$$\alpha\ \mathrm{tg}^4 t+2\beta\ \mathrm{tg}^3 t+(\delta+2k\gamma)\,\mathrm{tg}^2 t+2k\varepsilon\ \mathrm{tg}\ t+k^2\nu=0, \tag{10}$$

où α, β, γ, δ, ε, ν sont les invariants appartenants au voisinage différentiel de deuxième ordre de la droite g. C'est l'équation (10) qui donne les centres d'inflexion sur la droite g de K dans $\mathcal{E}_3$.

Si chaque point $M\in g$ est un centre d'inflexion, K est un complexe linéaire. Les conditions qui caractérisent ce cas sont

$$\alpha=0,\quad \beta=0,\quad \delta+2k\gamma=0,\quad \varepsilon=0,\quad \nu=0.$$

Dans le cas où $k=$ const, on trouve $\beta=0$, $\delta=0$, $\varepsilon=0$ et l'équation (1) prend la forme

$$\alpha\ \mathrm{tg}^4 t+2k\gamma\ \mathrm{tg}^2 t+k^2\nu=0.$$

Théorème 2. *La condition nécessaire et suffisante pour les points I_0 I_3 (les centres sur la droite g) soient centres d'inflexion, est $\alpha=0$, $\nu=0$.*

Les autres centres d'inflexion sur la droite g se trouvent de l'équation

$$\beta\ \mathrm{tg}^2 t+(\delta+2k\gamma)\,\mathrm{tg}\, t+2k\varepsilon=0.$$

On trouve les résultats analogues dans l'espace $\mathcal{H}_3$ en changeant $\mathrm{tg}\, t$ par $\mathrm{th}\, t$.

La condition nécessaire et suffisante pour que les points infinis de la droite g, $I_0 \pm I_3$ soient centres d'inflexion, est donnée par

$$\beta + k\varepsilon = 0, \quad \alpha + \delta + 2k\gamma + k^2\nu = 0.$$

Dans l'espace $\mathcal{E}_3$ pour le complexe polaire K^* du complexe K, on a [1]:

$$\omega^{*1} = -\omega^1, \quad \omega^{*2} = -q, \quad \omega^{*3} = r,$$

$$p^* = -p, \quad q^* = -\omega^2, \quad r^* = \omega^3,$$

d'où on trouve les relations entre les invariants des deux complexes

$$k^* = k, \quad \alpha^* = -\nu, \quad \beta^* = -\varepsilon, \quad \gamma^* = -\gamma,$$

$$\delta^* = -\delta, \quad \varepsilon^* = -\beta, \quad \nu^* = -\alpha.$$

L'équation des centres d'inflexion sur la droite polaire $g^* = \{I_1 I_2\}$ de la droite $g = \{I_0 I_3\}$ prend la forme

$$\nu \operatorname{tg}^4 t^* + 2\varepsilon \operatorname{tg}^3 t^* + (\delta + 2k\gamma) \operatorname{tg}^2 t^* + 2k\beta \operatorname{tg} t^* + k^2\alpha = 0. \tag{11}$$

Dans le cas où le complexe K n'est pas linéaire et l'on tient compte de (9) et (11), on trouve

$$\operatorname{tg} t \,.\, \operatorname{tg} t^* = k. \tag{12}$$

La relation (12) donne une nouvelle interprétation géométrique de l'invariant k.

Surfaces principales passantes par une droite d'un complexe de droites dans $\mathcal{E}_3$ ou $\mathcal{H}_3$. Une surface réglée S, passante par la droite g est une surface principale par cette droite [2], lorsque les lignes du contact de S coïncident avec les lignes asymptotiques de cette surface. Si l'on tient compte que dans le cas considéré les points géométriques P et P^* définis par (3) et (4) coïncident, les lignes asymptotiques s'obtiennent par l'égalité $dM \,.\, dP^* = 0$, d'où l'on trouve dans $\mathcal{E}_3$:

$$(r + k\omega^3) \operatorname{tg}^2 t + dk \operatorname{tg} t + k(\omega^3 + kr) = 0. \tag{13}$$

Pour que la surface S soit une surface principale, il faut et il suffit que les équations (5) et (13) soient équivalentes, c'est-à-dire

$$\frac{r + k\omega^3}{q} = \frac{dk}{2\omega^1} = \frac{\omega^3 + kr}{\omega^2} = s. \tag{14}$$

En tenant compte de [1, (51), p. 302], on obtient

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma - s \\ \beta & \delta + 2ks & \varepsilon \\ \gamma - s & \varepsilon & \nu \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

Pour le complexe polaire K^* du complexe K, on trouve l'équation analogue à (15)

$$\Delta(s^*)=\begin{vmatrix} \nu & \varepsilon & \gamma+s^* \\ \varepsilon & \delta-2ks^* & \beta \\ \gamma+s^* & \beta & \alpha \end{vmatrix}=0 \tag{16}$$

d'où l'on conclut qu'on peut passer de (16) à (15) par la substitution $s^*=-s$.

Dans l'espace hyperbolique $\mathcal{H}_3$, on obtient les résultats analogues, si l'on prend dans (9), (10) et (14), au lieu de $r+k\omega^3$, l'expression $r-k\omega^3$ et $\operatorname{tg} t$ au lieu du $\operatorname{th} t$. L'équation (15) reste la même. Il faut remarquer que dans l'espace hyperbolique, il n'existe pas un complexe K^*, qui est polaire du complexe K.

Complexe K de droites dans $\mathcal{E}_3$ ou $\mathcal{H}_3$ avec deux centres d'inflexion doubles sur chaque de ses droites. Soit dans $\mathcal{E}_3$ le complexe K, pour lequel l'équation (10) possède deux racines doubles : $\operatorname{tg} t_1=a$ et $\operatorname{tg} t_2=b$, où a et b sont réels, ou complexes, c'est-à-dire dans ce cas (10) est équivalente à $\alpha(\operatorname{tg} t-a)^2(\operatorname{tg} t-b)^2=0$.

On trouve facilement que l'équation caractéristique des surfaces principales (15) possède une racine double et une simple, comme il suit

$$s_1=s_2=\gamma-\frac{\alpha ab}{k}, \qquad s_3=\gamma-\frac{\alpha}{2k}(a^2+b^2). \tag{17}$$

Les équations (14), en tenant compte de (17) se réduisent à l'équation unique

$$k\omega^2+(a+b)\omega^1+ab\omega_3^1=0, \tag{18}$$

qui est une équation de Pfaff des variables indépendantes u, v, w. Par conséquent, les surfaces principales du complexe K appartiennent à la congruence (18).

BIBLIOGRAPHIE

1. А. Матеев. Върху теорията на комплексите от прави в елиптично и хиперболично пространство. *Известия Мат. инст. БАН*, **10**, 1969, 293–305.
2. Н. И. Кованцов. Теория комплексов. Москва, 1963.

Centre for Research and Education in Mathematics and Mechanics
1000 Sofia P. O. Box 373

Reçu le 2. 12. 1974