

Provided for non-commercial research and educational use.  
Not for reproduction, distribution or commercial use.

# Serdica

## Bulgariacae mathematicae publicationes

---

# Сердика

## Българско математическо списание

---

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.  
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.

Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on  
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes  
and its new series Serdica Mathematical Journal  
visit the website of the journal <http://www.math.bas.bg/~serdica>

or contact: Editorial Office  
Serdica Mathematical Journal  
Institute of Mathematics and Informatics  
Bulgarian Academy of Sciences  
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49  
e-mail: [serdica@math.bas.bg](mailto:serdica@math.bas.bg)

# PROPAGATION DES SINGULARITES POUR DES SYSTEMES HYPERBOLIQUES NON SYMETRISABLES A CARACTERISTIQUES DE MULTIPLICITE CONSTANTE

VESSELIN M. PETKOV

On prouve un résultat de propagation des singularités pour des systèmes hyperboliques ayant dans la structure microlocale de son symbole principal des blocs de Jordan de dimension quelconque. On suppose que le rang de symbole principal est constant sur la variété caractéristique et que l'opérateur vérifie la condition de Levi concernant les termes d'ordre inférieur.

**Introduction.** Le but de cet article est de présenter une généralisation du résultat obtenu en [5] concernant la propagation des singularités pour des systèmes hyperboliques ayant dans la structure microlocale de son symbole principal des blocs de Jordan  $(2 \times 2)$ . On se propose de démontrer le même résultat dans le cas quand les blocs de Jordan ont une dimension quelconque. Notre travail est lié étroitement avec l'article [4], où l'auteur a introduit la condition de Levi pour des systèmes hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante et arbitraire.

Nous allons utiliser plusieurs fois des raisonnements qui sont des conséquences de la construction de la parametrix microlocale du problème de Cauchy faite en [4]. La démonstration de notre résultat principal suit le plan de [1]. D'autre part dans le cas des systèmes hyperboliques non symétrisables de nouvelles difficultés apparaissent et elles sont liées avec le fait que si l'opérateur  $P$  a une forme microlocale assez simple la condition de Levi est satisfaite seulement dans un sens microlocale.

Soit  $X'$  une variété  $C^\infty$  de dimension  $n$ . On suppose que  $X'$  est paracompacte. Soit  $X = \mathbf{R} \times X'$  la variété produit et  $x = (x_0, x') = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  le point générique de  $X$ . On considère l'opérateur

$$P = ID_0 + P_1(x, D') + P_0(x, D),$$

où  $D_0 = -i \partial / \partial x_0$ ,  $I$  est la  $(d \times d)$  matrice d'identité,  $P_1(x, D') \in L^1(X')$ ,  $P_0(x, D) \in L^0(X)$  sont des  $(d \times d)$  opérateurs pseudo-différentiels matriciels proprement supportés. En plus le symbole de  $P_1(x, D')$  dépend de façon  $C^\infty$  de la coordonnée  $x_0$ . On utilise sans le rappeler les notations de Hörmander [3] pour les opérateurs pseudo-différentiels et les opérateurs intégraux de Fourier. On suppose dans la suite que dans chaque carte locale d'espace cotangent  $T^*(X)$  avec coordonnées  $(x, \zeta)$  les symboles  $P_1(x, \zeta')$ ,  $P_0(x, \zeta)$  possèdent des développements asymptotiques au sens de [3]

$$P_1(x, \zeta') \sim \sum_{k=-1}^{\infty} p'_{-k}(x, \zeta'), \quad P_0(x, \zeta) \sim \sum_{k=0}^{\infty} p_{-k}(x, \zeta),$$

où les fonctions  $p'_{-k}(x, \zeta')$ ,  $p_{-k}(x, \zeta)$  sont homogènes de degré  $(-k)$  respectivement en  $\zeta'$  et  $\zeta$ . On note avec  $p(x, \zeta)$  le symbole principal de  $P$  et on désigne avec  $\lambda_j(x, \zeta')$ ,  $j=1, \dots, l$  les racines de l'équation  $\det p(x, \zeta_0, \zeta')=0$  par rapport à  $\zeta_0$ .

Définition 1. On dit que l'opérateur  $P$  vérifie la condition (H) si :

(i) pour  $(x, \zeta') \in \mathbf{R} \times (T^*(X') \setminus 0)$  les racines  $\lambda_j(x, \zeta')$  sont réelles et de multiplicité constante  $r_j$  ( $r_1 + \dots + r_l = d$ ).

(ii)  $\text{rang } p(x, \lambda_j(x, \zeta'), \zeta') = d - r_j + \kappa_j$ , où  $\kappa_j = \text{const}$  pour chaque  $(x, \zeta') \in \mathbf{R} \times (T^*(X') \setminus 0)$ .

(iii)  $\kappa_j > 0$  implique  $\kappa_j = r_j - 1$  où  $\kappa_j = 1$ .

Dans la suite on considère des opérateurs vérifiant (H) et l'on pose  $\kappa = \max_j \kappa_j$ ,  $q_j(x, \zeta) = \zeta_0 - \lambda_j(x, \zeta')$ . Dans un voisinage conique de chaque point  $(x^0, \zeta^0) \in q_j^{-1}(0) \setminus 0$  il existe une base dans l'espace  $\mathfrak{R}_j = \text{Ker } p(x, \lambda_j(x, \zeta'), \zeta')$ . Si  $\kappa_j = r_j - 1$  cette base est formée par le vecteur  $R_{1,j}(x, \zeta')$  et si  $\kappa_j = 1$ , par les vecteurs  $R_{k,j}(x, \zeta')$ ,  $k=1, \dots, r_j - 1$ . On note avec  $a^*$  la matrice adjointe de  $a$  et l'on désigne d'une manière analogue avec  $L_{k,j}(x, \zeta')$  les vecteurs qui forment microlocalement une base dans  $\mathfrak{R}_j^* = \text{Ker } p^*(x, \lambda_j(x, \zeta'), \zeta')$ . On arrange l'égalité

$$\langle \{L_{\mu,j}, R_{\nu,j}\}_{\mu,\nu=1}^{r_j-1}(x, \zeta') \rangle = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

où  $\langle, \rangle$  est le produit scalaire dans  $\mathbf{C}^d$ .

Afin de formuler la condition de Levi on introduit la fonction phase  $\varphi_j(x)$  qui vérifie l'équation  $q_j(x, d_x \varphi_j) = 0$ .

Définition 2. Soit  $(x^0, \zeta^0) \in q_j^{-1}(0) \setminus 0$ . Nous dirons que l'opérateur  $P$  vérifie la condition  $L_{(x^0, \zeta^0)}$  s'il existe un voisinage conique  $\Gamma$  de  $(x^0, \zeta^0)$  tel que pour chaque  $f \in C_0^\infty(X)$  et chaque fonction phase  $\varphi_j(x)$ ,  $d\varphi_j(x^0) = \zeta^0$ ,  $(x, d_x \varphi_j) \in \Gamma$  pour  $x \in \text{supp } f$ , il existe des fonctions vectorielles  $V_{k,j}(x, d\varphi_j; f)$ ,  $k=1, \dots, \kappa_j$  et des fonctions scalaires  $g_{k,j}(x, \zeta) \in C^\infty(\Gamma)$ ,  $g_{k,j}(x_0^0, x', \zeta) = 0$ ,  $k=2, \dots, r_j - 1$  telles que

$$(1) \quad e^{-i\varphi_j} P[(f(x)R_{1,j}(x, d\varphi_j) + \sum_{k=2}^{r_j-1} g_{k,j}(x, d\varphi_j) R_{k,j}(x, d\varphi_j) + \sum_{k=1}^{\kappa_j} V_{k,j}(x, d\varphi_j; f) \varrho^{-k}) e^{i\varphi_j}] = O(\varrho^{-\kappa_j}), \quad \varrho \rightarrow +\infty$$

(dans le cas  $\kappa_j = r_j - 1$  on pose  $R_{k,j} \equiv 0$ ,  $k \geq 2$ ). L'opérateur  $P$  vérifie la condition (L) si  $L_{(x^0, \zeta^0)}$  est satisfaite pour chaque  $(x^0, \zeta^0) \in (\det p)^{-1}(0) \setminus 0$ .

On peut énoncer maintenant notre résultat principal.

Théorème 1. Soit  $P$  un opérateur qui vérifie les conditions (H) et (L). Soit  $u = (u_1, \dots, u_d)$  une distribution vectorielle. Posons  $Pu = f$ ,  $WF(u) = \bigcup_{j=1}^d WF(u_j)$ . Alors l'ensemble  $WF(u) \setminus WF(f)$  est inclus dans  $(\det p)^{-1}(0)$  et est invariant par le flot bicaractéristique (étant entendu que sur  $q_j^{-1}(0)$  on prend le flot associé au champ Hamiltonien du symbole  $q_j(x, \zeta)$ ).

Pour démontrer le théorème 1 on fait une réduction au cas  $P=ID_0$ . Tout d'abord au § 1 nous allons faire une réduction microlocale au cas quand le symbole principal et les symboles d'ordre inférieur ont une forme microlocale très simple. Après, au § 2 on utilise la classe des opérateurs  $L^{0,-\infty}$  introduite par Chazarain [1] et on fait une réduction modulo des opérateurs  $L^{0,-\infty}$  au cas  $P=ID_0$ . Dans la réduction apparaissent des opérateurs pseudo-différentiels  $G(x, D')$ ,  $H(x, D')$  qui ne sont pas elliptiques et le point essentiel est l'étude du front d'onde de l'opérateur  $M=HG$ .

Enfin on prouve un résultat concernant le front d'onde  $WF_s(u)$  et un résultat de résolubilité locale.

**1. Réduction à une forme microlocale.** La réduction que nous allons faire est la même qu'on a utilisée en [5, § 1] et en [4, § 3]. Voici pourquoi nous allons la rappeler brièvement.

Soit  $(x^0, \zeta^0) \in WF(u) \setminus WF(f) \subset q_j^{-1}(0) \setminus 0$ . Il faut prouver que sur la bicaractéristique qui contient  $(x^0, \zeta^0)$  il y a un voisinage de ce point inclus dans  $WF(u) \setminus WF(f)$ .

Dans un voisinage conique  $\Gamma_1$  de  $(x^0, \zeta^0)$  il existe un symbole  $G(x, \zeta) \in C^\infty(\Gamma_1)$  tel que

$$(2) \quad G(x, \zeta) p(x, \zeta) G^{-1}(x, \zeta) = q_j(x, \zeta) I + \begin{pmatrix} N_j |\zeta'| \\ Q(x, \zeta) \end{pmatrix}$$

où  $Q$  est une  $(d-r) \times (d-r)$  matrice inversible en  $\Gamma_1$  et  $N_j$  est une  $(r \times r)$  matrice qui a la forme

$$N_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \text{ si } \kappa_j = r_j - 1, \quad N_j = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \text{ si } \kappa_j = 1,$$

et  $N_j = 0$  si  $\kappa_j = 0$ . On prolonge les symboles  $G(x, \zeta)$  et  $G^{-1}(x, \zeta)$  et on trouve un voisinage conique  $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$  de  $(x^0, \zeta^0)$  et deux opérateurs  $G, H \in L^0(X)$  proprement supportés avec symboles principaux  $G(x, \zeta)$  et  $G^{-1}(x, \zeta)$  en  $\Gamma_2$  tels que

$$(3) \quad WF(f) \cap \Gamma_2 = \emptyset, \quad WF(I - HG) \cap \Gamma_2 = \emptyset.$$

On pose  $v = Gu$  et en utilisant (3) on obtient facilement

$$(x^0, \zeta^0) \in WF(v) \setminus WF(GPHv) \subset q_j^{-1}(0) \setminus 0.$$

De telle manière on se ramène au cas où le symbole  $p(x, \zeta)$  a microlocalement la forme (2).

Soit  $\chi$  une transformation canonique homogène d'un voisinage conique de  $(x^0, \zeta^0) \in T^*(X) \setminus 0$  sur un voisinage conique de  $(y^0, \eta^0) \in T^*(\mathbf{R}^{n+1}) \setminus 0$ , engendrée par la fonction génératrice  $\Phi(x, \eta) = \varphi_j(x, \eta') + x_0 \eta_0$ , où

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_0} = \lambda_j(x, d_{x'} \varphi_j), \quad \varphi_j|_{x_0=x_0^0} = \sum_1^n x_j \eta_j.$$

On note avec  $\Gamma$  une partie fermée conique du graphe de  $\chi$  et on introduit des opérateurs intégraux de Fourier  $A$  et  $B$  proprement supportés tels que

$$(4) \quad \begin{aligned} A \in I^0(\mathbf{R}^{n+1}, X; \Gamma'), \quad B \in I^0(X, \mathbf{R}^{n+1}; (\Gamma^{-1})'), \\ (x^0, \zeta^0) \notin WF(I_X - BA), \quad (y^0, \eta^0) \notin WF(I_{\mathbf{R}^{n+1}} - AB) \end{aligned}$$

( $A$  et  $B$  sont des opérateurs scalaires).

On pose  $w = Av$  et après un calcul des fronts d'onde on trouve que

$$(y^0, \eta^0) \in WF(w) \setminus WF(AGPHBw) \subset \{\eta_0 = 0\}.$$

Tout cela ne change pas le problème parce que la condition  $L_{(x, \zeta)}$  reste invariante après les transformations utilisées. Plus précisément la condition  $L_{(y, \eta)}$  sera satisfaite pour  $AGPHB$  si on considère la fonction phase linéaire  $\langle y', \eta' \rangle$  et  $(y, \eta)$  appartient à un petit voisinage conique de  $(y^0, \eta^0)$  (cf. § 1, 2 en [4]). Dans la suite on supprime l'indication de l'indice  $j$  dans  $q_j, \lambda_j, r_j, \kappa_j, \varphi_j$  et on note avec  $(x, \zeta)$  les coordonnées locales dans  $T^*(\mathbf{R}^{n+1})$ . En plus on suppose que le symbole principal  $p(x, \zeta)$  de  $P$  a microlocalement la forme

$$p(x, \zeta) = \zeta_0 I + \begin{pmatrix} N\theta(x, \zeta') \\ Q(x, \zeta) \end{pmatrix},$$

où le symbole scalaire  $\theta(x, \zeta') \neq 0$  et le symbole matriciel  $Q(x, \zeta)$  est inversible. On note avec  $p(x, D)$  l'opérateur avec symbole  $p(x, \zeta)$ .

Afin de simplifier les symboles d'ordre inférieur nous allons appliquer le théorème 3.1 de [4]. Il existe un opérateur elliptique  $\mathfrak{D}(x, D) \in L^0(\mathbf{R}^{n+1})$  et un opérateur  $C(x, D') \in L^0(\mathbf{R}^n)$  qui dépend de façon  $C^\infty$  de la coordonnée  $x_0$  tels que

$$(x^0, \zeta^0) \notin WF(P - (p(x, D) + C(x, D')) \mathfrak{D}(x, D)).$$

Les opérateurs  $C(x, D')$  et  $\mathfrak{D}(x, D)$  ont des symboles matriciels et les éléments des dernières  $(d-r)$  lignes du symbole de  $C(x, D')$  sont 0.

Il est bien évident qu'il suffit de prouver le théorème 1 pour l'opérateur  $(p(x, D) + C(x, D')) \mathfrak{D}(x, D)$ . On peut se débarrasser de l'opérateur elliptique  $\mathfrak{D}(x, D)$  et cela nous ramène au cas quand  $P$  a la forme

$$P = p(x, D) + C(x, D').$$

Enfin nous allons prouver qu'on peut supposer  $d=r$ . Soit  $U = (U_1, U_2)$ , où  $U_1 = (u_1, \dots, u_r)$ ,  $U_2 = (u_{r+1}, \dots, u_d)$ . Si  $(x^0, \zeta^0) \in WF(U_2)$  on aura

$$(x^0, \zeta^0) \in WF(U_2) \subset WF(Q(x, D)U_2),$$

parce que le symbole  $Q(x, \zeta)$  est inversible. D'autre part la forme de  $C(x, D')$  implique que les derniers  $(d-r)$  éléments du vecteur  $Pu$  sont  $Q(x, D)U_2$ , donc on a  $(x^0, \zeta^0) \notin WF(Pu)$  ce qui donne une contradiction. De telle manière on obtient  $(x^0, \zeta^0) \notin WF(U_2)$  et dans les premières  $r$  équations du système  $Pu = f$  on peut négliger modulo  $L^{-\infty}$  les termes concernant  $U_2$ .

Après cette réduction on va supposer dans la suite que  $d=r$ ,  $x^0 = (0, x'^0)$ ,  $\zeta^0 = (0, \zeta'^0)$  et le symbole de  $P$  a la forme

$$P(x, \zeta) = \zeta_0 I + N\theta(x, \zeta') + C(x, \zeta').$$

En plus la condition  $L_{(x, \zeta)}$  est satisfaite pour  $P$  si  $(x, \zeta)$  appartient au voisinage conique de  $(x^0, \zeta^0)$  et la fonction phase  $\varphi$  est  $\langle x', \zeta' \rangle$ .

**2. Réduction au cas  $P=D_0$ .** Afin de réaliser la réduction au cas  $P=D_0$  nous allons utiliser des opérateurs  $R(x, D') \in L^{0, -\infty}$ , où la classe  $L^{0, -\infty}$  est introduite par Chazarain [1, définition 6.1]. Rappelons que  $R \in L^{0, -\infty}$  si  $x_0 \rightarrow R(x_0, x', D')$  est une application  $C^\infty: \mathbf{R} \rightarrow L^{-\infty}(\mathbf{R}^n)$ .

**Théorème 2.** *Il existe deux opérateurs  $G(x, D')$ ,  $H(x, D') \in L^s(\mathbf{R}^{n+1})$  avec symboles matrices  $(r \times r)$  qui dépendent de façon  $C^\infty$  de la coordonnée  $x_0$  et tels que*

$$(5) \quad (D_0 + N\theta + C)H \equiv HD_0 \text{ mod } L^{0, -\infty}.$$

$$(6) \quad G(D_0 + N\theta + C) \equiv D_0G \text{ mod } L^{0, -\infty},$$

$$(7) \quad (x'^0, \zeta'^0) \notin WF(H(0, x', D') - I),$$

$$(8) \quad (x'^0, \zeta'^0) \notin WF(G(0, x', D') - I).$$

**Démonstration.** Le point essentiel dans le choix de  $G$  et  $H$  est l'existence d'une paramétrix du problème de Cauchy pour  $P$  que nous avons prouvé en [4]. Soit  $B \in L^0(X')$  un opérateur proprement supporté tel que  $(x'^0, \zeta'^0) \notin WF(B - I)$ . Si  $WF(B)$  est assez petit on peut trouver une paramétrix microlocale du problème de Cauchy pour  $P$  [4, théorème 4.1]. Plus précisément en utilisant la condition  $L_{(x, \zeta)}$  pour  $(x, \zeta)$  dans un voisinage conique de  $(x^0, \zeta^0)$  on trouve un opérateur intégral de Fourier

$$(9) \quad \tilde{H}(x, D') = (2\pi)^{-n} \int \int e^{i(x' - y', \zeta')} h(x_0, x', \zeta') u(y') dy' d\zeta'$$

avec symbole matriciel  $h(x, \zeta') \in S^s(\mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^n)$  tel que

$$P\tilde{H} \equiv 0, \quad \tilde{H}(0, x', D') \equiv B$$

(le signe  $\equiv$  désigne une égalité modulo des opérateurs à noyau  $C^\infty$ ).

On pose

$$\begin{aligned} (Hu)(x) &= (2\pi)^{-n} \int \int e^{i(x' - y', \zeta')} h(x, \zeta') u(x_0, y') dy' d\zeta' \\ &= (2\pi)^{-(n+1)} \int \int e^{i(x - y, \zeta)} h(x, \zeta') u(y) dy d\zeta, \quad u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{n+1}) \end{aligned}$$

et on obtient immédiatement l'égalité (5).

Rappelons [4, § 1, 2] que si  $P$  vérifie la condition  $L_{(x, \zeta)}$ , il en est de même pour l'opérateur adjoint formel  ${}^tP$  par rapport au produit scalaire dans  $L^2(\mathbf{R}^{n+1})$ . On profite de cela et pour obtenir  $\tilde{G}$  on utilise la paramétrix microlocale du problème de Cauchy pour l'opérateur  ${}^tP$ . Si nous avons

$${}^tP\tilde{G} \equiv \tilde{G}D_0 \text{ mod } L^{0, -\infty}, \quad (x'^0, \zeta'^0) \notin WF(\tilde{G}(0, x', D') - I)$$

on en déduit que  $G = {}^t\tilde{G}$  vérifie (6), (8).

Pour terminer la réduction au cas  $P=D_0$  on pose  $v = Gu$ . On a  $(D_0G - GP) \in L^{0, -\infty}$  et donc

$$\pi_{T^*(\mathbf{R}^{n+1})} WF(D_0G - GP) \subset \{(x, \zeta) \in T^*(\mathbf{R}^{n+1}) \setminus 0; \zeta' = 0\}.$$

On a en outre  $(0, x'^0, 0, \zeta'^0) \in WF(u)$  et cela implique que

$$(x^0, \zeta^0) \notin WF((D_0G - GP)u) \subset WF(D_0G - GP) \circ WF(u).$$

D'autre part  $(x^0, \zeta^0) \notin WF(GPu) \subset WF(Pu)$  et on obtient que  $(x^0, \zeta^0) \notin WF(D_0v)$ .

Il reste de prouver que

$$(10) \quad (x^0, \zeta^0) \in WF(v).$$

Pour obtenir (10) nous allons utiliser une idée de Chazarain [1] et on va démontrer le résultat suivant :

**Proposition 3.** *On a  $(0, x^0, 0, \zeta^0) \notin WF(I-HG)$ .*

En supposant pour le moment que la proposition 3 est démontrée on trouve

$$(x^0, \zeta^0) \in WF(u) \subset WF((I-HG)u) \cup WF(HGu)$$

donc

$$(x^0, \zeta^0) \in WF(HGu) \subset WF(Gu) = WF(v).$$

Finalement nous avons

$$(x^0, \zeta^0) \in WF(v) \setminus WF(D_0v)$$

et la démonstration du théorème 1 se ramène au cas  $P=D_0$ , où le résultat est bien connu [2].

Revenons à la démonstration de la proposition 3. Posons  $M=HG$  et multiplions (5) par  $G$  à droite et (6) par  $H$  à gauche. On prend la différence et on obtient

$$\begin{cases} PM - MP \equiv 0 \text{ mod } L^{0,-\infty}, \\ (x^0, \zeta^0) \notin WF(I - M(0, x', D')). \end{cases}$$

Il suffit de prouver que les conditions

$$(11) \quad \begin{cases} PM - MP \equiv 0 \text{ mod } L^{0,-\infty}, \\ (x^0, \zeta^0) \notin WF(M(0, x', D')) \end{cases}$$

impliquent

$$(12) \quad (0, x^0, 0, \zeta^0) \notin WF(M).$$

Soit  $t$  assez petit, fixé,  $\mathcal{E}$  un opérateur de la forme (9) tel que

$$P\mathcal{E} \equiv 0, \quad (x^0, \zeta^0) \notin WF(\mathcal{E}(t, x', D') - I).$$

Alors pour chaque distribution  $g \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$  on obtient  $P(\mathcal{E}g) \in C^\infty$  donc  $WF(\mathcal{E}g) \subset \{\zeta_0=0\}$ . On en déduit que  $R(\mathcal{E}g) \in C^\infty$  pour chaque opérateur  $R \in L^{0,-\infty}$ . Cela implique que

$$(13) \quad P(M\mathcal{E}g) = M(P\mathcal{E}g) + R\mathcal{E}g \in C^\infty.$$

D'autre part d'après la construction de  $\mathcal{E}$  [4] on obtient que si  $WF(\mathcal{E}(t, x', D'))$  est dans un voisinage conique de  $(x^0, \zeta^0)$  on aura  $WF(\mathcal{E}(0, x', D'))$  dans le même voisinage conique. Pour cela on utilise le fait que les symboles de  $\mathcal{E}$  sont déterminés par les équations du transport le long du champ Hamiltonien de  $\zeta_0$ . Donc nous avons

$$(14) \quad M\mathcal{E}g_{x_0=0} = M(0, x', D') \mathcal{E}(0, x', D') g \in C^\infty$$

si  $WF(\mathcal{E}(t, x', D'))$  est suffisamment petit.

De telle manière on prouve que

$$(15) \quad P(M\delta) \equiv 0, (M\delta)(0, x', D') \equiv 0.$$

On va profiter de nouveau de la condition microlocale  $L_{(x, \zeta)}$  qui est satisfaite pour  $P$  si la fonction phase  $\varphi$  est  $\langle x', \zeta' \rangle$  et  $(x, \zeta)$  appartient à un voisinage conique de  $(x^0, \zeta^0)$ . Si  $t$  est assez petit et  $(x', \zeta')$  est dans un voisinage conique petit de  $(x'^0, \zeta'^0)$  on trouve que les symboles de l'opérateur  $(M\delta)$  sont déterminés par des équations de transport. On renvoie pour les détails à [4, § 5, 6]. D'après (15) les conditions initiales pour ces équations du transport seront égales à 0 et donc les symboles de  $(M\delta)$  seront 0 pour  $t$  suffisamment petit et  $(x', \zeta')$  dans un voisinage conique de  $(x'^0, \zeta'^0)$ .

Finalement on obtient que

$$(x'^0, \zeta'^0) \notin WF((M\delta)(t, x', D')).$$

On a en outre

$$M(t, x', D') = M(t, x', D') \mathcal{E}(t, x', D') - M(t, x', D') (\mathcal{E}(t, x', D') - I)$$

et cela implique que  $(x'^0, \zeta'^0) \notin WF(M(t, x', D'))$  donc  $(t, x'^0, \zeta_0, \zeta'^0) \notin WF(M)$  pour  $t$  assez petit. De telle manière la démonstration du théorème 1 est complète.

Théorème 1 a une analogie dans les espaces de Sobolev  $H_{(s)}(X)$ . En utilisant le fait que les opérateurs  $G(x, D')$ ,  $H(x, D')$  déterminés au théorème 2 appartiennent à  $L^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$  on trouve après des modifications évidentes le résultat suivant.

**Théorème 3.** Soit  $P$  un opérateur qui vérifie les conditions (H) et (L). Soit  $u \in \mathcal{D}'(X)$  une distribution vectorielle,  $Pu = f$ . Alors pour tout  $s \in \mathbf{R}$  nous avons

$$WF_{s-x_j}(u) \setminus WF_s(f) \subset (\det p)^{-1}(0)$$

et sur  $q_j^{-1}(0)$  l'ensemble  $WF_{s-x_j}(u) \setminus WF_s(f)$  est invariant par le flot bicaractéristique associé au champ Hamiltonien de  $q_j(x, \zeta)$ .

Enfin on peut démontrer un résultat de résolubilité locale en utilisant le théorème 3 et les raisonnements de [2].

**Théorème 4.** Soit  $P$  un opérateur qui vérifie les hypothèses du théorème 3,  $x_0 \in X$ . Alors il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $x_0$  dans lequel l'équation  $Pu = f$  est résoluble. En plus, pour  $f$  donnée dans  $H_{(s)}(V)$  il existe une solution  $u$  dans  $H_{(s-x)}(V)$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

1. J. Chazarain. Propagation des singularités pour une classe d'opérateurs à caractéristiques multiples et résolubilité locale. *Ann. Inst. Fourier*, **24**, 1974, No. 1, 203—223.
2. J. J. Duistermaat, L. Hörmander. Fourier integral operators, II. *Acta Math.*, **128**, 1972, No. 3/4, 183—269.
3. L. Hörmander. Fourier integral operators, I. *Acta Math.*, **127**, 1971, No. 1, 79—183.
4. В. М. Петков. Параметрикс задачи Коши для несимметризуемых гиперболических систем с характеристиками постоянной кратности. *Труды Моск. мат. о-ва*, 1977 (в печати).
5. V. M. Petkov, G. St. Popov. Propagation des singularités pour des systèmes hyperboliques non symétrisables. *Serdica*, **2**, 1976, No. 4, 283—294.

Centre for Research and Education  
in Mathematics and Mechanics

Reçu le 16. 7. 1976

1000 Sofia

P. O. Box 373