Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.
Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
and its new series Serdica Mathematical Journal
visit the website of the journal http://www.math.bas.bg/~serdica
or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

ГОРЕНШТЕЙНОВЫ МОДУЛИ КОЛЬЦА ИНВАРИАНТОВ

В. А. ХИНИЧ

Пусть на локальном кольце Коэна—Мэколея A действует конечная группа автоморфизмов G и B — подкольцо инвариантных элементов. В работе изучается вопрос существования горенштейновых модулей над A и B.

1. Лемма об R-модульных структурах. Пусть A — коммутативное кольцо с группой автоморфизмов G, $R=A*G$ — скрученное групповое кольцо, то есть свободный A-модуль $\bigotimes_{g\in G}A.g$ с умножением, задаваемым соотношениями $ag.bh=ag(b).gh$, $a,b\in A$; $g,h\in G$. Пусть далее M — левый R-модуль, $\Lambda=\mathrm{End}_A(M)$ — A-алгебра эндоморфизмов M; на A-алгебре Λ естественным образом действует группа G.

Лемма. *Существует взаимно-однозначное соответствие между R-модульными структурами A-модуля M и скрещенными гомоморфизмами $G\to\Lambda^*$ группы G в группу обратимых элементов кольца Λ. При этом первоначальной структуре R-модуля соответствует тривиальный гомоморфизм и два гомоморфизма задают изоморфные R-модули тогда и только тогда, когда им соответствует один и тот же элемент в $H^1(G,\Lambda^*)$.*

Доказательство. Пусть первоначальное действие G на M задается гомоморфизмом $\alpha:R\otimes M\to M$. Тогда соответствие устанавливается следующим образом:

а) для $\beta:R\otimes M\to M$ построим $\hat\beta:G\to\Lambda^*$,

$$\hat\beta(g)x=\beta(1\otimes\alpha)(g\otimes g^{-1}\otimes x),\ \text{где}\ \beta(1\otimes\alpha):R\otimes R\otimes M\to M.$$

б) если задан скрещенный гомоморфизм $\hat\beta:G\to\Lambda^*$, положим $\beta(g\otimes x)=\hat\beta(g)\alpha(g\otimes x)$. Все необходимые свойства, а также взаимная обратность построенных отображений, проверяются элементарно.

Если, наконец, $\hat\beta$ и $\hat\gamma:G\to\Lambda^*$ задают изоморфные R-модульные структуры, то $\exists\,\lambda\in\Lambda^*:\beta(g\otimes\lambda x)=\lambda\gamma(g\otimes x)$, откуда $\hat\beta(g)\alpha(g\otimes\lambda x)=\lambda\hat\gamma(g)\alpha(g\otimes x)$, или, положив $y=\alpha(g\otimes x)$, $\hat\beta(g)\alpha(g\otimes\lambda\alpha(g^{-1}\otimes y))=\lambda\hat\gamma(g)y$. Осталось заметить, что $\alpha(g\otimes\lambda\alpha(g^{-1}\otimes y))$ есть просто $g(\lambda)y$, откуда $\hat\gamma(g)=\lambda^{-1}\hat\beta(g)g(\lambda)$. Лемма доказана.

2. Подъем горенштейновых модулей. Пусть группа G действует на локальном кольце Коэна—Мэколея $(A,\mathbf{m})$, $(|G|,\ \mathrm{char}(A/\mathbf{m}))=1$, $G_{A/\mathbf{m}}=\mathrm{id}$. Пусть далее $B=A^G$ — кольцо инвариантов, $\mathbf{n}=B\cap\mathbf{m}$, и ω — горенштейнов B-модуль ранга r. Мы построим горенштейнов A-модуль Ω ранга r, на котором действует группа G, причем так, что $\Omega^G=\omega$.

Хорошо известно, что морфизм $B \to A$ цел. Положим $C = B[gx_i]$, $g \in G$, $(x_i) = \mathbf{m} \subset A$. Это G-инвариантная B-подалгебра в A, конечная над B. Пусть $\mathbf{q} = (\mathbf{n}, gx_i) \subset C$. Покажем, что $\mathrm{Hom}_B(C_\mathbf{q}, \omega)$ — горенштейнов $C_\mathbf{q}$-модуль ранга r. Действительно, достаточно показать, что $\mathrm{Hom}_B(C_\mathbf{q}, \omega)^\wedge$ — горенштейнов $\widehat{C}_\mathbf{q}$-модуль [1]. Так как $C_\mathbf{q}$ цела над B, это пополнение совпадает с $\mathrm{Hom}_B(C_\mathbf{q}, \omega) \otimes \widehat{B} = \mathrm{Hom}_B(C_\mathbf{q}, \widehat{\omega}) = \mathrm{Hom}_{\widehat{B}}(\widehat{C}_\mathbf{q}, \widehat{\omega})$. Но ведь $\widehat{C}_\mathbf{q} = \widehat{C}$ — конечная алгебра над $\widehat{B}$. Далее все очевидно, так как формула известна для канонических модулей, а $\widehat{\omega}$ есть прямая сумма канонических над $\widehat{B}$. Далее, $\widehat{C}_\mathbf{q} = \widehat{A}$. Действительно, нужно доказать лишь, что $\forall a \in A \, \exists \{c_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, c_i \in \mathbf{q}^i$, такие, что $a - \Sigma_{i=0}^{n-1} c_i \in \mathbf{m}^n$. Это легко следует из того, что $B/\mathbf{n} \to A/\mathbf{m}$ — изоморфизм.

Таким образом, A-модуль $\Omega = \mathrm{Hom}_B(C_\mathbf{q}, \omega) \otimes_{C_\mathbf{q}} A$ — горенштейнов ранга r. Действие группы G на Ω вводится естественным образом.

В нульмерном случае формула $\Omega^G = \omega$ очевидна, так как $C = A$ и $\Omega = \mathrm{Hom}_B(A, \omega)$; Ω^G состоит из R-гомоморфизмов $A \to \omega$, то есть из тех, которые пропускаются через $\varrho: A \to B$, $\varrho(a) = |G|^{-1} \Sigma g(a)$. Общий случай сводится к нульмерному факторизацией по максимальной неподвижной регулярной последовательности.

Мы будем обозначать далее полученный таким образом модуль Ω через $\#(\omega)$.

3. Спуск горенштейновых модулей, 1. Пусть, как и выше, G действует на локальном кольце A Коэна—Мэколея, и пусть над A существует горенштейнов модуль Ω ранга r. Основная цель нашей работы — отыскать какие-либо горенштейновы модули над кольцом инвариантов.

Пусть на Ω задано действие группы G. Тогда G действует также и на модуле $H = H^d_\mathbf{m}(\Omega)$, $d = \dim A$, локальных когомологий [2, лемма 3], и, следовательно, на его цоколе $s\Omega = (0 : \mathbf{m})_H$. Цоколь $s\Omega$ изоморфен модулю k^r, $k = A/\mathbf{m}$, и, следовательно, действие на нем определяет гомоморфизм $\chi: G \to GL(r, k)$.

Лемма. *Ω^G — конечно порожденный B-модуль Коэна—Мэколея.*

Доказательство. Из изоморфизма $H^0_\mathbf{m}(M)^G \approx H^0_\mathbf{n}(M^G)$ и из точности функтора $M \to M^G$ [2, лемма 1] следует изоморфизм $H^i_\mathbf{m}(M)^G \approx H^i_\mathbf{n}(M^G)$. Следовательно, $H^i_\mathbf{m}(\Omega)^G = H^i_\mathbf{n}(\Omega^G) = 0$ для $i \neq d$. Конечная порожденность Ω^G над B следует из [2, лемма 5].

Предложение. *Если гомоморфизм χ тривиален, то Ω^G — горенштейнов B-модуль ранга r.*

Доказательство. Нам нужно доказать, что $H^G = H^d_\mathbf{n}(\Omega^G)$ — прямая сумма r копий модуля $E_B(k)$.

1. Инъективность.

$$\mathrm{Ext}^1_B(M, H^G) = \mathrm{Ext}^1_B(M, \mathrm{Hom}_R(A, H)) = \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Tor}^B_1(M, A), H),$$

ибо H инъективен над R [2, лемма 3]. Пусть f — элемент из правой части. Так как $s\Omega \subset H$ — существенное расширение, $\mathrm{Im}(f) \cap s\Omega \neq 0$, если $f \neq 0$. Это значит, что $\exists t: 0 \neq f(t) \in s\Omega$. Но тогда $f(\mathrm{tr}\,(t)) = \mathrm{tr}\, f(t) = |G| \,.\, f(t) \neq 0$, $\mathrm{tr} = \Sigma g \in R$, что противоречит очевидному факту $\mathrm{tr}\,(\mathrm{Tor}^B_1(M, A)) = 0$.

2. Сведя к случаю нулевой размерности факторизацией по неподвижной регулярной последовательности, легко видеть, что $s(\Omega^G) = (s\Omega)^G$. Следовательно ранг $s(\Omega^G)$ равен r.

Предложение доказано.

4. Спуск горенштейновых модулей, 2. Рассмотрим кольцо $\Lambda = \mathrm{End}_A(\Omega)$. Группа G естественно действует на Λ, и, следовательно, на $\bar{\Lambda} = \Lambda/\mathbf{m}\Lambda = M_r(k)$[3].

Лемма. *Отображение $\chi^{-1}: G \to \bar{\Lambda}^*$ является скрещенным гомоморфизмом.*

Действительно, если рассмотреть модуль $s\Omega$ вместе с индуцируемым на нем действием G, то отображение χ^{-1} соответствует тривиальному действию G на $s\Omega$ (см. лемму из п. 1).

Теорема. *В вышеописанной ситуации над B существует горенштейнов модуль ранга r тогда и только тогда, когда скрещенный гомоморфизм $\chi^{-1}: G \to \mathrm{GL}(r, k) = \bar{\Lambda}^*$ поднимается до скрещенного гомоморфизма $G \to \Lambda^*$.*

Доказательство. Тогда: поднятому гомоморфизму $G \to \Lambda^*$ соответствует некоторая структура G-модуля на Ω. Очевидно при этом на $s\Omega$ индуцируется тривиальное действие группы G — следовательно, можно воспользоваться предложением из п. 3.

Только тогда: пусть ω — горенштейнов B-модуль ранга r. Тогда $\#(\omega)$ — горенштейнов A-модуль ранга r, и, следовательно, изоморфен Ω. Легко заметить, что G тривиально действует на $s\#(\omega)$: можно опять считать, что $\dim A = 0$, и тогда

$$s\#(\omega) = \mathrm{Hom}_A(k, \#(\omega)) = \mathrm{Hom}_A(k, \mathrm{Hom}_B(A, \omega)) = \mathrm{Hom}_B(k, \omega) = s\omega$$

как R-модули. Осталось воспользоваться леммой из п. 1 — скрещенный гомоморфизм, соответствующий модулю $\#(\omega)$, и накрывает χ^{-1}.

Замечание. На самом деле корректней было бы говорить не о χ^{-1}, а об элементе из $H^1(G, \mathrm{GL}(r, k))$, им определяемом. Это же относится и к гомоморфизмам, накрывающим χ^{-1}.

Теорема доказана.

5. Следствия. К сожалению, обычно бывает непросто выяснить, поднимается ли элемент из $H^1(G, \mathrm{GL}(r, k))$. Однако этого можно избежать, увеличив ранг искомого горенштейнова модуля.

Следствие 1. *Пусть Ω — горенштейнов A-модуль ранга r, на котором действует группа G. Тогда над B существует горенштейнов модуль ранга $r|G|$.*

Доказательство. Положим $\breve{\Omega} = R \otimes \Omega$; действие G на $\breve{\Omega}$ определим с помощью гомоморфизма $\mu \otimes 1: R \otimes R \otimes \Omega \to R \otimes \Omega$, где μ — умножение в R.

Обозначение. ${}^g\Omega = Ag \otimes_A \Omega$.

Существуют изоморфизмы $i_g: {}^g\Omega \to \Omega$, $i_g(g \otimes \omega) = g(\omega)$. Следовательно, ${}^g\Omega$ — горенштейнов A-модуль ранга r; покажем, что гомоморфизм χ^{-1} в этом случае поднимается.

Имея в виду изоморфизмы i_g, отождествим $\hat{\Lambda} = \mathrm{End}_A(\breve{\Omega})$ с $M_{|G|}(\Lambda)$, $\Lambda = \mathrm{End}_A(\Omega)$.

Посмотрим, как при этом устроено действие G на $\breve{\Lambda}$. Пусть $\boldsymbol{\lambda} \in \breve{\Lambda}$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_{g,h})$; $\mathbf{x} \in \breve{\Omega}$, $\mathbf{x} = \Sigma g \otimes x_g$. Тогда $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{x} = \Sigma_{g,h} i_g^{-} \lambda_{g,h} i_h(h \otimes x_h)$, $t\mathbf{x} = \Sigma tg \otimes x_g$, $t \in G$. Следовательно, $t(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{x} = \Sigma_{g,h} t i_g^{-1} \lambda_{g,h} i_h(h \otimes x_{th}) = \Sigma_{g,h} i_g^{-1} t(\lambda_{t^{-1}g, t^{-1}h}) i_h(h \otimes x_h)$, ибо $i_h(h \otimes x_{th}) = h(x_{th}) = t^{-1} i_{th}(th \otimes x_{th})$, а $t i_g^{-1} \mathbf{x} = tg \otimes g^{-1}\mathbf{x} = i_{tg}^{-1}(t(\mathbf{x}))$. Таким образом, $t(\lambda)_{g,h} = t\lambda_{t^{-1}g, t^{-1}h}$. Далее, $\chi^{-1}(g) \in M_{|G|}(\Lambda)$ — это, очевидно, матрица, состоящая из нулей и единиц. Так как χ — скрещенный гомоморфизм, то, подняв все $\chi(g)$ до соответствующих матриц из нулей и единиц в $\breve{\Lambda}$, мы опять получим, очевидно, скрещенный гомоморфизм.

Следствие 2. *Пусть Ω — горенштейнов A-модуль ранга r. Тогда над B существует горенштейнов модуль ранга $r|G|^2$.*

Доказательство. Единственное, в чем нужно убедиться, — что $R \otimes \Omega$ — горенштейнов A-модуль ранга $r|G|$. Но $R \otimes \Omega = \bigoplus_g {}^g\Omega$; ${}^g\Omega$ получается из Ω отступлением вдоль гомоморфизма $g^{-1}: A \to A$, и, так как это изоморфизм, ${}^g\Omega$ — также горенштейнов A-модуль ранга r.

Следствие 3. *Если A имеет канонический модуль, а группа G нечетного порядка, то B также имеет канонический модуль.*

Действительно, B имеет горенштейнов модуль нечетного ранга $|G|^2$. Далее см. [3].

Следствие 4. *Если A гензелево и имеет канонический модуль, то B также имеет канонический модуль.*

Действительно, из [4, 18. 6. 8.] легко следует, что кольцо B также гензелево. Далее также см. [3].

6. Одно незначительное обобщение. Выше предполагалось, что группа G тривиально действует на поле вычетов кольца A. Это предположение несущественно: хорошо известно [5], что, если H — группа инерции идеала $\mathfrak{m}$, то A^H этально над A^G. Для A^H верны все высказанные выше утверждения; для того, чтобы отыскать горенштейновы модули над A^G, можно воспользоваться следующей леммой.

Лемма. *Пусть $R \to S$ — локальный этальный морфизм, Ω — горенштейнов S-модуль ранга r. Тогда он является также и горенштейновым R-модулем ранга $r(k(S):k(R))$.*

Доказателство. Если $X \to k(R) \to 0$ — R-проективная резольвента, то $X \otimes S \to k(S) \to 0$ — S-проективная резольвента. Следовательно,

$$\mathrm{Ext}_s^i(k(S), \Omega) = H^i(\mathrm{Hom}_S(X \otimes S, \Omega)) = H^i(\mathrm{Hom}_R(X, \Omega)) = \mathrm{Ext}_R^i(k, \Omega) \text{ равно}$$

$$\begin{array}{ll} 0, & \text{если } i \neq \dim S, \\ k(S)^r, & \text{если } i = \dim S. \end{array}$$

Таким образом, $\mathrm{Ext}_R^{\dim R}(k(R), \Omega) = k(R)^{r(k(s):k(r))}$, что и требовалось.

Кроме того, в случае, если $R = S^G$ и группа инерции максимального идеала тривиальна, $k(R) = k(S)^G$, и, следовательно, $(k(S):k(R)) = |G|$. Таким образом, мы показали, что в этом случае горенштейнов S-модуль ранга r является горенштейновым R-модулем ранга $r|G|$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Аврамов, С. Строгалов, А. Тодоров. О горенштейновых модулях. *Успехи мат. наук*, **27**, 1972, № 4, 199—200.
2. В. Хинич. О горенштейновости колец инвариантов колец Горенштейна. *Известия АН СССР, математика*, **40**, 1976, № 1, 50—56.
3. R. Fossum, A. Foxby, P. Griffith, I. Reiten. Minimal injective resolutions with applications to dualizing modules and to Gorenstein modules. *Publications Mathématiques IHES*, **45**, 1976.
4. A. Grothendieck, J. Dieudonné. Eléments de géométrie algébrique. *Publications mathématiques IHES*, **32**, 1967.
5. M. Raynaud. Anneaux locaux henséliens. *Lecture Notes in Mathematics*, **169**. Berlin, 1970.

Московский Государственный Университет
Механико-математический факультет
117234 Москва

Поступила 31. 3. 1977