Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

PROPAGATION DES SINGULARITES POUR DES SYSTEMES HYPERBOLIQUES NON SYMETRISABLES

VESSELIN M. PETKOV, GEORGI ST. POPOV

On étudie des systèmes hyperboliques de premier ordre ayant un symbole principal qui n'est pas semblable à une matrice diagonale. On suppose que la multiplicité des racines caractéristiques est constante et en plus que le rang du symbole principal sur la variété caractéristique est constant. On prouve un théorème de propagation de singularités analogue aux théorèmes pour des équations à caractéristiques de multiplicité constante.

Introduction. Soit X' une variété C^∞ de dimention n, $X=[T_-, T_+]\times X'$, $T_-<T_+$, la variété produit, $x=(x_0, x')=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ le point générique de P. On étudie la propagation des singularités des solutions du système de premier ordre $Pu=f$, où

$$P=ID_0+A(x, D')+B(x, D),$$

$D_j=-i\,\partial/\partial x_j$, I est une $(d\times d)$ matrice d'identité, $A(x, D')\in L^1(X')$, $B(x, D)\in L^0(X)$ sont à valeurs matrices $(d\times d)$. En plus le symbole de $A(x, D')$ dépend de façon C^∞ de la coordonnée x_0. On utilise sans les rappeler les notations de Hörmander [3] pour les opérateurs pseudo-différentiels et les opérateurs intégraux de Fourier. On suppose dans la suite que chaque opérateur pseudo-différentiel $Q\in L^m(X)$ a un symbole $q(x, \zeta)$ qui possède un développement asymptotique au sens de [3]:

$$q(x, \zeta)\sim\sum_{k\geqq 0} q_{m-k}(x, \zeta),$$

dans lequel la fonction q_{m-k} est homogène de degré $(m-k)$ en ζ.

Soit $p(x, \zeta)$ le symbole principal de P. Nous allons considérer des opérateurs vérifiant la condition suivante:

(H) Toutes les racines $\zeta_0=\lambda_j(x, \zeta')$ de l'équation $\det p(x, \zeta)=0$ sont réelles et de multiplicité constante r_j pour $(x, \zeta)\in T^*(X)\setminus 0$. De plus nous avons $\operatorname{rang} p(x, \lambda_j(x, \zeta'), \zeta')=d-r_j+\varkappa_j$, où $\varkappa_j=\text{const}$.

Si $\varkappa_j=0$ pour tout j, le symbole $p(x, \zeta)$ est une matrice symétrisable et le problème de Cauchy pour P est bien posé. D'autre part s'il y a au moins un j_0 tel que $\varkappa_{j_0}>0$ il faut poser des conditions sur les termes d'ordre inférieur pour que le problème de Cauchy soit bien posé.

Nous nous intéressons dans ce travail au cas quand $\varkappa_j>0$ implique $r_j=2$. L'un des auteurs a introduit en [4] une condition, dite condition de Lévi, qui se rélève être nécessaire et suffisante pour que le problème de Cauchy soit bien posé.

Afin de formuler cette condition introduisons la fonction phase $\varphi_j(x)$ qui vérifie l'équation

$$\partial\varphi_j/\partial x_0 = \lambda_j(x, \mathrm{grad}_{x'}\varphi_j)$$

et les vecteurs $R_j(x, \zeta')$, $L_j(x, \zeta')$ qui forment localement des bases dans les noyaux de $p(x, \lambda_j(x, \zeta'), \zeta')$ et $p^*(x, \lambda_j(x, \zeta'), \zeta')$ respectivement. (On note avec A^* la matrice adjointe de A). Soit $(x^0, \zeta^0) \in T^*(X)\diagdown 0$, $\pi: T^*(X) \to X$ la projection canonique.

Définition 1. *Nous dirons que l'opérateur P vérifie la condition $L_{(x^0, \zeta^0)}$ s'il existe un voisinage conique $\Gamma \subset T^*(X)\diagdown 0$ de (x^0, ζ^0) tel que pour chaque $f \in C_0^\infty(X)$, supp $f \subset \pi\Gamma$ et chaque fonction phase $\varphi_j(x)$, $\zeta^0 = d\varphi_j(x^0)$, $(x, d\varphi_j) \in \Gamma$ il existe un vecteur $V_j(x, d\varphi_j)$ tel que*

$$(0.1) \qquad e^{-i\varrho\varphi_j} P[(f(x)R_j(x, d\varphi_j) + V_j(x, d\varphi_j)\varrho^{-1})e^{i\varrho\varphi_j}] = O(\varrho^{-\varkappa_j}),\ \varrho \to +\infty.$$

L'opérateur P vérifie la condition (L) si P vérifie $L_{(x^0, \zeta^0)}$ en chaque point $(x^0, \zeta^0) \in (\det p)^{-1}(0)$.

Remarque. Bien entendu le vecteur $V_j(x, d\varphi_j)$ existe seulement pour $(x, d\varphi_j) \in \Gamma$ et l'asymptotique n'a lieu que pour $(x, d\varphi_j) \in \Gamma$.

Il est clair que la condition $L_{(x^0, \zeta^0)}$ est invariante par rapport au choix de R_j et des coordonnées x et que $L_{(x^0, \zeta^0)}$ est toujours satisfaite si $\varkappa_j = 0$. Comme nous verrons cette condition reste invariante si on multiplie l'opérateur P per des opérateurs pseudo-différentiels elliptiques et après une transformation canonique.

Soit $u = (u_1, \ldots, u_d)$ une distribution vectorielle. Posons

$$WF(u) = \bigcup_{i=1}^{d} WF(u_i).$$

(On renvoie pour la définition de $WF(u_i)$ à [3]). On sait que

$$WF(u)\diagdown WF(Pu) \subset (\det p)^{-1}(0).$$

D'autre part la condition (H) entraîne que $(\det p)^{-1}(0) = \bigcup_j q_j^{-1}(0)$, où $q_j(x, \zeta) = \zeta_0 - \lambda_j(x, \zeta')$. Nous énonçons maintenant notre résultat essentiel.

Théorème 1. *Soit $P \in L^1(X)$ un opérateur propre qui vérifie les conditions (H), (L) et $\varkappa_j > 0 \Rightarrow r_j = 2$. Soit $u \in \mathfrak{D}'(X)$, $Pu = f$. Alors l'ensemble $WF(u)\diagdown WF(Pu)$ est inclus dans $(\det p)^{-1}(0)$ et est invariant par le flot bicaractéristique (étant entendu que sur $q_j^{-1}(0)$ on prend le flot associé au champ Hamiltonien du symbole $q_j(x, \zeta)$).*

Pour des équations hyperboliques ce théorème a été démontré par Duistermaat et Hörmander [2] dans le cas $\max_j r_j = 1$ et par Chazarain [1] dans le cas $r_j = \mathrm{const}$, où r_j est la multiplicité des caractéristiques. Une généralisation du résultat de Chazarain a été donnée par Sjöstrand [7].

Notre démonstration suit le plan de [1]. On prouve l'invariance de la condition (L) et on se ramène au cas quand le symbole principal de P a microlocalement une forme très simple. Si $p(x, \zeta)$ est symétrisable on fait une réduction mod $L^{-\infty}$ au cas D_0 dans lequel le résultat est bien connu [2]. Nous espérons que cette réduction peut-être sera-t-elle utile dans le problème traitant la construction d'une parametrix globale de P. Si $\varkappa_j > 0$ on utilise la classe des opérateurs $L^{0,-\infty}$ introduite par Chazarain [1] et la parametrix du problème de Cauchy construite en [6]. Enfin on prouve un résultat de résolubilité locale.

1. Condition de Lévi locale. Nous donnerons une forme algébrique de la condition $L_{(x^0,\zeta^0)}$. Soit $(x^0, \zeta^0) \in T^*(X)\setminus 0$, $\zeta_0^0 = \lambda(x^0, \zeta'^0)$, $\varphi(x)$ la fonction phase, associée avec $\lambda(x, \zeta')$, $\zeta^0 = d\varphi(x^0)$. Dans la suite nous noterons avec (x, ζ) les coordonnées dans un voisinage conique de (x^0, ζ^0). On suppose que la multiplicité de $\lambda(x, \zeta')$ est $r=2$ et $\varkappa=1$. (Ici rang $p(x, \lambda(x, \zeta'), \zeta')=d-1$).

Nous posons

$$\mathsf{P} = \sum_0^n p^{(j)}(x, d\varphi)D_j + p_0(x, d\varphi),$$

où $p^{(j)}(x,\zeta) = \frac{\partial}{\partial \zeta_j} p(x, \zeta)$, $p_0(x, \zeta)$ est le symbole d'ordre 0 de P dans les coordonnées (x, ζ). On prouve facilement que $L_{(x^0,\zeta^0)}$ est équivalente à la condition

$$\beta(x, d\varphi) = \langle L(x, d\varphi), \mathsf{P}(R(x, d\varphi))\rangle = 0, \tag{1.1}$$

où $(x, d\varphi)$ appartient au voisinage conique de (x^0, ζ^0), $\langle\ ,\ \rangle$ est le produit scalaire en C^d.

La condition $L_{(x^0,\zeta^0)}$ est invariante après une multiplication de P par des opérateurs pseudo-différentiels qui sont microlocalement elliptiques.

P r o p o s i t i o n 1.1. *Soit $G, H \in L^0(X)$ deux opérateurs propres à valeurs matrices $(d\times d)$. Si $(x^0, \zeta^0) \notin WF(I-GH)$, l'opérateur P vérifie $L_{(x^0,\zeta^0)}$ si et seulement si l'opérateur GPH vérifie $L_{(x^0,\zeta^0)}$.*

D é m o n s t r a t i o n. Il suffit de montrer que la fonction $\beta(x, d\varphi)$ est invariante en utilisant le fait que dans un voisinage conique de (x^0, ζ^0) on a $G(x,\zeta)H(x,\zeta)=I$, où $G(x, \zeta)$, $H(x, \zeta)$ sont les symboles principaux de G et H. Nous posons dans ce voisinage

$$R(x, \zeta) = G(x, \zeta)R(x, \zeta), \quad \widetilde{L}(x, \zeta) = (G^*)^{-1}(x, \zeta)L(x, \zeta).$$

On a

$$e^{-i\varrho\varphi}\langle \widetilde{L}(x, d\varphi), GPH(f(x)\widetilde{R}(x, d\varphi)e^{i\varrho\varphi})\rangle = f(x)\widetilde{\beta}(x, d\varphi) + O(\varrho^{-1}).$$

D'autre part

$$e^{-i\varrho\varphi}\langle \widetilde{L}(x, d\varphi), GPH(f(x)\widetilde{R}(x, d\varphi)e^{i\varrho\varphi})\rangle = e^{-i\varrho\varphi}\langle \widetilde{L}(x, d\varphi), G[P(f(x)R(x, d\varphi)e^{i\varrho\varphi})$$

$$+ p(x, d\varphi)W(x, d\varphi)e^{i\varrho\varphi}]\rangle + O(\varrho^{-1}) = f(x)\beta(x, d\varphi) + O(\varrho^{-1}),$$

donc $\beta(x, d\varphi) = \widetilde{\beta}(x, d\varphi)$.

On sait [6] qu'on peut trouver un voisinage conique Γ_1 de (x^0, ζ'^0) et une matrice $G(x, \zeta') \in C^\infty(\Gamma_1)$, positivement homogène de degré 0 par rapport à ζ' et telle que dans Γ_1 on a

$$G(x, \zeta')p(x, \zeta)G^{-1}(x, \zeta') = \left(\begin{array}{cc|c} q(x, \zeta) & |\zeta'| & \\ 0 & q(x, \zeta) & \\ \hline & & Q(x, \zeta) \end{array}\right), \tag{1.2}$$

où $q(x, \zeta) = \zeta_0 - \lambda(x, \zeta')$, $Q(x, \zeta)$ est une $(d-2)\times(d-2)$ matrice, $Q(x, \lambda(x, \zeta'), \zeta')$ est inversible. Soient $G(x, D')$, $H(x, D') \in L^0(X')$ deux opérateurs propres dont les symboles en Γ_1 sont respectivement $G(x, \zeta')$ et $G^{-1}(x, \zeta')$. Alors la proposition 1.1 implique que l'opérateur $P_1 = GPH$ vérifie la condition $L_{(x^0,\zeta^0)}$.

Maintenant nous allons prouver que $L_{(x^0, \zeta^0)}$ reste invariante après une transformation canonique homogène T d'un voisinage conique de $(x^0, \zeta^0) \in T^*(X)\setminus 0$ sur un voisinage conique de $(y^0, \eta^0) \in T^*(\mathsf{R}^{n+1})\setminus 0$. Soit A et B deux opérateurs intégraux de Fourier tels que

$$A \in I^0(\mathsf{R}^{n+1}, X;\ (\Gamma^{-1})'),\quad B \in I^0(X, \mathsf{R}^{n+1};\ \Gamma'), \tag{1.3}$$

$$(x^0, \zeta^0) \notin WF(I-BA),\ (y^0, \eta^0) \notin WF(I-AB),$$

où Γ est une partie fermée conique du graphe de T(A et B sont des opérateurs scalaires).

On pose $\widetilde{P}=APB$ et on obtient l'égalité

$$AP_1B-(AGB)\widetilde{P}(AHB)=AG(I-BA)PBAHB+AGP(I-BA)HB.$$

Il en résulte que

$$(y^0, \eta^0) \notin WF(AP_1B-(AGB)\widetilde{P}(AHB))$$

et on en déduit d'après la proposition 1.1 que $P_2=AP_1B$ vérifie $L_{(y^0, \eta^0)}$ si et seulement si $\widetilde{P}$ vérifie $L_{(y^0, \eta^0)}$.

On voit aisément que les vecteurs $R(y, \eta)$, $L(y, \eta)$ qui correspondent à P_2 seront de la forme

$$R=(1, 0, \dots, 0),\ L=(0, 1, 0, \dots, 0). \tag{1.4}$$

Donc la condition $L_{(y^0, \eta^0)}$ pour P_2 est équivalente à

$$\langle L, p_0(T^{-1}(y, d\psi))R\rangle=0, \tag{1.5}$$

où $p_0(x, \zeta)$ est le symbole d'ordre 0 de P_1, $\psi(y)$ est une fonction phase pour P_2, $(y, d\psi)$ appartient au voisinage conique de (y^0, η^0), $\eta^0=d\psi(y^0)$. Soit $(\widehat{y}, \widehat{\eta})=T(\widehat{x}, \widehat{\zeta})$ où $(\widehat{x}, \widehat{\zeta})$ appartient au voisinage conique de (x^0, ζ^0). On trouve une fonction phase $\varphi(x)$ pour P_1 telle que $d\varphi(\widehat{x})=\widehat{\zeta}$. Alors la condition $L_{(x^0, \zeta^0)}$ pour P_1 donne

$$\langle L, p_0(\widehat{x}, d\varphi(\widehat{x}))R\rangle=0$$

ce qui entraîne (1.5). De telle manière on a

P r o p o s i t i o n 1.2. *L'opérateur P vérifie $L_{(x^0, \zeta^0)}$ si et seulement si l'opérateur APB vérifie $L_{(y^0, \eta^0)}$.*

Enfin nous avons le résultat suivant.

P r o p o s i t i o n 1.3. *Si P vérifie $L_{(x^0, \zeta^0)}$, il en est de même pour l'opérateur adjoint formel ${}^tP$.*

D é m o n s t r a t i o n. On utilise des opérateurs microlocalement elliptiques $G, H \in L^0(X)$ et on se ramène au cas quand le symbole principal de P a la forme (1.2) et les vecteurs R, L sont ceux de (1.4). Alors on obtient évidemment

$$\langle L, p_0(x, d\varphi)R\rangle=\langle p_0^*(x, d\varphi)L, R\rangle$$

et il suffit d'appliquer la proposition 1.1.

2. Réduction à une forme microlocale. Soit $(x^0, \zeta^0) \in WF(u)\setminus WF(f), Pu=f$. Pour prouver le théorème 1 il suffit de montrer que sur la bicaractéristique qui contient (x^0, ζ^0) il y a un voisinage de ce point inclus dans $WF(u)\diagdown WF(f)$. Dans ce paragraphe nous allons nous raméner au cas où le symbole principal et les termes d'ordre inférieur de P ont une forme très simple.

Soit $\zeta_0^0=\lambda_j(x^0, \zeta'^0)$, $r_j=2$, $\varkappa_j=1$. Si $\varkappa_j=0$ la réduction est pareille à celle que nous allons faire et en plus il n'y aura pas la condition $L_{(x^0, \zeta^0)}$. Dans la suite on suprime l'indication de l'indice j dans λ_j, r_j, $\varkappa_j$ pour alléger les notations.

Soit Γ_2 un voisinage conique de (x^0, ζ^0), $G, H \in L^0(X)$ deux opérateurs propres tels que

$$WF(f)\cap\Gamma_2=\varnothing, \quad WF(I-HG)\cap\Gamma_2=\varnothing,$$

$$G(x, \zeta')\,p(x, \zeta)H(x, \zeta')=(\zeta_0-\lambda(x, \zeta'))I+\begin{pmatrix} N|\zeta'| & \\ & Q_2(x, \zeta)\end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

où $N=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ si $\varkappa=1$, $N=0$ si $\varkappa=0$, $Q_2(x, \zeta)$ est une $(d-r)\times(d-r)$ matrice inversible en Γ_2. On pose $v=Gu$ et on trouve

$$WF(GPu)\subset WF(f),$$
$$WF(GP(HG-I)u)\subset WF((HG-I)u),$$

donc $(x^0, \zeta^0)\notin WF(GPHv)$.

D'autre part

$$WF(v)\cap\Gamma_2=WF(Gu)\cap\Gamma_2\subset WF(u)\cap\Gamma_2.$$

Si $(x^0, \zeta^0)\notin WF(v)$ il résulte que $(x^0, \zeta^0)\notin WF(Hv)$ et nous aurons $(x^0, \zeta^0)\notin WF(u)$ puisque $u=(I-HG)u+Hv$. Cela prouve que

$$(x^0, \zeta^0)\in WF(v)\diagdown WF(GPHv)\subset(\det p)^{-1}(0)$$

et nous pouvons nous ramener au cas où le symbole $p(x, \zeta)$ a microlocalement la forme (2.1).

Maintenant nous allons utiliser une transformation canonique homogène, T, engendrée par la fonction génératrice

$$\Phi(x, \eta)=\varphi(x, \eta')+x_0\eta_0,$$

où

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}=\lambda(x, \operatorname{grad}_{x'}\varphi), \varphi|_{x_0=x_0^0}=\sum_1^n x_j\eta_j.$$

Si A et B sont de la forme (1.3) avec T, donnée par

$$(x, \Phi_x)\to(\Phi_\eta, \eta),$$

au voisinage conique Γ_3 de (y^0, η^0) le symbole principal de APB sera

$$\zeta_0 I+\begin{pmatrix} N\theta(x, \zeta') & \\ & Q_3(x, \zeta')\end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

où $\theta(x, \zeta')\neq 0$, $Q_3(x, \zeta')$ est une $(d-r)\times(d-r)$ matrice inversible. (On utilise les mêmes notations pour des variables $(x, \zeta)\in T^*(\mathbb{R}^{n+1})\diagdown 0)$.

De la même manière comme ci-dessus on pose $v=Au$ et on se ramène au cas où le symbole principal de P est (2.2) et

$$(x^0, \zeta^0) \in WF(u) \setminus WE(Pu) \subset \{\zeta ; \zeta_0 = 0\}. \tag{2.3}$$

Tout cela ne change pas le problème et pour P la condftion $L_{(x,\zeta)}$ sera satisfaite si (x, ζ) appartient à un petit voisinage conique de (x^0, ζ^0).

Soit $\alpha(x, \zeta') \in C^\infty$ une fonction homogène de degré 0 en ζ' et telle que $0 \leqq \alpha(x, \zeta') \leqq 1$, $\alpha(x, \zeta') \equiv 1$ dans Γ_4, $\alpha(x, \zeta') \equiv 0$ si $(x, \zeta') \notin \Gamma_5$, où $\Gamma_4 \subset \Gamma_5$, Γ_4 et Γ_5 sont des voisinages coniques de (x^0, ζ^0). On considère les symboles

$$\widetilde{\theta}(x, \zeta') = [(1-\alpha(x, \zeta')) + \alpha(x, \zeta')\theta(x, \zeta'/|\zeta'|)]|\zeta'|, \tag{2.4}$$

$$\widetilde{Q}_2(x, \zeta') = [(1-\alpha(x, \zeta'))I + \alpha(x, \zeta')Q_2(x, \zeta'/|\zeta'|)]|\zeta'|. \tag{2.5}$$

Avec le choix de Γ_5 on peut arranger que (2.4) et (2.5) sont inversibles

Soit $P-p(x, D) = B_0(x, D) \in L^0(R^{n+1})$. On introduit l'opérateur

$$\widetilde{P} = ID_0 + Q(x, D') + B_0(x, D),$$

où

$$Q(x, D') = \begin{pmatrix} N\widetilde{\theta}(x, D') & \\ & \widetilde{Q}_2(x, D') \end{pmatrix}$$

et on voit immédiatement qu'on a $(x^0, \zeta^0) \notin WF(P-\widetilde{P})$.

Afin de simplifier les symboles d'ordre inférieur nous allons appliquer pour $\widetilde{P}$ le théorème 8. 1 de [6]. Il existe un opérateur elliptique $E(x, D) \in L^0(R^{n+1})$ et un opérateur $C(x, D') \in L^0(R^n)$ qui dépend de façon C^∞ de la coordonnée x_0 tels que

$$\widetilde{P} \equiv (ID_0 + Q(x, D') + C(x, D'))E(x, D) \bmod L^{-\infty}. \tag{2.6}$$

Les opérateurs E et C sont avec symboles à valeurs matrices $(d \times d)$. En plus les éléments des dernières $(d-r)$ lignes du symbole de C sont 0.

Si on compose P comme la somme $P=(P-\widetilde{P})+\widetilde{P}$ il est bien clair qu'il suffit de prouver le théorème 1 pour l'opérateur $\widetilde{P}$. En posant $v=Eu$ on peut se débarasser de $E(x, D)$ et on devra alors considérer l'opérateur

$$P = ID_0 + Q(x, D') + C(x, D').$$

Montrons maintenant qu'on peut supposer $d=r$. En effet, soit $u=(U_1, U_2)$, où $U_1=(u_1, \ldots, u_r)$, $U_2=(u_{r+1}, \ldots, u_d)$. On voit aisément grâce à la forme de $C(x, \zeta')$ que $(x^0, \zeta^0) \in WF(U_2)$ entraîne $(x^0, \zeta^0) \in WF(Pu)$. Donc $(x^0, \zeta^0) \notin WF(U_2)$ et on obtient $(x^0, \zeta^0) \in WF(U_1)$. D'autre part dans les premières r équations du système $Pu=f$ on peut négliger mod $L^{-\infty}$ les termes concernant U_2, puisque $(x^0, \zeta^0) \notin WF(U_2)$.

Après cette réduction on va supposer dans la suite que le symbole principal de P a la forme

$$p(x, \zeta) = \zeta_0 I + N\theta(x, \zeta'), \quad \theta(x, \zeta') \neq 0.$$

Rappelons que si $\varkappa=0$ nous avons $N=0$.

3. Démonstration du théorème 1 dans le cas $\varkappa=0$. On se propose de faire une réduction mod $L^{-\infty}$ au cas quand $P=ID_0$. Nous remarquons qu'on peut réaliser plus facilement une autre réduction mod $L^{0,-\infty}$ [4]. Dans la suite on suppose $x_0^0=0$.

Proposition 3.1. *Soit* $c(x,\zeta')\in S^0(\mathsf{R}^{n+1}\times\mathsf{R}^n)$ *à valeurs matrices* $(d\times d)$. *Alors il existe un symbole* $h(x,\zeta')\in S^0(\mathsf{R}^{n+1}\times\mathsf{R}^n)$ *à valeurs matrices* $(d\times d)$ *tel qu'on a*

$$\frac{\partial}{\partial x_0}h(x,\zeta')=c(x,\zeta')\,h(x,\zeta'),\quad h(0,x',\zeta')=I. \tag{3.1}$$

Démonstration. On cherche $h(x,\zeta')$ dans la forme

$$h(x,\zeta')=\exp\int_0^{x_0}c(\tau,x',\zeta')d\tau.$$

On pose

$$q(x,\zeta)=\int_0^{x_0}c(\tau,x',\zeta')d\tau$$

et on considère la suite

$$h_m(x,\zeta')=\sum_0^m\frac{(q(x,\zeta'))^k}{k!},\quad m=0,1,2,\dots$$

Nous allons montrer que c'est une suite de Cauchy dans $S^0(\mathsf{R}^{n+1}\times\mathsf{R}^n)$, muni de la topologie, donnée par les seminormes

$$p_{\alpha,\beta,K}(a)=\sup_{x\in K,\zeta\in\mathsf{R}^n}|(1+|\zeta|)^{\beta}D_x^{\alpha}D_{\zeta}^{\beta}a(x,\zeta')|,$$

K est un compact de R^{n+1}. Parce que $S^0(\mathsf{R}^{n+1}\times\mathsf{R}^n)$ est un Fréchet cela va impliquer que $h(x,\zeta')\in S^0(\mathsf{R}^{n+1}\times\mathsf{R}^n)$.

Nous avons

$$p_{\alpha,\beta,K}(h_m(x,\zeta')-h_{m-1}(x,\zeta'))=\frac{1}{m!}\sup_{x\in K,\zeta\in\mathsf{R}^n}|(1+|\zeta|)^{\beta}D_x^{\alpha}D_{\zeta}^{\beta}(h^m(x,\zeta'))|$$

$$\leq\frac{1}{m!}\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m=\alpha}\;\sum_{\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_m=\beta}\;\sup_{\substack{x\in K\\ \zeta\in\mathsf{R}^n}}\prod_{i=1}^m|(1+|\zeta|)^{\beta_i}D_x^{\alpha_i}D_{\zeta}^{\beta_i}h(x,\zeta')|.$$

On introduit des constantes $M_{|\alpha|,|\beta|,K}$ telles que

$$\sup_{x\in K,\zeta\in\mathsf{R}^n}|(1+|\zeta|)^{\beta_i}D_x^{\alpha_i}D_{\zeta}^{\beta_i}h(x,\zeta)|\leq M_{|\alpha|,|\beta|,K}$$

si $\alpha_i\leq|\alpha|$, $\beta_i\leq|\beta|$ et on obtient

$$p_{\alpha,\beta,K}(h_m-h_{m-1})\leq m^{|\alpha|+|\beta|}M^m_{|\alpha|,|\beta|,K}(m!)^{-1}.$$

Donc

$$p_{\alpha,\beta,K}(h_{m+j}-h_m)\leq\sum_{k=m+1}^{m+j}\frac{k^{|\alpha|+|\beta|}}{k!}M^k_{|\alpha|,|\beta|,K}$$

et $h(x,\zeta')\in S^0(\mathsf{R}^{n+1}\times\mathsf{R}^n)$.

Il est bien évident que si $c(x, \zeta')$ est un polynôme de x_0 le symbole $h(x, \zeta')$ vérifie (3.1). Dans le cas général, soit $0 \in [\alpha, \beta]$. On fixe $\hat{x}'$, $\hat{\zeta}'$ et on trouve une suite des matrices $P_m(x_0)$ qui sont des polynômes de x_0 telles que

$$\lim_{m\to\infty} P_m(x_0) = c(x_0, \hat{x}', \hat{\zeta}')$$

dans la topologie $C^1[\alpha, \beta]$.

Soit $I_m(x_0) = \int_0^{x_0} P_m(\tau)d\tau$, $u_m(x_0) = \exp I_m(x_0)$. Alors

$$|u_{m+j}(x_0) - u_m(x_0)| \leqq \limsup_{\mu\to\infty} \sum_{k=1}^{\mu} \frac{|I^k_{m+j} - I^k_m|}{k!}$$

$$\leqq \limsup_{\mu\to\infty} \sum_{k=1}^{\mu} \frac{M^{k-1}}{(k-1)!} |I_{m+j} - I_m| \leqq e^M |I_{m+j} - I_m|,$$

où $\sup |I_m(x_0)| \leqq M$, $x_0 \in [\alpha, \beta]$, $m = 1, 2, \ldots$. Cela prouve que $\{u_m(x_0)\}$ forment une suite de Cauchy dans $C^0[\alpha, \beta]$. On a en outre

$$\frac{du_{m+j}}{dx_0} - \frac{du_m}{dx_0} = P_{m+j}u_{m+j} - P_m u_m = P_{m+j}(u_{m+j} - u_m) - (P_{m+j} - P_m)u_m$$

et cela revient à montrer que $\{u_m(x_0)\}$ est une suite de Cauchy dans $C^1[\alpha, \beta]$ En passant à la limite dans

$$\frac{du_m(x_0)}{dx_0} = P_m(x_0, u_m(x_0))$$

on voit immédiatement que la fonction $u(x_0) = \exp \int_0^{x_0} c(\tau, \hat{x}', \hat{\zeta}')d\tau$ vérifie (3.1) et la proposition 3.1 est démontrée.

Théorème 3.2. *Il existe deux opérateurs* $G(x, D')$, $H(x, D') \in L^0(\mathbb{R}^{n+1})$ *à valeurs matrices* $(d\times d)$ *tels que*

$$PH - HD_0 \equiv 0 \mod L^{-\infty}, \tag{3.2}$$

$$GP - D_0G \equiv 0 \mod L^{-\infty}, \tag{3.3}$$

$$G|_{x_0=0} = H|_{x_0=0} = I. \tag{3.4}$$

Démonstration. On cherche $H(x, D')$ comme une somme asymptotique

$$H \sim \sum_{k=0}^{\infty} H_{-k}(x, D')$$

avec $H_{-k}(x, D') \in L^{-k}(\mathbb{R}^{n+1})$. Soit

$$C(x, D') \sim \sum_{k=0}^{\infty} C_{-k}(x, D').$$

Alors pour $H_0(x, \zeta')$ on obtient l'équation

$$\frac{\partial H_0(x,\zeta')}{\partial x_0} = \frac{1}{i} C_0(x, \zeta')H_0(x, \zeta'),$$

possédant d'après la proposition 3.1 une solution $H_0(x, \zeta')$ qui est une matrice inversible et pour laquelle $H_0(0, x', \zeta')=I$.

Supposons maintenant que les symboles $H_{-j}(x, \zeta')$, $j<m$ sont déjà déterminés de telle manière que

$$(D_0+C_0+C_{-1}+\cdots+C_{-(m-1)})(H_0+H_{-1}+\cdots+H_{-(m-1)})$$
$$\equiv(H_0+H_{-1}+\cdots+H_{-(m-1)}) \quad (\mathrm{mod}\ L^{-\infty}).$$

Pour $H_{-m}(x, \zeta')$ il faut résoudre l'équation

$$\frac{\partial H_{-m}}{\partial x_0}=\frac{1}{i}C_0H_{-m}+R_{-m}$$

où $R_{-m}\in S^{-m}(\mathrm{R}^{n+1}\times\mathrm{R}^n)$ est connu. Prenons H_{-m} dans la forme $H_{-m}(x, \zeta')=H_0(x, \zeta')Q_{-m}(x, \zeta')$. Ceci nous amène à l'équation

$$\frac{\partial Q_{-m}}{\partial x_0}=(H_0)^{-1}R_{-m}, \quad Q_{-m}\,|_{x_0=0}=0$$

qui a évidemment une solution $Q_{-m}\in S^{-m}(\mathrm{R}^{n+1}\times\mathrm{R}^n)$.

Afin de trouver $G(x, D')$ on utilise l'opérateur adjoint formel ${}^tP$. Si H_1 est tel que

$${}^tPH_1\equiv H_1D_0 \mod L^{-\infty}, \quad H_1(0, x', D')=I$$

il résulte que l'opérateur $G={}^tH_1$ vérifie (3.3), (3.4). Cela achève la démonstration du théorème 3.2.

Maintenant nous allons nous ramener au cas $P=ID_0$. Posons $v=Gu$. On a les égalités

$$D_0v=D_0Gu=(D_0G-GP)u+GPu$$

qui entraînent $(x^0, \zeta^0)\notin WF(D_0v)$. D'autre part, l'opérateur G est elliptique et nous aurons

$$(x^0, \zeta^0)\in WF(u)\subset WF(v).$$

Une fois la réduction faite, le résultat du théorème 1 pour D_0 est bien connu [2].

4 Démonstration du théorème 1 dans le cas $\varkappa=1$. Remarquons tout d'abord que nous avons $d=r=2$, donc les symboles considérés sont des matrices (2×2). Avant de faire une réduction au cas $P=D_0$ nous allons simplifier encore la forme du symbole

$$C(x, \zeta')=\{c_{\mu,\nu}(x, \zeta')\}_{\mu,\nu=1}^2.$$

On applique le théorème 3.2 ou bien les raisonnements de [2] et on prouve qu'il existe deux opérateurs elliptiques scalaires $g_k(x, D')\in L^0(\mathrm{R}^{n+1})$, $k=1, 2$ tels que

$$(D_0+c_{k,k}(x, D'))g_k(x, D')\equiv g_k(x, D')D_0 \mod L^{-\infty}.$$

Nous posons

$$E=\begin{pmatrix} g_1(x, D') & 0 \\ 0 & g_2(x, D') \end{pmatrix}$$

avec symbole principal

$$E_0=\begin{pmatrix} e_1(x, \zeta') & 0 \\ 0 & e_2(x, \zeta') \end{pmatrix}.$$

On cherche des opérateurs $\theta'(x, \zeta') \in L^1(\mathsf{R}^{n+1})$, $C'_{-k}(x, D') \in L^{-k}(\mathsf{R}^{n+1})$ tels que

$$PE \equiv E(D_0+N\theta'+C'_0+C'_{-1}+\cdots) \bmod L^{-\infty}.$$

On a $\theta'(x, \zeta')=e_1^{-1}e_2\theta$, donc $\theta'(x, \zeta') \neq 0$. Supposons que les symboles $C'_{-j}(x, \zeta')$ sont déjà déterminés pour $j \leq m-1$ de telle manière que les éléments sur la diagonale de $C'_{-j}(x, \zeta')$ sont 0. On trouve $C'_{-m}(x, \zeta')$ par l'équation

$$PE-E(D_0+N\theta'+C'_0+C'_{-1}+\cdots+C'_{-m+1}) \equiv E_0C'_{-m} \bmod L^{-m-1}$$

et on voit aisément que les éléments sur la diagonale de $C'_{-m}(x, \zeta')$ sont égales à 0. Donc on se ramène au cas où sur la diagonale des symboles d'ordre inférieur nous avons 0. Dans la suite on supprime le prime en θ' et C'.

Nous rappelons la définition des opérateurs de la classe $L^{0,-\infty}$, introduite par Chazarain [1, définition 6.1].

Définition 4.1. *Etant donnée une application* C^∞: $\mathsf{R} \to L^{-\infty}(\mathsf{R}^n)$, *notée* $x_0 \to R(x_0, x', D')$ *on lui associe sur* R^{n+1} *l'opérateur* $R(x_0, x', D') \in L^0(\mathsf{R}^{n+1})$. *La classe de ces opérateurs est notée par* $L^{0,-\infty}$.

Le théorème suivant est analogue au théorème 3.2.

Théorèmes 4.1. *Il existe des opérateurs* $G(x, D')$, $H(x,D') \in L^1(\mathsf{R}^n)$ *à valeurs matrices* (2×2) *qui dépendent de façon* C^∞ *de la coordonnée* x_0 *et tels que*

$$(D_0+N\theta+C)H \equiv HD_0 \bmod L^{0,-\infty}, \tag{4.1}$$

$$G(D_0+N\theta+C) \equiv D_0G \bmod L^{0,-\infty}, \tag{4.2}$$

$$G(0, x', D') \equiv H(0, x', D') \equiv I \bmod L^{-\infty}(\mathsf{R}^n). \tag{4.3}$$

Démonstration. Soit Q un opérateur intégral de Fourier

$$(Qu)(x)=(2\pi)^{-n}\int\int e^{i\langle x'-y', \zeta'\rangle}h(x_0, x', \zeta')\,u(y')dy'd\zeta',$$

où $h(x_0, x', \zeta') \in S^1(\mathsf{R}^{n+1}\times\mathsf{R}^n)$. Si nous avons

$$PQ \equiv 0, \quad Q(0, x', D') \equiv I$$

on peut poser

$$(Hu)(x)=(2\pi)^{-n}\int\int e^{i\langle x'-y',\zeta'\rangle}h(x_0, x', \zeta')\,u(x_0, y')\,dy'd\zeta'$$

et les conditions (4.1), (4.3) seront satisfaites. Autrement dit il faut trouver une parametrix du problème de Cauchy pour P. L'existence d'une telle parametrix est prouvée en [6, § 9]. Pour $G(x, D')$ on applique les mêmes raisonnements que dans le théorème 3.2.

Les opérateurs G et H ne sont pas elliptiques. C'est pourquoi nous allons considérer l'opérateur $W=HG$ (On peut supposer que les opérateurs G, H sont proprement supportés).

Proposition 4.2. *Nous avons* $W \equiv I \mod L^{0,-\infty}$.

Démonstration. D'après (4.1)—(4.3) on obtient

$$\frac{1}{i}\frac{\partial W}{\partial x_0} \equiv (N\theta + C)W - W(N\theta + C) \mod L^{0,-\infty} \tag{4.4}$$

$$W|_{x_0=0} = I \mod L^{-\infty}(\mathrm{R}^n). \tag{4.5}$$

Nous aurons $W \equiv I \mod L^{0,-\infty}$ si le problème (4.4)—(4.5) a une solution unique modulo $L^{0,-\infty}$.

On suppose que W vérifie (4.4) et $W_{x_0=0} \equiv 0 \mod L^{-\infty}(\mathrm{R}^n)$. Soit

$$W \sim \sum_{k=-2}^{\infty} W_{-k},$$

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} \\ c_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

La condition (L) implique $c_{21} = 0$. Nous noterons avec $\{w^k_{\mu,\nu}\}^2_{\mu,\nu=1}$ les éléments des symboles W_{-k} et supposons que W_{-m} est le premier symbole qui n'est pas identiquement 0. On utilise (4.4) et on trouve

$$(NW_{-m} - W_{-m}N)\,\theta = \begin{pmatrix} w^m_{21} & w^m_{22} - w^m_{11} \\ 0 & -w^m_{21} \end{pmatrix}\theta = 0,$$

d'où il résulte que $w^m_{21} = 0$, $w^m_{22} = w^m_{11}$ puisque $\theta \neq 0$.

Pour les symboles w^m_{11}, w^m_{22}, w^{m+1}_{21} on obtient le système

$$D_0 w^m_{11} = w^{m+1}_{21}\theta, \quad D_0 w^m_{22} = -w^{m+1}_{21}\theta, \quad D_0 w^{m+1}_{21} = 0$$

avec les conditions initiales 0. Cela donne $w^m_{11} = w^m_{22} = w^{m+1}_{21} = 0$.

Enfin on a le système

$$D_0 w^m_{12} = (w^{m+1}_{22} - w^{m+1}_{11})\,\theta,$$

$$D_0 w^{m+1}_{11} = w^{m+2}_{21}\theta - \gamma_{12} w^m_{12},$$

$$D_0 w^{m+1}_{22} = -w^{m+2}_{21}\theta + \gamma_{12} w^m_{12}.$$

$$D_0 w^{m+2}_{21} = \gamma_{21}(w^{m+1}_{11} - w^{m+1}_{22}),$$

qui entraîne $w^m_{12} = w^{m+1}_{11} = w^{m+1}_{22} = w^{m+2}_{21} = 0$. Donc $W_{-m} = 0$ et la proposition 4.2 est démontrée.

Après cette préparation posons $v = Gu$. On sait que

$$WF(u) \subset \{(x, \zeta) \in T^*(\mathrm{R}^{n+1}) \setminus 0;\ \zeta^0 = 0\}$$

$$WF(D_0 G - GP) \subset \{(x, \zeta) \in T^*(\mathrm{R}^{n+1}) \setminus 0;\ \zeta' = 0\}$$

et on en déduit

$$WF((D_0 G - GP)\,u) = WF(D_0 G - GP) \circ WF(u) = \varnothing.$$

On a en outre $(x^0, \zeta^0) \notin WF(GPu) \subset WF(Pu)$ et cela revient à montrer que $(x^0, \zeta^0) \notin WF(D_0 v)$.

D'autre part d'après la proposition 4.2 on obtient $WF((I-W)u)=\varnothing$ d'où il résulte que

$$(x^0, \zeta^0) \in WF(u) \subset WF(Wu) = WF(Hv) \subset WF(v).$$

Finalement nous avons prouvé que

$$(x^0, \zeta^0) \in WF(v) \setminus WF(D_0 v) \subset \{(x, \zeta);\ \zeta_0 = 0\}$$

et nous sommes ramenés au cas D_0. Cela termine la démonstration de théorème 1.

R e m a r q u e. Dans [5] nous avons annoncé qu'on peut se ramener au cas D_0 avec une réduction mod $L^{-\infty}$ ce qui n'est pas toujours possible si nous avons $\varkappa=1$.

Théorème 1 a un analogue dans les espaces de Sobolev $H_{(s)}(X)$. Rap pelons que

$$WF_s(u) = \bigcap_{Au \in H_{(s)}} a^{-1}(0),$$

où $A \in L^0(X)$ sont des opérateurs propres, $a(x, \zeta)$ est le symbole principa de A. Après des modifications évidentes on prouve

T h é o r è m e 4.3. *Soit $P \in L^1(X)$ un opérateur propre qui vérifie les conditions (H), (L) et $\varkappa_j > 0 \Rightarrow r_j = 2$. Soit $u \in \mathfrak{D}'(X)$, $Pu=f$. Alors pour tout $s \in \mathbb{R}$ nous avons $WF_{s-\varkappa_j}(u) \setminus WF_s(f) \subset (\det p)^{-1}(0)$ et sur $q_j^{-1}(0)$ l'ensemble $WF_{s-\varkappa_j}(u) \setminus WF_s(f)$ est invariant par le flot bicaractéristique associé au champ Hamiltonien de q_j.*

Remarquons enfin qu'on peut démontrer un résultat de résolubilité locale en utilisant la proposition 1.3, le théorème 4.3 et les raisonnements de [2].

T h é o r è m e 4.4. *Soit P un opérateur qui vérifie les hypothèses du théorème 4.3, $x^0 \in X$. Alors il existe un voisinage ouvert V de x^0 dans lequel l'équation $Pu=f$ est résoluble. En plus, pour f donnée dans $H_{(s)}(V)$ il existe u dans $H_{(s-\bar{\varkappa})}(V)$, où $\bar{\varkappa} = \max_j \varkappa_j$.*

On renvoie à [1], [2] pour les détails.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. C h a z a r a i n. Propagation des singularités pour une classe d'opérateurs à caractéristiques multiples et résolubilité locale. *Ann. Inst. Fourier*, **24**. 1974, No. 1. 203—223.
2. J. J. D u i s t e r m a a t, L. H ö r m a n d e r. Fourier integral operarors, II. *Acta Math.*, **128**, 1972, No. 3/4, 183—269.
3. L. H ö r m a n d e r. Fourier integral operators, I. *Acta Math.*, **127**, 1971, No. 1, 79—183.
4. В. М. П е т к о в. О задаче Коши для гиперболических систем первого порядка с кратными характеристиками. *Доклады АН СССР*, **209**, 1973, № 4, 795—797.
5. V. M. P e t k o v. Problème de Cauchy et propagation des singularités pour une classe des systèmes hyperboliques non symétrisables. Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz, Ec le Polytechnique, 1974—1975, Exposé No. V.
6. V. M. P e t k o v. Equations et systèmes hyperboliques à caractéristiques multiples. Université Paris VI, 1975.
7. J. S j ö s t r a n d. Propagation of singularities for operators with multiple involutive characteristics. *Ann. Inst. Fourier*, **26**, 1976, No. 1, 141—155.

Centre for Research and Education in Mathematics and Mechanics
1000 Sofia P. O. Box 373

Reçu le 15. 7. 1975