Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

PROPAGATION DES SINGULARITES POUR UNE CLASSE DES SYSTEMES HYPERBOLIQUES A CARACTERISTIQUES DE MULTIPLICITE VARIABLE

VESSELINE M. PETKOV

On se propose d'étudier une classe des systèmes hyperboliques ayant une variété caractéristique Σ qui microlocalement est présentée par deux équations $q_1(x, \xi)=0$, $q_2(x, \xi)=0$ où $\{q_1, q_2\}\neq 0$. On prouve un résultat de propagation des singularités qui est analogue aux résultats obtenus par Ivrij (1976) et Melrose (1975) pour des équations hyperboliques.

Introduction. Le problème de propagation des singularités pour des équations et systèmes hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante est lié avec l'invariance du front d'onde de solution par le flot bicaractéristique, associé au champ Hamiltonien du symbole principal ou aux champs Hamiltoniens des facteurs du symbole principal [4; 1; 7]. Si l'opérateur P a des caractéristiques de multiplicité variable les phénomènes sont beaucoup plus différents. Les difficultés qui apparaissent correspondent à la géometrie très compliquée de la variété Σ sur laquelle le symbole principal a des points stationnaires. Récemment V. Ivrij [5] et R. Melrose [6] ont traité indépendamment la propagation des singularités pour des équations hyperboliques dans le cas quand microlocalement la variété Σ est présentée par deux équations $q_1(x, \xi)=0$, $q_2(x, \xi)=0$, où dq_1, dq_2 sont linéairement indépendants et $\{q_1, q_2\}\neq 0$. ($\{a, b\}$ désigne le crochet de Poisson des fonctions a, b).

Dans ce travail on se propose de prouver un résultat analogue pour une classe des systèmes hyperboliques à caractéristiques de multiplicité variable en supposant que la variété Σ qui correspond au symbole $\det p(x, \xi)$ a la structure expliquée ci-dessus.

Soit X' une variété, paracompacte C^∞ de dimension n, $X=\mathbf{R}\times X'$ la variété produit. On note avec $x=(x_0, x')=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ le point générique de X. Soit

$$P=ID_0+P_1(x, D')+P_0(x, D),$$

où I est $(d\times d)$ matrice d'identité, $D_0=-i\,\partial/\partial x_0$, $P_1(x, D')\in L^1(X')$, $P_0(x, D)\in L^0(X)$ sont des opérateurs pseudo-différentiels proprement supportés avec symboles matrices $(d\times d)$. En plus le symbole de P_1 dépend d'une manière C^∞ de la coordonnée x_0. On suppose que dans chaque carte de $T^*(X)$ avec coordonnées locales (x, ξ), $\xi=(\xi_0, \xi^1)=(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ les symboles $P_1(x, \xi')$, $P_0(x\xi)$ admettent un dévoloppement asymptotique au sens de [4]

$$P_1(x, \xi')\sim\sum_{j=-1}^{\infty}P'_{-j}(x, \xi'),\ P_0(x, \xi)\sim\sum_{j=0}^{\infty}P_{-j}(x, \xi),$$

SERDICA Bulgaricae mathematicae publicationes. Vol. 3, 1977, p. 189—197

où les symboles $P'_{j-}(x, \xi')$, $P_{-j}(x, \xi)$ sont homogènes de degré $(-j)$ par rapport à ξ' et ξ respectivement.

Soit $p(x, \xi)$ le symbole principal de P, $z^0=(x^0, \xi^0)\in T^*(X)\setminus 0$. On introduit l'hypothèse suivante:

(H) Pour $(x_0, x', \xi')\in \mathbf{R}\times(T^*(X')\setminus 0)$ les racines $\lambda_j(x, \xi')$ de l'équation $\det p(x, \xi_0, \xi')=0$ par rapport à ξ_0 sont réelles. On note $q_j(x, \xi)=\xi_0-\lambda_j(x, \xi')$ et on suppose qu'il existe un voisinage conique Γ de z^0 dans lequel

$$\det p(x, \xi)=(q_1(x, \xi))^{r-1}q_2(x, \xi)\prod_{k=3}^{d-r} q_k(x, \xi),$$

où $q_j(x, \xi)\neq q_k(x, \xi)$ pour $j=1, 2, k=3, \ldots, d-r$. En plus $q_1(z^0)=q_2(z^0)=0$, $q_j(x, \xi)\in C^\infty(\Gamma)$ si $j=1, 2$.

On considère l'ensemble Σ, où nous avons $q_1(x, \xi)=q_2(x, \xi)=0$ et on pose l'hypothèse de transversalité:

(T) $\{q_1, q_2\}(z^0)\neq 0.$

Soit H_{q_j} les champs Hamiltoniens, associés aux symboles $q_j(x, \xi)$, $j=1, 2$. On note par $\gamma_j(s)$, $s\in J\subset \mathbf{R}$ les bicaractéristiques pour lesquelles

$$\frac{d\gamma_j(s)}{ds}=H_{q_j}(\gamma_j(s)),\ \gamma_j(0)=z^0,\quad j=1, 2. \tag{1}$$

Evidemment $\gamma_1(s)$ coupe transversalement la variété $q_2(x, \xi)=0$ au point z^0 grâce à la condition $\{q_1, q_2\}(z^0)=(H_{q_1}q_2)(z^0)\neq 0$. Donc si J est assez petit on aura $q_i^{-1}(0)\cap\gamma_j(s)=\{z^0\}$, $i\neq j$, $i, j=1, 2$ ce que nous supposons dans la suite. On désigne par $\gamma_j^{\pm}(s)$, $j=1, 2$ les deux démi-bicaractéristiques pour lesquelles on a $s\gtrless 0$. Enfin on pose l'hypothèse suivante:

(D) En chaque point $(x, \xi)\in\Gamma$ la matrice $p(x, \xi)$ est diagonisable.

Alors on peut énoncer notre résultat principal:

Théorème 1. *Soit P un opérateur que vérifie les hypothèses* (H), (T), (D), *Γ un voisinage conique de z^0. Soit $u\in D'(X)$, $Pu=f$, $WF(f)\cap\Gamma=\varnothing$. Si nous avons $WF(u)\cap\Gamma\cap\gamma_j^-(s)=\varnothing$ $(WF(u)\cap\Gamma\cap\gamma_j^+(s)=\varnothing)$, $j=1, 2$ et si Γ est assez petit on a $z^0\notin WF(u)$ et*

$$WF(u)\cap\Gamma\cap\gamma_j^+(s)=\varnothing\ (WF(u)\cap\Gamma\cap\gamma_j^-(s)=\varnothing),\ j=1, 2.$$

Le résultat du théorème 1 a été prouvé par Ivrij [5] et Melrose [6] pour des opérateurs scalaires dans la forme $P=Q_1Q_2+B$, où Q_1, Q_2 sont strictement hyperboliques et leurs symboles principaux $q_1(x, \xi)$, $q_2(x, \xi)$ vérifient l'hypothèse (T). En effet Melrose [6] a supposé que $\operatorname{ord} B=\operatorname{ord} P-2$ et Ivrij [5] a traité le cas général $\operatorname{ord} B=\operatorname{ord} P-1$. En plus les résultats de Ivrij sont beaucoup plus complets et contiennent une information précise pour la cas quand $z^0\in WF(u)$, $WF(u)\cap\Gamma\cap\gamma_1^+(s)=\varnothing$ $(WF(u)\cap\Gamma\cap\gamma_2^+(s)=\varnothing)$. Cet auteur prouve que cette situation n'apparaît que si la distribution u a une forme très speciale. On renvoi pour les détails à [5].

Dans notre travail on fait une réduction microlocale et le but final est d'obtenir une forme microlocale assez simple. Alors le problème se ramène au cas d'un équation de deuxième ordre qui a la forme traitée en [5; 6]. Au § 1 on obtient une forme microlocale du symbole principal et au § 2 on fait une réduction des symboles d'ordre inférieur. Ici on applique une technique assez proche de la technique de Taylor [8], utilisée afin de découper en blocs les symboles d'ordre inférieur.

Rémarquons enfin qu'on peut appliquer notre résultat aux linéarisés Lindquist équations de la magnétohydrodynamique dans le cas où la vitesse de Alfén coïncide avec la vitesse du son. La description de ces équations et le calcul des caractéristiques sont donnés en [3, § 6]. Le propagation des singularités correspond aux phénomènes qui apparaissent à la construction de la solution formale.

1. Réduction du symbole principal. D'après l'hypothèse (H) on sait que $q_j(x, \xi) \neq q_k(x, \xi)$ pour $j=1, 2$, $k=3, \dots, d-r$ si (x, ξ) appartient au voisinage conique Γ de (x^0, ξ^0). Alors en utilisant des projecteurs sur les espaces spectrales de q_j et q_k on trouve un symbole $G(x, \xi)$, inversible et homogène de degré 0 par rapport à ξ en Γ tel qu'on a

$$G(x, \xi)\, p(x, \xi) G^{-1}(x, \xi) = \left(\begin{array}{c|c} Q_1(x, \xi) & \\ \hline & Q_2(x, \xi) \end{array}\right), \tag{2}$$

où les valeurs propres de $(r \times r)$ matrice $Q_1(x, \xi)$ sont $q_1(x, \xi)$, $q_2(x, \xi)$ et les valeurs propres de $(d-r) \times (d-r)$ matrice $Q_2(x, \xi)$ sont $q_k(x, \xi)$, $k \geq 3$. On prolonge des symboles $G(x, \xi)$, $G^{-1}(x, \xi)$ et on trouve deux opérateurs $G(x, D)$, $H(x, D) \in L^0(X)$ proprement supportés avec symboles principaux $G(x, \xi)$ et $G^{-1}(x, \xi)$ en Γ. On pose $v_1 = G(x, 0)\, u$ et on obtient que le symbole principal de l'opérateur $P_1 = GPH$ a microlocalement la forme (2) et en plus $(x^0, \xi^0) \notin WF(P_1 v_1)$.

Une autre réduction permettra de découper en deux blocs les termes d'ordre inférieur de P_1. Pour cela on utilise le fait que les valeurs propres des matrices Q_1 et Q_2 sont distinctes si $(x, \xi) \in \Gamma$ et d'après une construction de M. Taylor [8, § 2] il existe un opérateur $K \in L^{-1}(X)$ tel que le symbole total de l'opérateur $P_2 = (I+K)P_1(I+K)^{-1}$ est formé par deux blocs de dimension $(r \times r)$ et $(d-r) \times (d-r)$. (Ici par $(I+K)^{-1}$ on note une parametrix pour l'opérateur elliptique $(I+K)$). Après la substitution $v_2 = (I+K)\, u$ on se ramène au cas quand $(x^0, \xi^0) \notin WF(P_2 v_2)$ et

$$P_2(x, D) = \left(\begin{array}{c|c} P_3(x, D) & \\ \hline & P_4(x, D) \end{array}\right).$$

D'autre part au voisinage conique de (x^0, ξ^0) nous avons $q_k(x, \xi) \neq 0$ pour $k \geq 3$ donc l'opérateur $P_4(x, D)$ est microlocalement elliptique. Si $u = (U_1, U_2)$, où $U_1 = (u_1, \dots, u_r)$, $U_2 = (u_{r+1}, \dots, u_d)$ on obtient que $(x^0, \xi^0) \notin WF(P_4 U_2)$, donc $(x^0, \xi^0) \notin WF(U_2)$ grâce à l'existence d'une parametrix microlocale de P_4. Il en résulte qu'on peut se débarasser du opérateur $P_4(x, D)$ et on va supposer dans la suite que $d=r$ et que les valeurs propres de $p(x, \xi)$ sont $q_1(x, \xi)$ et $q_2(x, \xi)$.

On se propose maintenant à l'aide d'une transformation canonique de simplifier la variété Σ sur laquelle nous avons $q_1 = 0$, $q_2 = 0$. Tout d'abord on trouve une transformation canonique homogène χ_1 d'un voisinage conique de (x^0, ξ^0) sur un voisinage conique de $(y^0, \eta^0) \in T^*(\mathbf{R}^{n+1}) \setminus 0$ telle que $q_1(\chi_1^{-1}(y, \eta)) = \eta_0$). Pour cela on peut employer la fonction génératrice

$$\Phi(x, \eta) = \varphi(x, \eta') + x_0\eta_0,$$

où

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} = \lambda_1(x, d_x, \varphi), \quad \varphi\Big|_{x_0=0} = \sum_{j=1}^{n} xn'_j$$

et présenter χ_1 avec l'application

$$T^*(X) \in (x, d_x\Phi) \to (d_\eta\Phi, \eta) \in T^*(\mathbf{R}^{n+1}).$$

Par conséquence on obtient que

$$q_2(\chi_1^{-1}(y, \eta)) = \eta_0 + a(y, \eta')$$

avec $a(y, \eta')$, homogène de degré 1 par rapport à η'. Alors l'hypothèse (T) implique que $\{\eta_0, a(y, \eta')\} = \partial a/\partial y_0 \neq 0$ au voisinage conique de (y^0, η^0). On utilise le théorème des fonctions implicites et on trouve une fonction $Y_0(y', \eta')$ homogène de degré 0 en η' telle que

$$a(Y_0(y', \eta'), y', \eta') = 0.$$

Donc au voisinage conique de (y^0, η^0) nous avons $a(y, \eta') = (y_0 - Y_0(y', \eta'))\, \beta(y, \eta)$ avec $\beta(y, \eta') \neq 0$. De telle manière on obtient l'égalité $\{\eta_0, y_0 - Y_0(y_0, \eta')\} = 1$ et d'après une construction standard [2, §6.1] on peut compléter les fonctions $\zeta_0 = \eta_0$, $z_0 = y_0 - Y_0$ par des fonctions $\zeta_j(y, \eta)$, $z_j(y, \eta)$, $j = 1, \ldots, n$, homogènes respectivement de degré 1 et 0 par rapport à η et telles que

$$\{\zeta_i, z_j\} = \delta_{i,j}, \quad \{\zeta_i, \zeta_j\} = 0, \quad \{z_i, z_j\} = 0.$$

Donc il existe une transformation canonique homogène χ_2 d'un voisinage conique de (y^0, η^0) sur un voisinage conigue de (z^0, ζ^0) telle que

$$(\zeta_0) \circ \chi_2 = \eta_0, \quad (z_0) \circ \chi_2 = y_0 - Y_0(y', \eta').$$

On pose $\chi = \chi_2 \circ \chi_1$ et d'une manière standard [2] on peut associer avec le graphe K de χ deux opérateurs intégraux de Fourier A, B, proprement supportés, scalaires et tels que

$$A \in I^0(\mathbf{R}^{n+1}, X;\ K'), \quad B \in I^0(X, \mathbf{R}^{n+1};\ (K^{-1})'),$$
$$(x^0, \xi^0) \notin WF(I_X - BA), \quad (z^0, \xi^0) \notin WF(I_{\mathbf{R}^{n+1}} - AB).$$

Le symbole principal du opérateur APB sera $\tilde{p}(z, \zeta) = p(\chi^{-1}(z, \zeta))$ et il en résulte que les valeurs propres de $\tilde{p}(z, \zeta)$ au voisinage conique de (z^0, ζ^0) seront ζ_0 et $\zeta_0 + z_0\theta(z, \zeta)$, $\theta(z, \zeta) \neq 0$. Dans la suite on va noter par (x, ξ) les coordonnées en $T^*(\mathbf{R}^{n+1})$ et on va supposer que les valeurs du symbole principal $p(x, \xi)$ du opérateur P au voisinage conique Γ de (x^0, ξ^0) sont ξ_0 et $\xi_0 + x_0\theta$.

On rappelle que d'après l'hypothèse (D) la matrice $p(x, \xi)$ est diagonisable si $(x, \xi) \in \Gamma$. En plus en Γ les valeurs propres de $p(0, x', \xi) - \xi_0 I$ sont 0 et on en déduit que $p(x, \xi) - \xi_0 I = x_0 p'(x, \xi)$. Evidemment on peut diagonaliser uniformement en Γ la matrice $p'(x, \xi)$ avec des valeurs propres 0 et $\theta(x, \xi) \neq 0$. Donc il existe un symbole $g(x, \xi)$, inversible en Γ, homogène de degré 0 par rapport à ξ et tel que

$$g(x, \xi)\,p\,(x, \xi)g^{-1}(x, \xi)=\xi_0 I+x_0 g(x, \xi)p'(x, \xi)g^{-1}(x, \xi) \tag{3}$$

$$=\begin{pmatrix} \xi_0 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \xi_0 & \\ & & & & \xi_0+x_0\,\theta \end{pmatrix}.$$

Comme ci-dessus on prolonge des symboles $g(x, \xi)$, $g^{-1}(x, \xi)$ et après une réduction on se ramène au cas où le symbole principal $p(x, \xi)$ de P a la forme (3). En plus nous allons supposer que $p(x, \xi)$ a la forme (3) pour $(x, \xi)\in T^*(\mathbf{R}^{n+1})$ parce que cela ne change pas le problème.

2. Réduction des termes d'ordre inférieur. On se propose de simplifier les symboles d'ordre inférieur et de se ramener au cas quand ces symboles sont des $(r\times r)$ matrices dans la forme

$$a(x', \xi)=\left(\begin{array}{ccc|c} & & & a_{1,r} \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & \cdot \\ & & & a_{r-1,r} \\ \hline a_{r,1} & \cdots & a_{r-1,r} & 0 \end{array}\right), \tag{4}$$

où les places vides désignent des éléments 0 et en plus les symboles $a_{j,r}(x', \xi)$, $a_{r,j}(x', \xi)$, $j=1,\ldots, r-1$ ne dépendent pas de x_0. Soit

$$P(x, \xi)\sim p(x, \xi)+\sum_0^\infty B_{-j}(x, \xi)$$

le développement asymptotique du symbole total $P(x, \xi)$ avec $B_{-j}(x, \xi)$, homogènes de degré $(-j)$ par rapport à ξ. Il est clair qu'il suffit de simplifier les symboles B_{-j} au voisinage conique Γ_1 de (x^0, ξ^0).

Tout d'abord nous allons simplifier en deux pas le symbole $B_0(x, \xi)$. Au premier pas on cherche un opérateur $H_0(x, D)\in L^0(\mathbf{R}^{n+1})$ avec symbole $H_0(x, \xi)$, homogène de degré 0 en ξ et inversible en Γ qui vérifie

$$(p+B_0+\cdots)\,H_0\equiv H_0(p+B_0'+\cdots)\bmod L^{-1}$$

(On note brièvement $L^{-m}(\mathbf{R}^{n+1})$ par L^{-m}). Après un calcul au niveau des symboles on obtient $-i\{p, H_0\}+B_0H_0=H_0B_0'$ et par conséquence en Γ_1

$$B_0'=H_0^{-1}(-i\{p, H_0\}+B_0H_0).$$

Soit

$$H_0(x, \xi)=\left(\begin{array}{c|c} \overline{H}_0(x, \xi) & \\ \hline & h_0(x, \xi) \end{array}\right),\quad B_0(x, \xi)=\left(\begin{array}{c|c} & * \\ & \cdot \\ \overline{B}_0(x, \xi) & \cdot \\ & \cdot \\ & * \\ \hline * \cdots * & b_0(x, \xi) \end{array}\right) \tag{6}$$

où $\bar{H}_0(x, \xi)$, $\bar{B}(x, \xi)$ sont $(r-1)\times(r-1)$ matrices et on va noter par $*$ des symboles scalaires. Il sufit de déterminer H_0 de telle manière que

$$-i\{p, H_0\}+B_0H_0=\left(\begin{array}{c|c} & * \\ & \vdots \\ & * \\ \hline * \cdots * & 0\end{array}\right).$$

Cela nous amène aux équations

$$-i\frac{\partial \bar{H}_0}{\partial x_0}+\bar{B}_0\bar{H}_0=0, \tag{7}$$

$$-i\{\xi_0+x_0\theta, h_0\}+b_0h_0= \tag{8}$$

$$\frac{1}{i}\left[\frac{\partial h_0}{\partial x_0}-\theta\frac{\partial h_0}{\partial \xi_0}+x_0\sum_0^n\left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi_j}\frac{\partial h_0}{\partial x_j}-\frac{\partial \theta}{\partial x_j}\frac{\partial h_0}{\partial \xi_j}\right)\right]+b_0h_0=0.$$

On pose des conditions initiales

$$\bar{H}_0(0, x', \xi)=I, \quad h_0(0, x', \xi)=1 \tag{9}$$

et il revient de résoudre pour x_0 assez petit deux problèmes de Cauchy pour $\bar{H}_0$ et h_0. Les solutions $\bar{H}_0(x, \xi)$ et $h_0(x, \xi)$ seront homogènes par rapport à ξ parce que les coefficients en (7), (8) et les conditions initiales sont homogènes en ξ.

Au deuxième pas on cherche un opérateur $K_{-1}\in L^{-1}$ avec symbole $K_{-1}(x, \xi)$, homogène de degré (-1) en Γ_1 tel que

$$(p(x, D)+B_0'(x, D)+\cdots)(I+K_{-1})\equiv(I+K_{-1})(p(x, D)+B_0''(x', D)+\cdots) \bmod L^{-1}.$$

On suppose que $K_{-1}(x, \xi)$ a la forme

$$K_{-1}=\left(\begin{array}{c|c} & k_{1,r}^{(-1)} \\ & \vdots \\ & k_{r-1,r}^{(-1)} \\ \hline k_{r,1}^{(-1)} \cdots k_{r,r-1}^{(-1)} & 0\end{array}\right). \tag{10}$$

On a évidemment $pK_{-1}=K_{-1}p$ et on obtient au niveau des symboles l'égalité

$$pK_{-1}-K_{-1}p+B_0'=B_0''. \tag{11}$$

Soit $B_0'=\{b_{i,j}'\}_{i,j=1}^r$, $B_0''=\{b_{i,j}''\}_{i,j=1}^r$. Alors (11) implique les équations

$$-x_0\theta k_{i,j}^{(-1)}+b_{i,j}'=b_{i,j}'', \quad i, j=1,\ldots, r \tag{12}$$

que sont triviales si $i, j=1,\ldots, r-1$ ou $i=j=r$.

On développe des symboles $b_{i,j}'(x, \xi)$ en série de Taylor

$$b'_{i,j}=b_{i,j}(0, x', \xi)+x_0\int_0^1 \frac{\partial b'_{i,j}}{\partial x_0}(tx_0, x', \xi)dt$$

et on pose

$$k^{(-1)}_{i,j}(x, \xi)=\theta^{-1}(x, \xi)\int_0^1 \frac{\partial b'_{i,j}}{\partial x_0}(tx_0, x', \xi)dt.$$

Il en résulte que $b''_{i,j}(x', \xi)=b'_{i,j}(0, x', \xi)$, c'est-à-dire $B''_0(x', \xi)$ a la forme (4).

Supposons maintenant que les symboles $B_{-j}(x', \xi)$, $j\leq m-1$ sont déjà dans la forme (4). On va déterminer un opérateur $H_{-m}(x, D)\in L^{-m}$ avec symbole $H_{-m}(x, \xi)$, homogène de degré $(-m)$ en Γ_1 tel que

$$(p(x, D)+\sum_1^{m-1} B_{-j}(x', D)+B_{-m}(x, D))(I+H_{-m})$$

$$\equiv(I+H_{-m})(p(x, D)+\sum_1^{m-1} B_{-j}(x', D)+B'_{-m}(x, D)) \bmod L^{-(m+1)}.$$

On cherche $H_{-m}(x, \xi)$ dans la forme (6) de $H_0(x, \xi)$ avec $\bar{H}_{-m}$ et h_m aux places de $\bar{H}_0$ et h_0. Pour le symbole H_{-m} on obtient l'équation

$$-i\{p, H_{-m}\}+B_0H_{-m}-H_{-m}B_0+B_{-m}=B'_{-m}. \tag{13}$$

Donc il suffit d'arranger l'égalité

$$-i\{p, H_{-m}\}+B_{-m}=\left(\begin{array}{c|c} & * \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & * \\ \hline * \cdots * & 0 \end{array}\right) \tag{14}$$

parce que la matrice $B_0H_{-m}-H_{-m}B_0$ a la forme (14). Si B_{-m} a la forme (6) de B_0 avec $\bar{B}_{-m}$, b_{-m} aux places de $\bar{B}_0$, b_0 on trouve des équations

$$-i\frac{\partial \bar{H}_{-m}}{\partial x_0}+\bar{B}_{-m}=0, \tag{15}$$

$$-i\{\xi_0+x_0\theta, h_m\}+b_{-m}=0. \tag{16}$$

On résout (15) et (16) avec donneés initiales 0 et cela achève le premier pas de réduction de B_{-m}.

Au deuxième pas on cherche $K_{-(m+1)}\in L^{-(m+1)}$ avec symbole $K_{-(m+1)}(x, \xi)$, homogène de degré $(-(m+1))$ en ξ. On suppose que $K_{-(m+1)}$ a la forme (10) et on arrange l'égalité

$$(p(x, D)+\sum_0^{m-1} B_{-j}(x', D)+B'_{-m}(x, D))(I+K_{-(m+1)})$$

$$=(I+K_{-(m+1)})\,(p(x,\,D)+\sum_{0}^{m-1}B_{-j}(x',\,D)+B''_{-m}(x',\,D))\bmod L^{-(m+1)}.$$

D'une manière analogue on trouve l'équation

$$pK_{-(m+1)}-K_{-(m+1)}p+B'_{-m}=B''_{-m}$$

et on détermine les éléments de $K_{-(m+1)}$ comme ci-dessus.

On note par H_0^{-1}, $(I+H_{-m})^{-1}$, $(I+K_{-(m+1)})^{-1}$ microlocales des paramétrices pour H_0, $(I+H_{-m})$, $(I+K_{-(m+1)})$ et on considère des opérateurs K, $K^{-1}\in L^0$ pour lesquels nous avons au sens asymptotique

$$K\sim H_0\,(I+K_{-1})\,(I+H_{-1})\,(I+K_{-2})\ldots,$$

$$K^{-1}\sim\cdots(I+K_{-2})^{-1}(I+H_{-1})^{-1}(I+K_{-1})^{-1}H_0^{-1}.$$

On pose $v=K^{-u}$ et on obtient que $(x^0,\,\xi^0)\notin WF(P^v)$, où

$$P'=\begin{pmatrix} D_0 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & D_0 \\ & & & & D_0+x_0\theta \end{pmatrix}+\left(\begin{array}{c|c} & B_{1r,}(x',\,D) \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & B_{r-1,r}(x',\,D) \\ \hline B_{r,1}(x',\,D)\ldots B_{r-1,r}(x',\,D) & 0 \end{array}\right).$$

Soit $v=(v_1\,\ldots,\,v_r)$, $f=P'v=(f,\ldots,\,f_r)$. On écrit le dernière équation du système $P'v=f$ à la forme.

$$(D_0+x_0\theta(x,\,D))v_r+\sum_{1}^{r-1}B_{r,j}\,(x',\,D)v_j=f_r. \tag{17}$$

On applique D_0 à (17) et on trouve que

$$D_0(D_0+x_0\theta(x,D))v_r+\sum_{1}^{r-1}B_{r,j}(x',\,D)D_0v_j=D_0f_r. \tag{18}$$

D'autre part les premiers $(r-1)$ équations du système $P'v=f$ donnent

$$D_0v_j=-B_{j,r}(x',\,D)v_r+f_j,\quad j=1,\ldots,\,r-1. \tag{19}$$

On pose les expressions pour D_0v_j en (18) et on obtient finalement pour v_r l'équation suivante

$$D_0(D_0+x_0\theta(x,\,D))v_r-\sum_{1}^{r-1}B_{r,j}(x',\,D)B_{j,r}(x',\,D)v_r=g,$$

où $(x^0,\,\xi^0)\notin WF(g)$.

Si nous avons $(x^0,\,\xi^0)\notin WF(v_r)$ les équations (19) impliquent $(x^0,\,\xi^0)\notin WF(D_0v_j)$, $j=1,\ldots,\,r-1$ et le résultat du théorème 1 est une conséquence du théorème de propagation des singularités pour les opérateurs strictement hyperboliques D_0 et $D_0+x_0\theta(x,\,D)$. D'autre part on sait que

$$\gamma_j^-(s)\cap WF(v_r)\cap\Gamma_1=\varnothing(\gamma_j^+(s)\cap WF(v_r)\cap\Gamma_1=\varnothing),\ j=1,\,2,$$

où $\gamma_j^{\pm}(s)$, $j=1, 2$ sont les deux démibicaractéristiques qui correspondent aux symboles ξ_0 et $\xi_0+x_0\theta$. Donc on peut appliquer le résultat de Ivrij [5] et Melrose [6] concernant l'opérateur

$$D_0(D_0+x_0\theta(x, D))-\sum_1^{r-1} B_{r,j}B_{j,r}$$

et obtenir que $(x^0, \xi^0)\notin WF(v_r)$. Cela achève la démonstration du théorème 1.

Note. Récemment V. Jvrij [9] a prouvé un résultat qui généralise le théorème 1.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Chazarain. Propagation des singularités pour une classe d'opérateurs à caractéristiques multiples et résolubilité locale, *Ann. Inst. Fourier*, **24**, 1974, No. 1, 203—223.
2. J. J. Duistermaat, L. Hörmander. Fourier integral operators, II. *Acta Math.*, **128**, No. 3—4, 183—269.
3. A. K. Gautesen, D. Ludwig. Tangential characteristics and coupling of waves. *J. Math. Anal. Appl.*, **38**, 1972, No. 2, 430—446.
4. L. Hörmander. On the existence and the regularity of solutions of linear pseudo-differential equations. *Enseignement Math.*, **2**, 1971, No. 17, 99—163.
5. В. Я. Иврий. Волновые фронты решений некоторых микролокально гиперболических псевдодифференциальных уравнений. *Доклады АН СССР*, 226, 1976, № 5, 1009—1011.
6. R. Melrose. Normal self-intersections of the characteristic variety. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **81**, 1975, No. 5, 939—940.
7. V. M. Petkov. Propagation des singularités pour des systèmes hyperboliques non symétrisables avec caractéristiques de multiplicité constante. *Serdica*, **3**, 1977 № 2, 152—158.
8. M. Taylor. Reflection of singularities of solutions to systems of differential equations *Comm. Pure Appl. Math.*, **28**, 1975, No. 5, 457—478.
9. В. Я. Иврий. Волновые фронты решений симметрических псевдодифференциальных систем. *Доклады АН СССР*, **233**, 1977, № 6, 1035—1038.

Centre for Research and Education
in Mathematics and Mechanics
1000 Sofia P.O. Box 373

Received 13. 9. 1976