Serdica

Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика

Българско математическо
списание

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ ОБ ЯДЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ БЕЗ БАЗИСА

ПЛАМЕН Б. ДЖАКОВ

В работе построен пример нетривиальной ядерной алгебры Фреше без базиса. Доказано, что любое декартово произведение счетного числа ядерных пространств Фреше, допускающих непрерывную норму, содержит (недополняемое) подпространство без базиса.

Недавно Н. М. Зобин и Б. С. Митягин [4] построили пример ядерного пространства Фреше без базиса. Несколько позже Б. С. Митягин и П. Б. Джаков [2] дали модифицированные конструкции ядерных пространств Фреше без базиса; в частности, было построено такое ядерное пространство Фреше X без базиса, что для любого ядерного пространства Фреше Y пространство $X\times Y$ не имеет базиса.

Однако все еще нет примера конкретного функционального ядерного пространства без базиса [2, § 5]. Так как многие конкретные функцио нальные пространства обладают мультипликативной структурой (например- пространство голоморфных функций в области $\Omega\subset\mathbb{C}^n$, с топологией рав-, номерной сходимости на компактах $K\subset\subset\Omega$), то естественно возникает вопрос, существенна или нет мультипликативная структура для существования базиса.

В этой работе мы даем пример нетривиальной ядерной алгебры Фреше без базиса, т. е. такой, что $x\neq 0\Rightarrow x^2\neq 0$. Заметим, что это свойство всегда выполнено для пространств функций. Наш пример является даже областью целостности.

Далее мы даем подробное доказательство следующего результата Б. С. Митягина и автора: любое декартово произведение счетного числа ядерных пространств Фреше, допускающих непрерывную норму, содержит (недополняемое!) подпространство без базиса. Это утверждение приведено в [2, § 5] как частичный ответ на поставленный там вопрос 5.5: „Верно ли, что любое ядерное пространство Фреше имеет подпространство без базиса?“ В доказательстве используется метод вложения Бессаги—Пелчинского [1].

1. Конструкция. Мы будем использовать конструкцию ядерного пространства Фреше без базиса, предложенную в [2, § 1] (см. также [7, § 5]). Напомним, что ядерное пространство Фреше X без базиса строится как многомерный аналог пространств Кёте вида

$$X=X(A_{np})=\{x=(x_n)_1^\infty : x_n\in H,\ \|x\|_p^2=\sum_n\|A_{np}x_n\|^2<\infty,\ \forall p\},$$

где $H=\mathbb{R}^2$, $A_{np}:H\to H$, $p=1, 2, \ldots$, $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^2$. Топология пространства X определяется системой гильбертовых норм $\|\cdot\|_p$, $p=1, 2, \ldots$

Выбор операторов A_{np} производится так:

1. Любой тройки целых чисел вида $\pi=(p_1, p_2, p_3)$, где $0<p_1<p_2<p_3$ сопоставляется бесконечное подмножество $N_\pi\subset N=\{1, 2, \ldots\}$ таким образом, что $\pi_1\neq\pi_2\Longrightarrow N_{\pi_1}\cap N_{\pi_2}=\emptyset$. Очевидно $N=N_1\cup N_2$, где $N_2=\cup N_\pi$, $N_1=N\diagdown N_2$.

2. Пусть e_1, e_2 — канонический базис в H, $w_1=(e_1+e_2)/\sqrt{2}$, $w_2=(-e_1+e_2)/\sqrt{2}$ и пусть

$$e_i^n=(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1},\ e_i, 0, \ldots),\ w_i^n=(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1},\ w_i, 0, \ldots),\ i=1, 2.$$

Положим:

(а) для $n\in N_1$

$$A_{np}e_1^n=a_{np}e_1^n,\ A_{np}e_2^n=b_{np}e_2^n,\ p=1, 2, \ldots$$

(б) для $n\in N_\pi$, $\pi=(p_1, p_2, p_3)$,

$$A_{np}e_1^n=a_{np}e_1^n,\ A_{np}e_2^n=b_{np}e_2^n,\ p=1, \ldots, p_2,$$
$$A_{np}w_1^n=a_{np}w_1^n,\ A_{np}w_2^n=b_{np}w_2^n,\ p=p_2+1, \ldots.$$

Тогда, если параметры a_{np}, b_{np} удовлетворяют условиям

(1а) для $n\in N_1$ $D_n\,.\,a_{np-1}\leqq a_{np}$, $D_n\,.\,b_{np-1}\leqq b_{np}$, $p=1, 2, \ldots, n$

$$(1б)\qquad \begin{cases} \text{для } n\in N_\pi,\ \pi=(p_1, p_2, p_3),\\ D_n\,.\,a_{np-1}\leqq a_{np},\ D_n\,.\,b_{np-1}\leqq b_{np},\ p\neq p_2+1,\\ D_n\,.\max\{a_{np_2},\ b_{np_2}\}\leqq\min\{a_{np_2+1},\ b_{np_2+1}\}.\end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \text{для } n\in N_\pi,\ \pi=(p_1, p_2, p_3),\\ n\,.\,a_{np_1}\leqq b_{n1};\ n\,.\,b_{np_2}\leqq a_{np_1+1};\ n\,.\,a_{np_3}\leqq b_{np_2+1},\end{cases}$$

где $\sum\limits_{n=1}^{\infty}D_n^{-1}<\infty$, то пространство X ядерно и не имеет базиса. Доказательства этого утверждения можно найти в [2, § 2] или [7, § 5]. Отметим, что в работах [2] и [7] множество N_1 — пусто. Однако все рассуждения этих работ проходят без изменений в случае, когда $N_1\neq\emptyset$.

2. Пример ядерной алгебры Фреше без базиса. Пусть σ — биективное соответствие между множествами Q и $\mathfrak{N}$, где Q — множество простых чисел, а $\mathfrak{N}$ — множество всех таких троек натуральных чисел $\pi=(p_1, p_2, p_3)$, что $p_1<p_2<p_3$. Положим $N_\pi=\{n=q^s,\ q=\sigma^{-1}(\pi),\ s=1, 2, \ldots\}$; тогда имеем $N=N_1\cup N_2$, где $N_2=\bigcup(N_\pi:\pi\in\mathfrak{N})$, $N_1=N\diagdown N_2$ (т. е. N_2 — множество натуральных чисел вида q^s, q — простое).

Если $n\in N_\pi$, $\pi=(p_1, p_2, p_3)$, то мы полагаем

$$a_{np}=(n^2)^p,\ b_{np}=(n^2)^{p+p_1} \text{ для } p=1, \ldots, p_1,$$
$$a_{np}=(n^2)^{p+p_2},\ b_{np}=(n^2)^{p+p_1} \text{ для } p=p_1+1, \ldots, p_2,$$
$$a_{np}=(n^2)^{p+p_2},\ b_{np}=(n^2)^{p+p_3} \text{ для } p=p_2+1, \ldots.$$

Если $n \notin N_1$ и $n = \prod q_i^{s_i}$, q_i — простые, то мы полагаем

$$a_{np} = \prod_i a_{n_i p} \quad b_{np} = \prod_i b_{n_i p}, \text{ где } n_i = q_i^{s_i}.$$

Легко проверить, что при таком выборе параметров a_{np}, b_{np} выполнены условия (1а), (1б) и (2), где $D_n = n^2$. Следовательно, соответствующее пространство X не имеет базиса.

Положим

$$c_n = \begin{cases} (n^2)^{-p_3}, \text{ если } n \in N_\pi, \ \pi = (p_1, p_2, p_3), \\ \prod c_{n_i}, \text{ если } n = \prod n_i, \ n_i = q_i^{s_i}, \ q_i \text{ — простые.} \end{cases}$$

Определяем (коммутативную) операцию „умножения" в X, задавая ее на образующих e_1^n, e_2^n, $n = 1, 2, \ldots$ так:

$$e_1^n \cdot e_1^m = -e_2^n \cdot e_2^m = c_n c_m e_1^{nm},$$
$$e_1^n \cdot e_2^m = -e_2^n \cdot e_1^m = c_n c_m e_2^{nm}.$$

Затем по линейности определяем произведение любых двух элементов из X. Нужно доказать, что операция корректно определена и непрерывна. Пусть

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n^1 e_1^n + x_n^2 e_2^n), \quad y = \sum_{m=1}^{\infty} y_m = \sum_{m=1}^{\infty} (y_m^1 e_1^m + y_m^2 e_2^m).$$

Тогда $x \cdot y = \sum_n \sum_m x_n \cdot y_m$, где

$$x_n \cdot y_m = c_n c_m [(x_n^1 y_m^1 - x_n^2 y_m^2) e_1^{nm} + (x_n^1 y_m^2 + x_n^2 y_m^1) e_2^{nm}].$$

Легко сообразить, что в силу выбора параметров a_{np}, b_{np} система полунорм $|x|_p = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_p$, $x = (x_n)_1^\infty$, $p = 1, 2, \ldots$, эквивалентна исходной системе полунорм $\|\cdot\|_p$, $p = 1, 2, \ldots$ Мы покажем, что $|x \cdot y|_p \leq 2 |x|_p |y|_p$ для любого $p = 1, 2, \ldots$ Действительно,

$$\|x_n y_m\|_p \leq c_n c_m (|x_n^1 y_m^1 - x_n^2 y_m^2| a_{np} a_{mp} + |x_n^1 y_m^2 + x_n^2 y_m^1| b_{np} b_{mp})$$
$$\leq c_n c_m [(|x_n^1| + |x_n^2|) \max(a_{np}, b_{np})] \cdot [(|y_m^1| + |y_m^2|) \max(a_{mp}, b_{mp})]$$
$$\leq 2[(|x_n^1|^2 + |x_n^2|^2)^{1/2} \cdot \min(a_{np}, b_{np})] \cdot [(|y_m^1|^2 + |y_m^2|^2)^{1/2} \cdot \min(a_{mp}, b_{mp})]$$
$$\leq 2 \|x_n\|_p \|y_m\|_p,$$

так как $c_n \cdot \max(a_{np}, b_{np}) \leq \min(a_{np}, b_{np})$ и

$$\|x_n\|_p \geq (|x_n^1|^2 + |x_n^2|^2)^{1/2} \cdot \min(a_{np}, b_{np}).$$

Следовательно, $|x \cdot y|_p \leq \sum_n \sum_m \|x_n y_m\|_p \leq 2 \sum_n \sum_m \|x_n\|_p \|y_m\|_p = 2|x|_p |y|_p$.

Очевидно, проведенные рассуждения доказывают корректность определения операции умножения, так как ряд $x.y=\sum_n\sum_m x_n y_m$, где $x=(x_n)_1^\infty$, $y=(y_m)_1^\infty$, сходится в топологии пространства X. Неравенство $|x.y|_p\le 2|x|_p.|y|_p$ доказывает непрерывность операции умножения.

Отметим, что полученная алгебра Фреше X без базиса имеет счетную систему образующих $\{e_1^n, e_2^n, \ n=1,2,\ldots\}$. Легко сообразить, что X является областью целостности. Тем самым наше утверждение доказано.

3. Подпространства без базиса. Хорошо известно, что любое ядерное пространство Фреше F с базисом $(f_i)_1^\infty$ изоморфно пространству Кёте (K, a_{iq}), где $a_{iq}=\|f_i\|_q$, $\|\cdot\|_q$, $q=1,2,\ldots$ — фундаментальная система полунорм в F [5, § 4] или [6, гл. 10, § 2]. Е. Дубинский заметил ([3], теорема 7), что любое пространство Кёте изоморфно одному из следующих четырех типов:

(а) $\omega=\mathbb{R}^\infty$ (или $\mathbb{C}^\infty$) — декартово произведение счетного числа экземпляров $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$);

(б) E — пространство с непрерывной нормой;

(в) $\omega\times E$, где E — бесконечномерное пространство с непрерывной нормой;

(г) $\prod_{k=1}^\infty E_k$ — декартово произведение пространств E_k, где $\dim E_k=\infty$ и E_k допускают непрерывную норму.

В случае (а) любое бесконечномерное подпространство изоморфно всему пространству и поэтому имеет базис. Для пространств типа (б) и (в) вопрос о существовании подпространства без базиса открыт. В случае (г) всегда существует подпространство без базиса. Действительно, верна следующая

Теорема. *Пусть* $E=\prod_{k=1}^\infty E_k$, *где* E_k — *ядерные пространства Фреше с непрерывной нормой. Тогда E имеет подпространство без базиса.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что E_k — пространства Кёте, определяемые матрицами $a_{\nu q}^k$, где $a_{\nu q}^k\ge 1$ и $a_{\nu q}^k\le a_{\nu q+1}^k$. Легко сообразить, что существует последовательность $(c_\nu)_1^\infty$, удовлетворяющая условия

$$\sum_\nu a_{\nu q}^k.c_\nu^{-1}<\infty \text{ для любых } k,\ q.$$

Обозначим через $\tilde{X}$ ядерное пространство Фреше без базиса, которое получается по описанной выше конструкции, если: $N_1=\varnothing$; параметры a_{np}, b_{np} удовлетворяют условия (1б) и (2), где $D_n=\max(c_{2n-1}, c_{2n})$. В силу выбора параметров a_{np}, b_{np} имеем $D_n.\|A_{np}x\|\le\|A_{np+1}x\|$ $\forall x\in H, p=1,2,\ldots$.

Пусть f_1^{np}, f_2^{np} — ортонормированная пара собственных векторов оператора $A_{np+1}: H\to H$. (Очевидно, это либо пара e_1, e_2, либо w_1, w_2.) Для любого $x\in\tilde{X}$ имеем разложения

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(x_n, f_1^{np})f_1^{np}+(x_n, f_2^{np})f_2^{np}\right]=\sum_{\nu=1}^{\infty}G^{\nu p}(x)\,.\,g_\nu^p,$$

где

$$G^{\nu p}(x)=\begin{cases}(x_n, f_1^{np})\,.\,\|f_1^{np}\|_p, & \nu=2n-1,\\ (x_n, f_2^{np})\,.\,\|f_2^{np}\|_p, & \nu=2n,\end{cases}$$

$$g_\nu^p=\begin{cases}f_1^{np}/\|f_1^{np}\|_p, & \nu=2n-1,\\ f_2^{np}/\|f_2^{np}\|_p, & \nu=2n.\end{cases}$$

Легко сообразить, что $\|G^{\nu p}\|_{p+1}\leq C_\nu^{-1}$. Действительно,

$$\|G^{2n-1,p}\|_{p+1}=\|f_1^{np}\|_p/\|f_1^{np}\|_{p+1}\leq D_n^{-1}\leq C_{2n-1}^{-1}$$

аналогично для четных ν.

Рассмотрим оператор $T:\widetilde{X}\to\prod_{k=1}^{\infty}E_k$, где

$$Tx=((G^{\nu 1}(x))_{\nu=1}^{\infty},\ (G^{\nu 2}(x))_{\nu=1}^{\infty},\ldots,\ (G^{\nu k}(x))_{\nu=1}^{\infty},\ldots).$$

Покажем, что T — вложение. Действительно,

$$\|Tx\|_{k,q}=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_{\nu q}^{k}\,|G^{\nu k}(x)|\leq\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}a_{\nu q}^{k}\,\|G^{\nu k}\|_{k+1}\right)\|x\|_{k+1}$$

$$\leq\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}a_{\nu q}^{k}\cdot c_\nu^{-1}\right).\,\|x\|_{k+1}.$$

С другой стороны, так как $x=\sum_{\nu=1}^{\infty}G^{\nu p}(x)\,g_\nu^p$ и $\|g_\nu^p\|_p=1$, имеем

$$\|x\|_p\leq\sum_{\nu=1}^{\infty}|G^{\nu p}(x)|\leq\sum_{\nu=1}^{\infty}a_{\nu 1}^{p}\,|G^{\nu p}(x)|=\|Tx\|_{p,1}.$$

Теорема доказана.

Автор выражает свою благодарность Б. С. Митягину за внимание к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ч. Бессага, А. Пелчинский. О вложении ядерных пространств в пространстве бесконечно дифференцируемых функций на прямой. *Доклады АН СССР*, **134**, 1960, № 4, 745—748.
2. P. B. Djakov, B. S. Mitiagin. Modified construction of nuclear Fréchet spaces without basis. *J. Funct. Anal.*, (in print).
3. Ed. Dubinsky. Perfect Fréchet spaces. *Math. Ann.*, **174**, 1967, No. 3, 186—194.
4. Н. М. Зобин, Б. С. Митягин. Примеры ядерных метрических пространств без базиса. *Функц. анал. и его прилож.*, **8**, 1974, № 4, 35—47.
5. Б. С. Митягин. Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах. *Успехи мат. наук*, **16**, 1961, № 4, 63—132.
6. А. Пич. Ядерные локально выпуклые пространства. Москва, 1967.
7. П. Б. Джаков. Изоморфизмы и структура базисов в ядерных пространствах Фреше. (Диссертация). Москва, МГУ, 1974.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике 1000 София П. Я. 373

Поступила 1. 3. 1975