Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОДИН ПРОЦЕСС ВОССТАНОВЛЕНИЯ С ЗАВИСИМЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ

ЛЮБЕН Р. МУТАФЧИЕВ

Рассматривается последовательность зависимых и неодинаково распределенных случайных величин $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ и определенный этими величинами процесс восстановления $M(t)$, $0<t<\infty$. Случайные величины y_n удовлетворяют условиям мартингального типа: $E(y_n|y_1, \ldots, y_{n-1})=Ey_n=\mu_n$, $n=1, 2\ldots$, где последовательность постоянных μ_n сходится в смысле средних арифметических. В работе исследуется асимптотическое поведение при $t\to\infty$ функций $E[M(t)/t]^k$, $k=2, 3, \ldots$; $E^{1/s(t)}[M(t)/t]^{s(t)}$ ($s(t)$ — ограниченная, положительная функция) и $EM(t+\tau)-EM(t)$, $0<\tau<\infty$ при дополнительном ограничении для случайных величин y_n: $E(|y_n-\mu_n|^\alpha|y_1, \ldots, y_{n-1})\leqq K<\infty$, $n=1, 2, \ldots$. Для каждой из рассматриваемых функций минимальные величины константы α разные, но везде $\alpha>1$ и асимптотики этих функций те же самые, как и в случае независимых и одинаково распределенных y_n.

1. Введение. Рассмотрим последовательность случайных величин y_1, $y_2, \ldots, y_n, \ldots$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, которые могут быть зависимыми и неодинаково распределенными. Пусть $x_n=y_1+y_2+\cdots+y_n$. Для $t>0$ введем случайную величину $M=M(t)$, равняющуюся первому $n\geqq1$, для которого $x_n\geqq t$. В теории процессов восстановления доказывается [1, с. 35—37], что если случайные величины y_n независимы, неотрицательны и одинаково распределены со средним $Ey_n=\mu$, $n=1, 2, \ldots$, то

$$(1)\qquad \lim_{t\to\infty} E[M(t)/t]^k=\begin{cases}1/\mu^k, & \text{если } \mu<\infty;\\ 0, & \text{если } \mu=+\infty,\end{cases}$$

для $k=1, 2, \ldots$. К о н ю х о в с к и й [2] получил этот результат и для неодинаково распределенных y_n. Он доказал следующую т е о р е м у.

Если случайные величины $\{y_n\}$ удовлетворяют условиям: 1) они независимы в совокупности, 2) их функции распределения непрерывны и $Ey_n=\mu$, $n=1, 2, \ldots$, 3) существует монотонно неубывающая, непрерывная положительная функция $f(x)$, $x\in[0, \infty)$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ и такая постоянная $C>0$, что $Ey_nf(y_n)\leqq C$ равномерно по $n=1, 2, \ldots$, то тогда выполнено (1).

Ч о у и Р о б б и н с в [3] рассматривают случай, когда случайные величины $\{y_n\}$ зависимы. Они обозначают через $\mathcal{F}_n$ σ-алгебру, порожденную случайными величинами $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $n\geqq1$; $\mathcal{F}_0=\{\varnothing, \Omega\}$ и предполагают, что выполнены условия:

$$(2)\qquad E(y_n|\mathcal{F}_{n-1})=Ey_n=\mu_n \text{ (постоянные)}, \quad n=1, 2, \ldots;$$

$$(3)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n}{n}=\mu, \ 0<\mu<\infty;$$

(4) $$E(|y_n-\mu_n|^\alpha|\mathcal{F}_{n-1})\leq K<\infty$$

для некоторого $\alpha>1$. При этих предположениях они доказывают соотношение (1) в случае, когда $k=1$.

Одна из наших задач в этой работе показать, что (1) справедливо и в случае $k>1$, если выполнены условия (2), (3) и условие (4) при целом α.

Дайон и Конюховский получили в [4] обобщение равенства (1) для последовательности $\{y_n^\Delta\}$ типа $y_n^\Delta=y_n+\Delta$, $\Delta>0$, $n=1, 2, \ldots$ взаимно независимых и неодинаково распределенных случайных величин. Здесь показано, что такое обобщение имеет место и для процесса восстановления с зависимыми $\{y_n\}$, если выполнены условия (2), (3) и (4) при $\alpha=2$.

В конце этой работы показано, что в предположениях Чоу и Роббинса [3] верна и теорема Блекуэлла, т. е. для каждого $\tau>0$ имеет место

(5) $$\lim_{t\to\infty}[EM(t+\tau)-EM(t)]=\tau/\mu.$$

2. Вспомогательные утверждения. Для доказательства соотношения (1), когда $\{y_n\}$ зависимы, нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения об одном мартингале специального вида. Он будет построен в этом пункте. В случае независимых $\{y_n\}$ свойства этого мартингала рассмотрены в [1, с. 31—35] и [2].

Будем использовать обозначения Чоу и Роббинса [3]. Положим $y'_n=\min(y_n, \mu_n+n\delta)$, где $0<\delta<\mu/3$; $\varrho_n=\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n$; $x'_n=y'_1+y'_2+\cdots+y'_n$; $\mu'_n=Ey'_n$; $M'=M'(t)=\min\{n: x'_n\geq t\}, t>0$. Из [5, с. 286] следует, что с вероятностью 1 $\lim_{n\to\infty}x_n/n=\mu$ и $\lim_{n\to\infty}x'_n/n=\mu$, и отсюда $P\{M<\infty\}=1$ и $P\{M'<\infty\}=1$. Чоу и Роббинс [3] показали, что

$$P\{y_n\neq y'_n \text{ для бесконечного числа значений } n\}=0$$

и $\lim_{n\to\infty}\varrho'_n/n=\mu$, где $\varrho'_n=\mu_1+\mu'_2+\cdots+\mu'_n$. Очевидно $M\leq M'$.

Рассмотрим мартингал $\zeta_n^{(1)}=\sum_{i=1}^n E(y'_i|\mathcal{F}_{i-1})$ относительно последовательности $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq1}$, где $\mathcal{F}_n$ определены как во введении. Предположим, что для некоторого натурального $k>1$ выполнено условие (4)

$$E(|y_n-\mu_n|^k|\mathcal{F}_{n-1})\leq K<\infty.$$

Будем строить мартингал $\zeta_n^{(k)}$, являющийся многочленом степени k от $\zeta_n^{(1)}$ со случайными коэффициентами, быть может зависящими от n:

(6) $$\zeta_n^{(k)}=\sum_{j=0}^k b_{jk}(n)[\zeta_n^{(1)}]^{k-j}=\sum_{j=0}^k \overline{b_{jk}}(n)[\zeta_n^{(1)}]^j,$$

где $\overline{b_{jk}}(n)=b_{k-j,k}(n)$, $n=1, 2, \ldots$ случайные величины — измеримые относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_{n-1}$. Учитывая, что

$$E\{[\zeta_n^{(1)}]^j|\mathcal{F}_{n-1}\}=\sum_{i=0}^j a_{ij}^{(n)}[\zeta_{n-1}^{(1)}]^{j-i}=\sum_{i=0}^j \overline{a}_{ij}^{(n)}[\zeta_{n-1}^{(1)}]^i,$$

получаем, что с вероятностью 1 должно быть выполнено

(7) $$E\{\zeta_n^{(k)}|\mathcal{F}_{n-1}\}=\sum_{j=0}^k \overline{b}_{jk}(n)\sum_{i=0}^j \overline{a}_{ij}^{(n)}[\zeta_{n-1}^{(1)}]^i$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \left(\sum_{i=j}^{k} \bar{a}_{ji}^{(n)} \bar{b}_{ik}(n) \right) [\zeta_{n-1}^{(1)}]^j = \sum_{j=0}^{k} \bar{b}_{jk}(n-1) [\zeta_{n-1}^{(1)}]^j = \zeta_{n-2}^{(k)}.$$

Здесь положено

$$a_{ij}^{(n)} = C_j^i E\{[y'_n - E(y'_n \mid \mathfrak{F}_{n-1})]^i \mid \mathfrak{F}_{n-1}\} = C_j^i \varrho_n^{(i)}$$

$$\sigma_n^{(i)} = E\{[y'_n - E(y'_n \mid \mathfrak{F}_{n-1})]^i \mid \mathfrak{F}_{n-1}\}, \ \sigma_n^{(0)} \equiv 1, \ \bar{a}_{ij}^{(n)} = a_{j-i,i}^{(n)}.$$

Для выполнения (7) достаточно произвести выбор величин $b_{ik}(n)$ так, чтобы удовлетворялись соотношения $\bar{b}_{jk}(n-1) = \sum_{i=j}^{k} \bar{a}_{ji}^{(n)} \bar{b}_{ik}(n)$, $j = 0, 1, \ldots, k$, или

$$b_{jk}(n-1) = \sum_{i=0}^{j} a_{j-i,k-i}^{(n)} b_{ik}(n), \ j = 0, 1, \ldots, k \tag{8}$$

с вероятностью 1.

Рассмотрим (8) как систему линейных уравнений относительно $b_{ik}(n)$; определитель этой системы $D = a_{0,k}^{(n)} a_{0,k-1}^{(n)} \ldots a_{00}^{(n)} = 1$. Отсюда ясно, что коэффициенты $b_{jk}(n)$ определяются однозначно, если заданы постоянные $b_{0k}(1)$, $b_{1k}(1), \ldots, b_{kk}(1)$; при этом для вычисления $b_{jk}(n)$ достаточно знать $b_{ik}(1)$ для $i = 0, 1, \ldots, j$. Начальные данные $b_{ik}(1)$, $i = 0, 1, \ldots, j$ определяют математическое ожидание мартингала, поскольку

$$E\zeta_n^{(k)} = E\zeta_1^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} b_{jk}(1) \sigma_1^{(k-j)}.$$

Как в [2], начальные данные могут быть выбраны так, что $b_{0k}(n) = 1$, $n > 1$ $(b_{0k}(1) = 1)$, $b_{1k}(n) = 0$, $n > 1$ $(b_{1k}(1) = 0)$,

$$b_{2k}(n) = -C_k^2 \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^{(2)}, \ (b_{2k}(1) = -C_k^2 \sigma_1^{(2)}), \ b_{3k}(n) = -C_k^3 \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^{(3)}, \ (b_{3k}(1) = -C_k^3 \sigma_1^{(3)}).$$

Вид коэффициентов $b_{jk}(n)$ при $j \geqq 4$ несколько усложняется, однако для дальнейшего важно найти асимптотическое поведение коэффициентов $b_{jk}(n)$ при $n \to \infty$.

Для каждого i имеем

$$E(y'_i \mid \mathfrak{F}_{i-1}) = \mu_i - E\{(y_i - \mu_i - i\delta) \chi_{\{y_i - \mu_i > i\delta\}} \mid \mathfrak{F}_{i-1}\}, \tag{9}$$

где χ_A — характеристическая функция измеримого множества A. Далее из неравенства Гельдера для условных математических ожиданий получаем:

$$E\{(y_i - \mu_i - i\delta) \chi_{\{y_i - \mu_i > i\delta\}} \mid \mathfrak{F}_{i-1}\} \leqq E\{(y_i - \mu_i) \chi_{\{y_i - \mu_i > i\delta\}} \mid \mathfrak{F}_{i-1}\} \tag{10}$$

$$\leqq E^{1/k}\{|y_i - \mu_i|^k \mid \mathfrak{F}_{i-1}\} P^{1/k'}\{y_i - \mu_i > i\delta \mid \mathfrak{F}_{i-1}\} \leqq K(i\delta)^{-k/k'} = \varepsilon_i,$$

где $1/k + 1/k' = 1$. Обозначим $\eta_i = \sum_{s=1}^{i} \varepsilon_s$, $i = 1, 2, \ldots$ Ясно, что $\varepsilon_n \to 0$ и $\eta_n/n \to 0$, если $n \to \infty$. Из соотношений (9), (10) и $y'_i \leqq y_i$ следует

$$\mu_i - \varepsilon_i \leqq E(y'_i \mid \mathfrak{F}_{i-1}) \leqq \mu_i, \tag{11}$$

и поэтому ввиду (4′) $|\sigma_i^{(j)}|$ ограничены сверху для $i = 1, 2, \ldots, n$ и $j = 1$ $2, \ldots, k$. Пусть j некоторое целое положительное число и $j \leqq k$. Нетрудно показать, что в мартингале $\zeta_n^{(k)}$ начальные данные $b_{ik}(1)$, $i = 0, 1, \ldots, j$

можно выбирать так, чтобы коэффициенты $b_{ik}(n)$ удовлетворяли соотношениям

(12) $$|b_{ik}(n)|=O(n^{[i/2]}),\ i=0, 1, \ldots, j,$$

если $n\to\infty$. Это легко доказывается по индукции с использованием линейной системы (8).

3. Формулировки и доказательства утверждений. Сначала отметим, что из факта $P\{\lim_{n\to\infty} x_n/n=\mu\}=1$ [5, с. 286] немедленно следует $P\{\lim_{t\to\infty} M(t)/t=1/\mu\}=1$

(13) $$P\{\lim_{t\to\infty} M(t)=\infty\}=1.$$

То же самое соотношение в силе и для процесса $M'(t)$.

Теорема 1. *Пусть случайные величины $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ удовлетворяют условиям* (2), (3) *и* (4′) *для некоторого натурального* $k>1$. *Тогда*

(14) $$\lim_{n\to\infty} E[M(t)/t]^j=1/\mu^j,\ j=0, 1, \ldots, k.$$

Доказательство. В случае, когда $j=1$, достаточно дословно повторить доказательство Чоу и Роббинса из [3]. Рассмотрим случай $j>1$. Согласно неравенству Йенсена имеем

(15) $$\liminf_{t\to\infty} E[M(t)/t]^j\geqq \lim_{t\to\infty}[EM(t)/t]^j=1/\mu^j,\ j=1, 2, \ldots, k.$$

В случае, когда $j=1$, как отметили Чоу и Роббинс [3], можно показать, что величины $M(t)/t$ (так же и $M'(t)/t$) равномерно интегрируемые по t.

Вторую часть доказательства проводим по индукции с помощью мартингала $\zeta_n^{(k)}$. Наши индуктивные предпосылки будут: (14) для $j=1, 2, \ldots, k-1$ и равномерная интегрируемость случайных величин $[M(t)/t]^{k-1}$ $([M'(t)/t]^{k-1})$. Обозначим $M^*=M^*(t)=\min[l, M'(t)]$ для $l=1, 2, \ldots$. Теперь воспользуемся теоремой Дуба [6, с. 272—277]. Получаем:

(16) $$E\{[x'_{M^*}-\sum_{i=1}^{M^*}E(y'_i\,|\,\mathcal{F}_{i-1})]^k\}+\cdots=C=\mathrm{const}.$$

Используя предположения индукции и учитывая (6), (12) и (16), получаем

(17) $$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^k}E\{[x'_{M^*}-\sum_{i=1}^{M^*}E(y'_i\,|\,\mathcal{F}_{i-1})]^k\}=0.$$

Воспользуемся теперь формулой бинома Ньютона:

(18) $$\frac{1}{t^k}E\{[x'_{M^*}-\sum_{i=1}^{M^*}E(y'_i\,|\,\mathcal{F}_{i-1})]^k\}=\frac{1}{t^k}\int_{\{M'\leq l\}}[x'_{M'}-\sum_{i=1}^{M'}E(y'_i\,|\,\mathcal{F}_{i-1})]^k$$
$$+\frac{1}{t^k}\int_{\{M'>l\}}[x'_l-\sum_{i=1}^{l}E(y'_i\,|\,\mathcal{F}_{i-1})]^k\xrightarrow{l\to\infty}H(t)+E\{[\sum_{i=1}^{M'}E(y'_i\,|\,\mathcal{F}_{i-1})]^k/t^k\}$$
$$+\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{k-j}C_k^j}{t^j\,.\,t^{k-j}}E\{(x'_{M'})^j[\sum_{i=1}^{M'}E(y'_i\,|\,\mathcal{F}_{i-1})]^{k-j}\},$$

где $H(t)$ удовлетворяет одному из следующих двух неравенств:

$$(-1)^k h_\eta(t)\leq H(t)\leq(-1)h(t)\ \text{ или }\ (-1)^k h(t)\leq H(t)\leq(-1)^k h_\eta(t)$$

и

$$(-1)^k h(t) = \lim_{l\to\infty} [\sup_{t>0} t^{-k} \int_{\{M'>l\}} (x'_l - \varrho_l)^k = \lim_{l\to\infty} [\sup_{t>0} (-t)^{-k} \int_{\{M'>l\}} (\varrho_l)^k],$$

$$(-1)^k h_\eta(t) = \lim_{l\to\infty} \{\sup_{t>0} t^{-k} \int_{\{M'>l\}} [x'_l - (\varrho_l - \eta_l)]^k\} = \lim_{l\to\infty} [\sup_{t>0} (-t)^{-k} \int_{\{M'>l\}} (\varrho_l - \eta_l)^k].$$

Далее имеем:

$$\frac{C_k^j}{t^j \cdot t^{k-j}} E\{(x'_{M'})^j [\sum_{i=1}^{M'} E(y'_i \mid \mathcal{F}_{i-1})]^{k-j}\} = \frac{C_k^j}{t^j \cdot t^{k-j}} \{\int_{\{M'\leqq i_0\}} (x'_{M'})^j [\sum_{i=1}^{M'} E(y'_i \mid \mathcal{F}_{i-1})]^{k-j}$$

$$+ \int_{\{M'>i_0\}} (x'_{M'})^j [\sum_{i=1}^{M'} E(y'_i \mid \mathcal{F}_{i-1})]^{k-j}\}$$

и

$$t^{-k} E\{(x'_{M'})^j (\varrho_{M'} - \eta_{M'})^{k-j}\} + o(t^{j-k}) \leqq t^{-k} \int_{\{M'>i_0\}} (x'_{M'})^j [\sum_{i=1}^{M'} E(y'_i \mid \mathcal{F}_{i-1})]^{k-j}$$

$$\leqq t^{-k} E\{(x'_{M'})(\varrho_{M'})^{k-j}\} + o(t^{j-k}).$$

Из (13) следует, что интегралы по множеству $\{M'(t) \leqq i_0\}$ имеют порядок $o(1)$ при $t \to \infty$ и

(19) $$\lim_{t\to\infty} P\{M'(t) \leqq i_0\} = 0$$

для каждого фиксированного i_0. Здесь можем выбирать i_0 так, чтобы для каждого $i > i_0$ были выполнены неравенства

(20) $$\mu - \delta < \varrho_i / i < \mu + \delta, \quad |u_i|/i < \delta.$$

Используя, что $t \leqq x'_{M'} \leqq t + y'_{M'} \leqq t + |\mu_{M'}| + \delta M'$ и (20), легко получается, что

$$\frac{E\{(x'_{M'})^j (\varrho_{M'})^{k-j}}{t^j \cdot t^{k-j}}$$

$$\leqq t^{j-k} \int_{\{M'\leqq i_0\}} [1 + \frac{i_0}{t} (\sup_{1\leqq n\leqq i_0} |\mu_n|/n + \delta)]^j (\sup_{1\leqq n\leqq i_0} |\varrho_n|)^{k-j} + (\mu+\delta)^{k-j} \int_{\{M'>i_0\}} (1 + 2\delta M'/t)^j (M'/t)^{k-j}$$

$$\leqq o(t^{j-k}) + \limsup_{t\to\infty} (\mu+\delta)^{k-j} E\{(1 + 2\delta M'/t)^j (M'/t)^{k-j}\}.$$

Нетрудно получить и оценку снизу:

$$\frac{E\{(x'_{M'})^j (\varrho_{M'})^{k-j}\}}{t^j \cdot t^{k-j}} \geqq \left(\frac{\mu-\delta}{\mu}\right)^{k-j} + o(t^{j-k}),$$

если $j = 1, 2, \ldots, k$ и $t \to \infty$.

С другой стороны, для $j = 1, 2, \ldots, k$

$$E\{(1 + M'/t 2\delta)^j (M'/t)^{k-j}\} (\mu+\delta)^{k-j}$$

$$= \sum_{i=0}^{j-1} C_j^i (2\delta)^i E(M'/t)^{k-j+i} (\mu+\delta)^{k-j} + (\mu+\delta)^{k-j} (2\delta)^j E(M'/t)^k,$$

а

$$\sum_{i=0}^{j-1} C_j^i (2\delta)^i E(M'/t)^{k-j+i}(\mu+\delta)^{k-j} \to \left(\frac{\mu+\delta}{\mu}\right)^{k-j} + (\mu+\delta)^{k-j} \sum_{i=1}^{j-1} C_j^i (2\delta)^i \left(\frac{1}{\mu}\right)^{k-j+i}$$

при $t \to \infty$.

Для последнего слагаемого в (18) получается при $j=0$, что

$$o(t^{-k}) + \limsup_{t\to\infty} (\mu-\delta)^k E(M'/t)^k \leq E\{[\sum_{i=1}^{M'} (y_i' | \mathcal{F}_{i-1})]^k / t^k\}$$

$$\leq o(t^{-k}) + \limsup_{t\to\infty} E(M'/t)^k (\mu+\delta)^k.$$

Надо рассмотреть два случая: когда k является четным и когда k является нечетным натуральным числом. Рассмотрим случай, когда k нечетно. Для четного k доказательство аналогично. Из (17), (18) и из сделанных выше замечаний следует, что

$$\limsup_{t\to\infty} [(\mu-\delta)E(M'/t)^k + h(t) + \sum_{i=1}^{(k+1)/2} (\mu+\delta)^{k-2i+1} (2\delta)^{2i} E(M'/t)^k]$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} C_k^j (-1)^{k-j} \varphi_k(j, \mu, \delta),$$

где

$$\varphi_k(j, \mu, \delta) = \begin{cases} \left(\frac{\mu-\delta}{\mu}\right)^{k-j}, \text{ если } k-j \text{ нечетное;} \\ \left(\frac{\mu+\delta}{\mu}\right)^{k-j} + (\mu+\delta)^{k-j} \sum_{i=1}^{j-1} (2\delta)^i \mu^{j-i-k}, \quad \text{если } k-j \text{ четное.} \end{cases}$$

Число δ можно выбирать произвольно малым и сразу видно, что $\varphi_k(j, \mu, \delta) = 1 + O(\delta)$, если $\delta \downarrow 0$. С другой стороны, так как $h(t) \geq 0$ (так же и $h_\eta(t) \geq 0$) и $\Sigma_{j=1}^k (-1)^{k-j} C_k^j = -(-1)^k = 1$, то

$$\limsup_{t\to\infty} E(M/t)^k \leq \limsup_{t\to\infty} [E(M'/t)^k + h(t)] \leq \mu^{-k}.$$

Последнее неравенство вместе с (15) доказывает теорему.

Замечание. Можно показать, что в условиях теоремы 1

$$\lim_{t\to\infty} E[M(t)/t]^\beta = \mu^{-\beta}$$

для каждого $\beta \in (0, k]$. Это соотношение получается при помощи теоремы Лебега о предельном переходе.

Пусть $\xi(t) = x_{M(t)} - t$. Докажем следующую теорему о процессе $\xi(t)$.

Теорема 2. *В обозначениях, данных во введении, из условий* (2), (3) *и* (4) *для некоторого* $\alpha > 1$ *следует, что* $\lim_{t\to\infty} t^{-1} E\xi(t) = 0$.

Доказательство. Так как $EM < \infty$ и для мартингала $(x_n - \varrho_n, \mathcal{F}_n)$ имеем, что $E\{|x_{n+1} - \varrho_{n+1} - x_n + \varrho_n| \,|\mathcal{F}_n\} = E\{|y_{n+1} - \mu_{n+1}| \,|\mathcal{F}_n\} \leq K^{1/\alpha}$, то по теореме Дуба [6, с. 272—277]

$$t \leq E\{t + \xi(t)\} = E(\varrho_M) \leq \int_{\{M \leq i_0\}} (|\mu_1| + \cdots + |\mu_{i_0}|) + \int_{\{M > i_0\}} M(\mu+\delta)$$

$$\leq |\mu_1| + \cdots + |\mu_{i_0}| + (\mu+\delta)EM,$$

где i_0 выбрано так, чтобы выполнялось (20). Утверждение теоремы следует из элементарной теоремы восстановления Чоу и Роббинса [3] и из того, что $x_M \geq t$.

Пусть теперь случайные величины $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ неотрицательны. Будем предполагать, что они удовлетворяют условию (4') при $k=2$. Если $\Delta>0$ некоторая постоянная, обозначим $y_n^\Delta = y_n+\Delta$, $x_n^\Delta = y_1^\Delta + \dots + y_n^\Delta$, $n=1, 2, \dots$ и $M^\Delta(t) = \min\{n : x_n^\Delta \geq t\}$. Очевидно $E(y_n^\Delta | \mathfrak{F}_{n-1}) = \mu_n + \Delta = \mu_n^\Delta$, и

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mu_i^\Delta = \mu+\Delta = \mu^\Delta .$$

Теорема 3. *Если последовательность неотрицательных случайных величин* $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ *удовлетворяет условиям* (2), (3) *и* (4') *при* $k=2$, *то для каждой функции* $s(t)$, $0<c_1 \leq s(t) \leq c_2 < \infty$ (c_1, c_2 — *константы*), *выполняется* $\lim_{t\to\infty} E^{1/s(t)}[M^\Delta(t)/t]^{s(t)} = (\mu^\Delta)^{-1}$.

Доказательство. Сначала отметим, что в силу неотрицательности $y_n - M^\Delta(t) \leq t/\Delta+1$ и отсюда

$$M^\Delta(t)/t \leq 1/\Delta + 1/t. \tag{21}$$

В этой ситуации применимы рассуждения Дайона и Конюховского [4], поэтому не будем останавливаться на подробностях.

Пусть $g(y, s)$ неотрицательная функция, неубывающая по y, выпуклая по y и удовлетворяющая по y условие Липшица с константой $K_\mu(s)$ в некоторой окрестности $U_\mu(s)$ точки $y=(\mu^\Delta)^{-1}$. Как в [4], используя (21), неравенства Маркова и Йенсена и условие Липшица, получаем следующие неравенства:

$$0 \leq Eg(M^\Delta(t)/t, s) - g((\mu^\Delta)^{-1}, s) \leq g(1/t+1/\Delta, s)\psi(t)/h + K_\mu(s)h, \tag{22}$$

где

$$0 \leq \psi(t) = E\{M^\Delta(t)/t - (\mu^\Delta)^{-1}\}^+ \leq E^{1/2}\{M^\Delta(t)/t - (\mu^\Delta)^{-1}\}^2$$
$$\to [(\mu^\Delta)^{-2} - 2(\mu^\Delta)^{-2} + (\mu^\Delta)^{-2}]^{1/2} = 0$$

при $t\to\infty$. $h>0$ выбрано так, чтобы $(\mu^\Delta)^{-1}+h \in U_\mu(s)$, а $x^+ = \max(x, 0)$ Так как минимум правой части (22) достигается в точке

$$h = h_t = \left[\frac{g(1/t+1/\Delta, s)\,\psi(t)}{K_\mu(s)}\right]^{1/2} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

то

$$0 \leq Eg(M^\Delta(t)/t, s) - g((\mu^\Delta)^{-1}, s) \leq 2[K_\mu(s) g(1/t+1/\Delta, s)\,\psi(t)]^{1/2}, \tag{23}$$

если $(\mu^\Delta)^{-1}+h_t \in U_\mu(s)$.

Воспользуемся теперь элементарным неравенством

$$0 \leq x^\gamma - y^\gamma = \gamma \int_y^x u^{\gamma-1}\,du \leq \gamma y^{\gamma-1}(x-y),\ 0<y\leq x,\ 0<\gamma<1.$$

Положим $g(y, s) = y^s$, $s>1$ и $\gamma=1/s$. Нетрудно заметить, что окрестность $U_\mu(s)$ можно выбрать независимо от s. Тогда имеем

$$0 \leq E\{M^\Delta(t)/t - (\mu^\Delta)^{-1}\} \leq E^{1/s}\{M^\Delta(t)/t\}^s - [(\mu^\Delta)^{-1}]^{s\cdot 1/s}$$
$$\leq 1/s\,[(\mu^\Delta)^{-1}]^{(1/s-1)s}[E\{M^\Delta(t)/t\}^s - (\mu^\Delta)^{-s}]$$

$$\leq 2\sqrt{c_0 s^{-1}(\mu^{\Delta})^{s-1}(1/t+1/\Delta)^s\,\psi(t)} \to 0,$$

если $t \to \infty$. Здесь $c_0 > 0$. Теорема доказана.

Замечание. В неравенстве (23) функция $g(y, s)$ произвольна, и поэтому мы можем получить и другие предельные соотношения для $Eg(M^{\Delta}/t, s(t))$. Дайон и Конюховский [4] получили и другое полезное неравенство для этого математического ожидания:

$$0 \leq \ln Eg\left(\frac{M^{\Delta}(t)}{t}, s\right) - \ln g\left((\mu^{\Delta})^{-1}, s\right) \leq \frac{2[K_\mu(s)\, g(1/t+1/\Delta, s)\,\psi(t)]^{1/2}}{g((\mu^{\Delta})^{-1}, s)}.$$

Это неравенство верно и в нашем случае и получается как следствие элементарного неравенства

$$0 \leq \ln x - \ln y = \int_y^x \frac{du}{u} \leq \frac{1}{y}(x-y), \quad x \geq y > 0.$$

В конце этого пункта отметим, что верна и теорема Блекуэлла — (5) для процесса восстановления $M(t)$ с зависимыми случайными величинами.

Теорема 4. *В обозначениях, данных во введении, из условий* (2), (3) *и* (4) *для некоторого* $\alpha > 1$ *следует, что для каждого* $\tau > 0$ *верно равенство* (5).

Доказательство. Чоу и Роббинс в [3] получили следующие неравенства:

$$(24)\qquad -\int_{\{M' \leq l\}} M'\left(\delta + \frac{|\mu_{M'}|}{M'}\right) + \sum_{i=1}^{l} iP\{M'=i\}(\varrho_i - \eta_i)/i \leq T$$
$$\leq \int_{\{M' \leq i_0\}} (|\mu_1| + \cdots + |\mu_{i_0}|) + \int_{\{M > i_0\}} M(\mu+\delta),$$

где $T > 0$. $M = M(T)$, $M' = M'(T)$ определены как раньше, и i_0 выбрано так, чтобы для каждого $i > i_0$ выполнялись неравенства (20). При помощи этих неравенств они доказывают (1) в случае, когда $k=1$.

Теперь возьмем такое натуральное l_1, чтобы для каждого $i > l_1$ было верно неравенство $(\varrho_i - \eta_i)/i > \mu - \delta$. Тогда для каждого $l > l_1$ имеем

$$\sum_{i=1}^{l} iP\{M'=i\}(\varrho_i - \eta_i)/i \geq \sum_{i=1}^{l_1} iP\{M'=i\}(\varrho_i - \eta_i)/i + (\mu-\delta)\sum_{i=l_1+1}^{l} iP\{M'=i\}$$

$$\geq (\mu-\delta)\sum_{i=1}^{l} iP\{M'=i\} + \beta_{l_1}\sum_{i=1}^{l_1} iP\{M'=i\} \geq (\mu-\delta)\sum_{i=1}^{l} iP\{M'=i\} + \beta_{l_1} l_1 P\{M' \leq l_1\},$$

где $\beta_{l_1} = \min\{(\varrho_i - \eta_i)/i - \mu + \delta) : 1 \leq i \leq l_1\} \leq 0$. После этих уточнений из (24) получаем

$$(24')\qquad -2\delta\int_{\{M' \leq l\}} M' + \int_{\{M' \leq l\}} (\delta - |\mu_{M'}|/M')M' + (\mu-\delta)\sum_{i=1}^{l} iP\{M'=i\}$$
$$+ \beta_{l_1} l_1 P\{M' \leq l_1\} \leq T \leq \varrho^*_{i_0} P\{M' \leq i_0\} + (\mu+\delta)\int_{\{M > i_0\}} M,$$

где $\varrho^*_{i_0} = |\mu_1| + |\mu_2| + \cdots + |\mu_{i_0}|$. Для каждого $i > i_0$ в силу (20) имеем $|\mu_i|/i < \delta$, поэтому

$$E\{M(\delta-|\mu_{M'}|/M'\}=\int_{\{M'\leqq i_0\}} M'(\delta-|\mu_{M'}|/M')+\int_{\{M'>i_0\}} M'(\delta-|\mu_{M'}|/M')\geqq AP\{M'\leqq i_0\}\underset{T\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

где A некоторая постоянная.

Устремляя $l\to\infty$ из (24′), получаем

$$(\mu-3\delta)EM'+AP\{M'\leqq i_0\}+\beta_{l_1}l_1P\{M'\leqq l_1\}\leqq T \leqq \varrho^*_{i_0}P\{M\leqq i_0\}+(\mu+\delta)EM. \tag{24''}$$

Положим в первом из неравенств (24″) $T=t+\tau$, $\tau>0$, а во втором $T=t$. Используя (19) и неравенства $EM\leqq EM'$ и $\delta<\mu/3$ получаем сразу, что

$$\limsup_{t\to\infty}[EM(t+\tau)-EM(t)]\leqq\tau/\mu.$$

Противоположное неравенство $\liminf\limits_{t\to\infty}[EM(t+\tau)-EM(t)]\geqq\tau/\mu$ получается легко, тоже из (24″). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Конюховский. Случайные процессы и некоторые задачи теории массового обслуживания. ВЦ МГУ, Серия: Статистика и стохастические системы. Выпуск 2. Москва, 1968.
2. В. В. Конюховский. Асимптотика моментов числа восстановлений. Сб. Математические вопросы управления производством, Выпуск 2. Москва, 1970, 184—198.
3. Y. S. Chow, H. Robbins. A renewal theorem for random variables, which are dependent or nonidentically distributed. *Ann. Math. Statist.*, **34**, 1963, No. **2**, 390—395.
4. А. А. Дайон, В. В. Конюховский. Некоторые свойства процессов восстановления. *Вычисл. методы програм.*, **18**, 1972, 16—23.
5. M. Loève. On almost sure convergence. Proc. Second Berkeley Symp. Math. Statist. Prob., 1951, 279—303
6. Дж. Л. Дуб. Вероятностные процессы. Москва, 1956.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике
1000 София П. Я. 373

Поступила 1. 10. 1975