Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ПОВЕДЕНИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИИ ИЗ ПРОСТРАНСТВ $\dot{B}^{\alpha}_{p,b}$

ГЕОРГИ Е. КАРАДЖОВ

Доказано свойство функции из пространств Бесова *выходить на многочлен* на бесконечности. Например, в случае *предельных показателей*, после эвентуального исправления на множестве меры нуль, функция становится непрерывной; существует многочлен, линейно зависящий от этои функции, так что разность между ними стремится к нулю на бесконечности.

В ряде работ (см. [1] и указанную там литературу) исследовалось свойство „выходить на многочлен" на бесконечности функции из пространств Соболева. Ю. С. Никольский [2] рассмотрел случай пространств Бесова $\dot{B}^{\alpha}_{p,p}$ (и более общий случай, когда эти пространства неизотропны и с весом). С другой стороны, в работе Бьерлинга [3] содержится следующий результат. Если

$$B(f)=\int_{0}^{\infty} t^{-1/2}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+t)-f(x)|^{2}\,dx\Big)^{1/2}\frac{dt}{t}<\infty,$$

то после эвентуального исправления на множестве меры нуль функция f будет непрерывной. При этом существует предел $\lim_{|x|\to\infty} f(x)=f(\infty)$ и $\max|f(x)-f(\infty)|\leqq B(f)$.

Цель настоящей работы состоит в доказательстве подобного свойства для пространств $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}$.

1. В этом пункте сформулируем основной результат. Через L_{loc} будем обозначать множество всех локально суммируемых функций $f(x)$, определенных в R^n. Если $h\in R^n$, то полагаем $T(h)f(x)=f(x+h)$,

$$\Delta^{s}(h)=\sum_{k=0}^{s}(-1)^{s-k}\binom{s}{k}T(kh),\ \ \Delta(h)=\Delta^{1}(h),\ \ I=T(0),$$

где s — целое положительное число. Модуль непрерывности порядка s для функции $f\in L_{\mathrm{loc}}$ определяется следующим образом:

$$\omega^{s}_{p}(t,f)=\sup\{\|\Delta^{s}(h)f\|_{p}:|h|\leqq t\},\ t>0,$$

где через $\|\cdot\|_p$, $1\leqq p\leqq\infty$ обозначается норма в пространстве L^p, т. е. $\|g\|_p=\{\int|g(x)|^p\,dx\}^{1/p}$, $1\leqq p<\infty$, $\|g\|_\infty=\sup|g(x)|$. Здесь и в дальнейшем через $\int$ обозначается интеграл Лебега по всему пространству R^n.

Пусть $\alpha>0$. Через $[\alpha]$ обозначим максимальное целое число, не превосходящее α и через (α) максимальное целое число, строго меньшее α.

Пространство Бесова $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}$, $\alpha>0$, $1\leqq p\leqq\infty$, $0<q\leqq\infty$ есть множество всех $f\in L_{\mathrm{loc}}$, для которых конечна полуквазинорма:

(1) $$N(f\,|\,\dot{B}^{\alpha}_{p,q})=\sum_{|\varkappa|=(\alpha)}\{\int_0^{\infty}[t^{(\alpha)-\alpha}\omega_p^s(t,D^{\varkappa}f)]^q\frac{dt}{t}\}^{1/q},$$

где $s=1$, если α — нецелое и $s=2$, если α — целое. Как обычно,

$$D^{\varkappa}=D_1^{\varkappa_1}\dots D_n^{\varkappa_n},\ \varkappa=(\varkappa_1,\dots,\varkappa_n),\ |\varkappa|=\varkappa_1+\dots+\varkappa_n,\ D_j=\partial/\partial x_j,\ 1\leq j\leq n.$$

Функционал (1) аннулируется на множестве $\mathcal{O}_{[\alpha]}$, состоящем из всех многочленов вида $P(x)=\Sigma c_{\varkappa}x^{\varkappa}$, $|\varkappa|\leq[\alpha]$, где $x=(x_1,\dots,x_n)$, $x^{\varkappa}=x_1^{\varkappa_1}\dots x_n^{\varkappa_n}$.

Обозначим через C_0 пространство всех непрерывных функций $f(x)$, $x\in R^n$, стремящихся к нулю на бесконечности с нормой $\|f\|_0=\max|f(x)|$ и через $L^{r,q}$, $0<r<\infty$, $0<q\leq\infty$, пространство Лоренца [4, 5] с квазинормой $\|\cdot\|_{r,q}$.

Теорема. *Существует многочлен $P(f;x)\in\mathcal{O}_{[\alpha]}$, линейно зависящий от $f\in\dot{B}^{\alpha}_{p,q}$ и такой, что:*

а. *если $f\in\dot{B}^{n/p}_{p,1}$, то после эвентуального исправления f на множестве меры нуль, функция $f(x)-P(f;x)\in C_0$ и*

(2) $$\|f(x)-P(f;x)\|_0\leq CN(f\,|\,\dot{B}^{n/p}_{p,1});$$

б. *если $f\in\dot{B}^{\alpha}_{p,q}$ и $\alpha<n/p$, то функция $f(x)-P(f;x)\in L^{r,q}$ при $1/r=1/p-\alpha/n$, $q>0$, и*

(3) $$\|f(x)-P(f;x)\|_{r,q}\leq CN(f\,|\,\dot{B}^{\alpha}_{p,q}).$$

Если для некоторого многочлена Q имеет место (2) или (3), то $Q(x)=P(f;x)$. В оценках (2) и (3) через C обозначены различные положительные константы, которые не зависят от функции f.

Замечание 1. Линейный оператор $\Pi:f\to P(f;x)$ является проектором на $\mathcal{O}_{[\alpha]}$, т. е. $\Pi^2=I$. Далее, если $f\in L^p$, то $P(f;x)=0$.

Замечание 2. Сформулированная теорема точна.

Действительно, оценка (2) невозможна в классе $\dot{B}^{\alpha}_{p,1}$, если $\alpha\neq n/p$. В этом можно легко убедиться. Пусть функция $f\in C_0\cap\dot{B}^{\alpha}_{p,1}$. Тогда, для любого $\varepsilon>0$ функция $f(\varepsilon,x)\in C_0\cap\dot{B}^{\alpha}_{p,1}$. Если неравенство (2) справедливо для f то $\|f\|_0\leq C\varepsilon^{\alpha-n/p}N(f\,|\,\dot{B}^{\alpha}_{p,1})$, поэтому $\alpha=n/p$. Таким образом, условие $\alpha=n/p$ необходимо и достаточно для выполнения оценки (2). Аналогично, условие $1/r=1/p-\alpha/n$ необходимо и достаточно для выполнения оценки (3). Далее, из [6] следует существование финитной функции $f\in\dot{B}^{n/p}_{p,1+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$, которая возрастает неограниченно в окрестности некоторой точки. Следовательно, в оценке (2) параметр 1 точный (отметим, что с увеличением параметра q шкала $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}$ расширяется).

Замечание 3. Из [2, теорема 2] оценка (2) получается только при $p=1$ и заменой C_0 на L^{∞}.

Исследование в [1; 2] проводится методами интегрального представления Ильина и оценки сингулярных интегралов. Наш метод связан с идеями Питре [7] о применении интегрального представления функции в теории интерполяционных пространств. Отметим, что в менее точных терминах „фактор-пространств“ оценка (3) доказана в [7]. Здесь применяется вариант интегрального представления функции, тесно связанный с преобразованием Фурье целых функций экспоненциального типа. Это позволяет упростить доказательства нужных оценок, сводя их к неравенству Юнга для свертки [4, стр. 42].

2. Теория интерполяционных пространств хорошо разработана для квазинормированных пространств [5; 7]. Оказывается, что аналогично можно рассматривать и случай полуквазинормированных пространств.

Линейное топологическое пространство (л. т. п.) A назовем полуквазинормированным (п. кв. н.), если его топология порождена неотрицательной функцией $\|\cdot\|_A$ (полуквазинорма), удовлетворяющая свойствам: $\|\lambda a\|_A = |\lambda| \, \|a\|_A$ и $\|a_1+a_2\|_A \leqq K(\|a_1\|_A + \|a_2\|_A)$, где λ — число и K — некоторая константа, зависящая только от A. Наряду с обозначением $\|a\|_A$ будем употреблять и обозначение $N(a \mid A)$.

Для совместной пары (A_0, A_1) п. кв. н. пространств (оба пространства: A_0 и A_1 вложены линейно и топологично в некоторое л. т. п.) функция Питре $K(t, a; A_0, A_1) = K(t, a)$, $a \in A_0 + A_1$, $t > 0$, определяется следующим образом $K(t, a) = \inf\{\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1} : a = a_0 + a_1\}$.

Пространство *средних* $(A_0, A_1)_{\theta q}$, $0<\theta<1$, $0<q\leqq\infty$ есть множество всех $a \in A_0 + A_1$, для которых конечна полуквазинорма

$$N(a \mid (A_0, A_1)_{\theta q}) = \{\int_0^\infty t^{-\theta q} K^q(t, a) \frac{dt}{t}\}^{1/q}.$$

Пусть A и B — два п. кв. н. пространства и T — линейный оператор, определенный на A, с значениями в B. Тогда T действует непрерывно $(T: A \to B)$ тогда и только тогда, когда T ограничен, т. е. существует константа $C>0$ т. ч. $\|Ta\|_B \leqq C\|a\|_A$ для любого $a \in A$. Пусть $\|T\| = \sup\{\|Ta\|_B . \|a\|_A \leqq 1\}$. Функция $T \to \|T\|$ является полуквазинормой на множестве всех линейных непрерывных операторов $T: A \to B$.

Следующие две теоремы можно доказать по схеме, указанной в [5].

Теорема А (об интерполяции). *Пусть (A_0, A_1) и (B_0, B_1) — две совместные пары п. кв. н. пространств и линейный оператор $T: A_j \to B_j$ имеет полуквазинорму $\|T\|_j$, $j=0, 1$. Тогда $T:(A_0, A_1)_{\theta q} \to (B_0, B_1)_{\theta q}$ и его полуквазинорма $\|T\|$ удовлетворяет неравенству $\|T\| \leqq \|T\|_0^{1-\theta}\|T\|_1^{\theta}$.*

Теорема Б (реитерации). *Пусть $0<\theta_0 \neq \theta_1<1$, $0<\alpha<1$, $0<q_0, q_1, q\leqq\infty$ и $\theta = (1-\alpha)\theta_0 + \alpha\theta_1$. Тогда $((A_0, A_1)_{\theta_0 q_0}, (A_0, A_1)_{\theta_1 q_1})_{\alpha q} = (A_0, A_1)_{\theta q}$.*

Докажем несколько интерполяционных свойств пространств $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}$, необходимых в дальнейшем. В случае банаховых пространств эти свойства известны [7; 8], а приводимые ниже доказательства используют близкие идеи.

Лемма 1. *$\dot{B}^{\alpha}_{p,q} \subset (L^p, \dot{W}^s_p)_{\alpha/s,q}$, где целое число $s>[\alpha]+1$, а пространство $\dot{W}^s_p$ имеет полунорму $N(f \mid \dot{W}^s_p) = \Sigma \|D^{\varkappa} f\|_p$, $|\varkappa| = s$.*

Доказательство. Достаточно установить формулу

$$K(t^s, f; L^p, \dot{W}^s_p) \leqq Ct^{(\alpha)} \Sigma \omega^2_p(t, D^{\varkappa} f), \quad |\varkappa| = (\alpha). \tag{4}$$

Чтобы избежать громоздких обозначений, рассмотрим только случай $n=2$. Исходя из тождества

$$f = (-1)^s \Delta^s(h) f + \sum_{k=1}^{s} (-1)^{k+1} \binom{s}{k} T(kh) f,$$

получаем разложение

$$f = f_{0t} + f_{1t}, \quad t>0, \tag{5}$$

где

$$f_{0t}=(-1)^s t^{-2s}\int_0^t\cdots\int_0^t \Delta^s(\xi,\eta)\, f\, d\xi d\eta,$$

$$f_{1t}=t^{-2s}\int_0^t\cdots\int_0^t \sum_{k=1}^{s}(-1)^{k+1}\binom{s}{k} f(x+k\xi,\ y+k\eta)d\xi d\eta,$$

$$\xi=\Sigma\xi_j,\ \eta=\Sigma\eta_j,\ d\xi=\Pi d\xi_j,\ d\eta=\Pi d\eta_j,\ 1\le j\le s.$$

Очевидно $\|f_{0t}\|_p\le C\omega_p^s(t,f)$, поэтому

(6) $$\|f_{0t}\|_p\le Ct^{(\alpha)}\Sigma\omega_p^2(t,D^\varkappa f),\ |\varkappa|=(\alpha).$$

Далее, если $|\varkappa|=s>[\alpha]+1$ и $\varkappa=\varkappa'+\varkappa''$, где $|\varkappa''|=(\alpha)$, то $|\varkappa'|\ge 2$. Поэтому, если $\varkappa'=(\varkappa_1',\varkappa_2')$, то либо $\varkappa_1'\ge 2$, либо $\varkappa_2'\ge 2$, либо одновременно $\varkappa_1'\ge 1$, $\varkappa_2'\ge 1$. Очевидно

$$D^\varkappa f_{1t}(x,y)=t^{-2s}\int_0^t\cdots\int_0^t \sum_{k=1}^{s}(-1)^{k+1}\binom{s}{k}\Delta_1^{\varkappa_1'}(kt)\Delta_2^{\varkappa_2'}(kt)D^{\varkappa''}f(x+k\xi',\ y+k\eta')d\xi' d\eta',$$

где

$$\Delta_j(t)=T_j(t)-I,\ T_j(t)f(x)=f(x_1,\dots x_{j-1},\ x_j+t,\ x_{j+1},\dots,x_n),\ 1\le j\le n,$$

$$\xi'=\Sigma\xi_k,\ \eta'=\Sigma\eta_j,\ d\xi'=\Pi d\xi_k,\ d\eta'=\Pi d\eta_j,\ \varkappa_1'+1\le k\le s,\ \varkappa_2'+1\le j\le s.$$

Поэтому

(7) $$\|D^\varkappa f_{1t}\|_p\le Ct^{-s+(\alpha)}\Sigma[\|\Delta_1^2(kt)D^{\varkappa''}f\|_p+\|\Delta_2^2(kt)D^{\varkappa''}f\|_p$$
$$+\|\Delta_1(kt)\Delta_2(kt)D^{\varkappa''}f\|_p],\ 1\le k\le s.$$

С другой стороны, из тождества $\Delta^2(\xi,\eta)=\Delta_1^2(\xi)T_2(2\eta)+2\Delta_1(\xi)\Delta_2(\eta)T_2(\eta)+\Delta_2^2(\eta)$, следует оценка $\|\Delta_1(t)\Delta_2(t)g\|_p\le C[\|\Delta_1^2(t)g\|_p+\|\Delta_2^2(t)g\|_p+\|\Delta^2(t,t)g\|_p]$. Отсюда и из (7) получаем

(8) $$N(f_{1t}\mid \dot W_p^s)\le Ct^{-s+(\alpha)}\Sigma\omega_p^2(t,D^\varkappa f),\ |\varkappa|=(\alpha).$$

Оценка (4) является следствием (5), (6) и (8). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если* $m-1<\alpha<m$, $m=1,2,\dots$, *то* $\dot B_{p,q}^\alpha=(\dot W_p^{m-1},\ \dot W_p^m)_{\theta q}$, $\alpha=m-1+\theta$.

Доказательство. Достаточно установить формулу

(9) $$K(t,\ f;\dot W_p^{m-1},\ \dot W_p^m)\sim\Sigma\omega_p^1(t,D^\varkappa f),\quad |\varkappa|=m-1.$$

Через $\sim$ обозначается наличие двусторонних оценок с положительными константами, независящими от f и t.

Очевидно

(10) $$f=f_{0t}+f_{1t},$$

где

$$f_{0t}=-t^{-n}\int_0^t\cdots\int_0^t\Delta(\xi)f\,d\xi_1\dots d\xi_n,\quad f_{1t}(x)=t^{-n}\int_0^t\cdots\int_0^t f(x+\xi)d\xi_1\dots d\xi_n.$$

Имеет место оценка

(11) $$N(f_{0t}\mid \dot{W}_p^{m-1})\leq C\Sigma\omega_p^1(t, D^{\varkappa} f),\ |\varkappa|=m-1.$$

Если $|\varkappa|=m$, $\xi'=(\xi_1,\ldots,\xi_{j-1},\xi_{j+1},\ldots,\xi_n)$, то

$$D^{\varkappa}f_{1t}(x)=t^{-n}\int_0^t\cdots\int_0^t \Delta_j(t)D^{\varkappa'}f(x+\xi')d\xi',\quad |\varkappa'|=m-1,$$

поэтому

(12) $$N(f_{1t}\mid \dot{W}_p^{m})\leq Ct^{-1}\Sigma\omega_p^1(t, D^{\varkappa} f),\ |\varkappa|=m-1.$$

С другой стороны,

(13) $$\sum_{|\varkappa|=m-1}\omega_p^1(t, D^{\varkappa} f)\leq C\min\{N(f\mid \dot{W}_p^{m-1}),\ tN(f\mid \dot{W}_p^{m})\}.$$

Формула (9) следует из (10), (11), (12) и (13). Лемма 2 доказана.

Аналогично леммам 1, 2 устанавливается

Лемма 3. *Пусть* $\alpha=m\geq 1$ — целое число и $\dot{W}_p^0=L^p$. *Тогда*

$$\dot{B}^m_{p,q}=(\dot{W}_p^{m-1},\ \dot{W}_p^{m+1})_{1/2,\,q}\,.$$

Далее, из лемм 2, 3 и теоремы Б получаем следующую лемму.

Лемма 4. $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}=(\dot{B}^{\alpha_1}_{p,q_1},\ \dot{B}^{\alpha_2}_{p,q_2})_{\theta q}$ *для всех* $\alpha_1\neq\alpha_2$, *достаточно близких к* α *и таких, что* $\alpha=(1-\theta)\alpha_1+\theta\alpha_2$, $0<q_1,\ q_2,\ q\leq\infty$, $1\leq p\leq\infty$.

3. Пусть $\omega(t)=(\sin t)^{\sigma}t^{-2m-2n}$, $\sigma=4m+2n$, m — целое положительное число. Если E_σ обозначает множество всех целых функций экспоненциального типа, не превосходящих σ, которые суммируемы при вещественных значениях аргумента [9], то

(14) $$\omega\in E_\sigma,\ t^{-2m}\omega(t)\in E_\sigma$$

и, очевидно, эти функции являются четными.

Положим $\alpha(t)=B^{-1}\int_t^{\infty}\omega(s)s^{-1}ds$, где $B=\int_0^{\infty}\omega(s)s^{-1}\,ds$. Тогда $\alpha(0)=1$, $\alpha'(t)=-B^{-1}\omega(t)t^{-1}$ и, следовательно, четная функция $\alpha(t)\in E_\sigma$. Поэтому функция $\widehat{\varphi}(\xi)=\alpha(|\xi|)$, $|\xi|^2=\Sigma\xi_k^2$, $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, имеет свойства: $\widehat{\varphi}\in E_\sigma$, $\widehat{\varphi}(0)=1$, $D^{\varkappa}\widehat{\varphi}(0)=0$, $1\leq|\varkappa|\leq 2m-1$ и $|\xi^{\varkappa}|\widehat{\varphi}(\xi)\in L^1$, $|\varkappa|\leq 2m$. Если $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье и $\varphi(x)=\mathcal{F}^{-1}\widehat{\varphi}(x)$, то [9, стр. 130]

(15) $$\varphi\in C^{2m}_{\sigma},\ \int\varphi(x)dx=1,\ \int x^{\varkappa}\varphi(x)dx=0,\ 1\leq|\varkappa|\leq 2m-1,$$

где через C^k обозначается множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$, $x\in R^n$, а через C^k_σ его подмножество, состоящее из функций, чьи носители лежат в кубе $Q_\sigma=\{x\in R^n: |x_j|\leq\sigma\}$.

Положим $\psi(x)=\varphi(x)-2^{-n}\varphi(x/2)$. Тогда $\widehat{\psi}(\xi)=\mathcal{F}\psi(\xi)=\beta(|\xi|)$, где $\beta(t)=B^{-1}\int_t^{2t}\omega(s)s^{-1}ds$. Так как четная функция $\beta\in E_{2\sigma}$ и $\beta(t)\leq\alpha(t)$, то

(16) $$\begin{cases}\psi\in C^{2m}_{2\sigma},\ \int x^{\varkappa}\psi(x)dx=0,\ 0\leq|\varkappa|\leq 2m-1,\\ \widehat{\psi}\in E_{2\sigma},\ |\xi|^{-2m}\widehat{\psi}(\xi)\in E_{2\sigma}.\end{cases}$$

Положим $\psi_k(x)=2^{-kn}\psi(x2^{-k})$, $\varphi_k(x)=2^{-kn}\varphi(x2^{-k})$. Тогда $\psi_k=\varphi_k-\varphi_{k+1}$. Если $f\in L_{\text{loc}}$ и $f*\psi_k(x)=\int f(x-y)\psi_k(y)dy$, то $f*\psi_k\in C^{2m}$ и

$$\Sigma f*\psi_k=f*\varphi_{-i}-f*\varphi_j,\quad -i\leq k\leq j-1. \tag{17}$$

Так как $|f*\varphi_{-i}(x)-f(x)|\leq C2^{-in}\int|f(x-y)-f(x)|dy$ (интегрирование распространяется по кубу $Q_{2^{-i}\sigma}$) и $f\in L_{\text{loc}}$, то для почти всех $x\in R^n$, $f*\varphi_{-i}(x)\to f(x)$ при $i\to+\infty$. Поэтому из (17) получаем следующее представление функции $f\in L_{\text{loc}}$, справедливое почти всюду:

$$f(x)=f*\varphi_j(x)+\Sigma f*\psi_k(x),\ k<j. \tag{18}$$

Идея использования интегральных представлений в теории интерполяционных пространств принадлежит Питре [7]. Представление (18) есть дискретный аналог, тесно связанный с преобразованием Фурье функций класса E_σ. Эта связь позволяет легко установить следующую лемму.

Лемма 5. *Рассмотрим уравнение* $Aa=\psi$, *где* $A=[-\Sigma_{k=1}^n D_k^2]^m$ *и* ψ — *функция* (16). *Это уравнение имеет решение* $a\in C_{2\sigma}^{4m}$.

Доказательство. Согласно (16) функция $\widehat{a}(\xi)=|\xi|^{-2m}\widehat{\psi}(\xi)\in E_{2\sigma}$ и $\xi^\varkappa|\widehat{a}(\xi)|\in L^1$, $|\varkappa|\leq 4m$. Следовательно, функция $a=\mathcal{F}^{-1}\widehat{a}\in C_\sigma^{24m}$ и $Aa=\psi$. Этим лемма доказана.

Положим $a_k(x)=2^{-kn}a(x2^{-k})$. Тогда следствием леммы 5 является следующее представление:

$$f*\psi_k=2^{2mk}a_k*Af, \tag{19}$$

справедливое для любого $f\in\dot{W}_p^{2m}$.

4. Целое число m из пункта 3 будем считать строго большим $[\alpha]+1$.

Лемма 6. *Имеет место оценка* $\Sigma\|f*\psi_k\|_r\leq CN(f|\dot{B}_{p,1}^\alpha)$, *где* $1/r=1/p-\alpha/n>0$ *и* Σ *обозначает суммирование по всем целым* k.

Доказательство. По известному неравенству Юнга для свертки

$$\|f*\psi_k\|_r\leq C2^{k(n/p'-n)}\|f\|_p,\ p\geq 1,\ p'\geq 1,\ r\geq 1,\ 1+1/r=1/p+1/p'. \tag{20}$$

Рассмотрим изображение $g\to 2_1^{2mk}a_k*g$. Аналогично (20), $\|2^{2mk}a_k*g\|_r\leq C2^{k(2m+n/p'-n)}\|g\|_p$, откуда, учитывая неравенство $\|Af\|_p\leq CN(f|\dot{W}_p^{2m})$ и свойство (19), получаем

$$\|f*\psi_k\|_r\leq C2^{k(2m+n/p'-n)}N(f|\dot{W}_p^{2m}). \tag{21}$$

Теперь из (20) и (21) следует оценка

$$\|f*\psi_k\|_r\leq C2^{k(n/p'-n)}K(2^{2mk},f;L^p,\dot{W}_p^{2m}). \tag{22}$$

Оценка в лемме 6 есть следствие (22) и леммы 1. Лемма доказана.

Эта лемма показывает, что если $f\in\dot{B}_{p,1}^\alpha$ и $1/r=1/p-\alpha/n\geq 0$, то последовательность $F_j(x)=\Sigma_{k<j}f*\psi_k(x)$ сходится в пространстве L^r и

$$\|\Sigma f*\psi_k\|_r\leq CN(f|\dot{B}_{p,1}^\alpha). \tag{23}$$

Следовательно, существует подпоследовательность (обозначим ее опять через $F_j(x)$), которая сходится почти всюду.

Лемма 7. *Если* $f\in\dot{B}_{p,q}^\alpha$, $1/r=1/p-\alpha/n>0$, $0<q\leq\infty$, *то существует подпоследовательность* $F_j(x)=\Sigma_{k<j}f*\psi_k(x)$, *которая сходится почти всюду и*

(24) $$\| \Sigma f * \psi_k \|_{r,q} \leq CN(f \mid \dot{B}^{\alpha}_{p,q}).$$

Доказательство. Найдем числа α_1, α_2 такие, что $\alpha_j < n/p$, $[\alpha_j]+1 < m$, $j=1, 2$, и чтобы имела место лемма 4:

(25) $$\dot{B}^{\alpha}_{p,q} = (\dot{B}^{\alpha_1}_{p,1}, \dot{B}^{\alpha_2}_{p,1})_{\theta q}.$$

Если $f \in \dot{B}^{\alpha}_{p,q}$, то $f = f_1 + f_2$, $f_j \in \dot{B}^{\alpha_j}_{p,1}$, $j=1, 2$, и $\Sigma f * \psi_k = \Sigma f_1 * \psi_k + \Sigma f_2 * \psi_k$; поэтому существует подпоследовательность $F_j(x) = \Sigma_{k<j} f * \psi_k(x)$, которая сходится к $\Sigma f * \psi_k(x)$ почти всюду. Рассмотрим изображение $Tf = \Sigma f * \psi_k$. Согласно оценке (23) это есть линейное непрерывное изображение из $\dot{B}^{\alpha_j}_{p,1}$ в L^{r_j}, $1/r_j = 1/p_j - \alpha_j/n$, $j=1, 2$. Теорема A и (25) показывают, что T действует непрерывно из $\dot{B}^{\alpha}_{p,q}$ в $(L^{r_1}, L^{r_2})_{\theta q}$. Так как последнее пространство совпадает [5] с пространством $L^{r,q}$, $1/r = (1-\theta)/r_1 + \theta/r_2$, то имеет место оценка (24). Лемма доказана.

Лемма 8. *Существует многочлен $P(f; x) \in \mathcal{P}_{[\alpha]}$, линейно зависящий от $f \in \dot{B}^{\alpha}_{p,q}$, $0<\alpha<n/p$, $1 \leq p < \infty$, $0<q\leq\infty$ либо $\alpha = np$, $q=1$ такой, что почти всюду выполнено равенство*

(26) $$f(x) = P(f; x) + \Sigma f * \psi_k(x).$$

Доказательство. Так как последовательность $F_j(x) = \Sigma_{k<j} f * \psi_k(x)$ сходится почти всюду, то из (18) следует, что последовательность $f * \varphi_j(x)$ сходится при $j \to +\infty$ почти всюду:

(27) $$f * \varphi_j \to f - \Sigma f * \psi_k.$$

С другой стороны, если $f \in \dot{B}^{\alpha}_{p,q}$, то $\| \Delta^s(h) D^{\varkappa} f \|_p < \infty$ для любого $h \in R^n$, где $|\varkappa| = (\alpha)$ и $s=1$, если α — нецелое; $s=2$, если α — целое. Так как

$$| \Delta^s(h) D^{\varkappa} f * \varphi_j(x) | \leq \| \Delta^s(h) D^{\varkappa} f \|_p \, \| \varphi_j \|_{p'}, \ 1/p + 1/p' = 1$$

и $\| \varphi_j \|_{p'} = 2^{-jn/p} \| \varphi \|_p \to 0$ при $j \to +\infty$, то для любого $h \in R^n$, $\Delta^s(h) D^{\varkappa} [f * \varphi_j] \to 0$ при $j \to +\infty$, равномерно относительно $x \in R^n$. Отсюда и (27) следует, что для всех $h \in R^n$ и почти всех $x \in R^n$ выполнено равенство $\Delta^s(h) D^{\varkappa} [f(x) - \Sigma f * \psi_k(x)] = 0$. Теперь, с помощью усреднения по Стеклову, легко показать, что почти всюду $D^{\varkappa} [f(x) - \Sigma f * \psi_k(x)] = 0$, $|\varkappa| = [\alpha]+1$. Следовательно. существует многочлен $P(f; x) \in \mathcal{P}_{[\alpha]}$, для которого выполняется (26). Лемма доказана.

Утверждение б. теоремы следует из лемм 7 и 8. Справедливость замечания 1 вытекает из (26) и (16). К тому же, если $f \in L^p$, то $f * \varphi_j \to 0$, поэтому $P(f; x) = 0$.

Теперь докажем утверждение а. теоремы.

Лемма 9 (случай $p=1$). *Если* $f \in \dot{B}^{n}_{1,1}$, *то*

$$\Sigma f * \psi_k \in C_0 \ \ \textit{и} \ \ \| \Sigma f * \psi_k \|_0 \leq CN(f \mid \dot{B}^{n}_{1,1}).$$

Доказательство. Если $f \in L^1$, то $f * \psi_k \in C_0$ и, аналогично (20),

(28) $$\| f * \psi_k \|_0 \leq C 2^{-kn} \| f \|_1.$$

Если $f \in \dot{W}^{2m}_1$, то из (19) следует, что $f * \psi_k \in C_0$ и, аналогично (21),

(29) $$\| f * \psi_k \|_0 \leq C 2^{k(2m-n)} N(f \mid \dot{W}^{2m}_1).$$

Ясно, что лемма 9 является следствием (28), (29) и леммы 1.

Случай $1<p<\infty$ рассматривается несколько сложнее. Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 10. $(L^1, C_0)_{\theta p}=L^p$, $1/p=1-\theta$.

Доказательство. Хорошо известна формула [4, стр. 240]

$$K(t, f; L^1, L^\infty)=\int_0^t f^*(s)ds. \tag{30}$$

По определению $f^*(t)=\inf\{s>0;\ \lambda_f(s)\leq t\}$, где $\lambda_f(s)=\operatorname{mes}\{x\in R^n;\ |f(x)|>s\}$ — функция распределения для f.

В силу вложения $C_0\subset L^\infty$ из (30) получаем: $(L^1, C_0)_{\theta p}\subset L^p$, $1/p=1-\theta$. Так как $p<\infty$ и множество финитных непрерывных функций плотно в L^p, то обратное вложение будет следовать из формулы

$$K(t, f; L^1, C_0)=\int_0^t f^*(s)ds, \tag{31}$$

где f — непрерывная и финитная функция.

Очевидно $K(t, f; L^1, C_0)\geq\int_0^t f^*(s)ds$. Обратно, пусть $F=\operatorname{supp} f$ и $E_t=\{x: |f(x)|>f^*(t)\}$. Тогда $E_t\subset F$. Положим $f_{0t}(x)=0$, если $x\in R^n\setminus E_t$ и $f_{0t}(x)=f(x)(|f(x)|-f^*(t))/|f(x)|$, $x\in E_t$. Тогда функция $f_{1t}=f-f_{0t}$ имеет вид $f_{1t}=f$, если $x\in R^n\setminus E_t$ и $f_{1t}=f(x)f^*(t)/|f(x)|$, если $x\in E_t$. Очевидно функция f_{1t} непрерывна, а функция f_{0t} финитна. Поэтому обе функции f_{0t} и f_{1t} суть непрерывны и финитны.

Далее, $\operatorname{mes} E_t\leq t$. Если $F_t=\{x: |f(x)|\geq f^*(t)\}$, то $\operatorname{mes} F_t\geq t$ [4]. Пусть G_t — измеримое множество со свойствами: $E_t\subset G_t\subset F_t$ и $\operatorname{mes} G_t=t$. Очевидно

$$K(t, f; L^1, C_0)\leq\int_{G_t}(|f(x)|-f^*(t))\,dx+tf^*(t)=\int_{G_t}|f(x)|\,dx.$$

Отсюда и из формулы [4, стр. 227]: $\int_0^t f^*(s)ds=\sup\{\int_E|f(x)|\,dx: \operatorname{mes} E\leq t\}$ следует (31). Лемма доказана.

Лемма 11 (случай $1<p<\infty$). *Если* $f\in\dot{B}^{n/p}_{p,1}$, *то*

$$\Sigma f*\psi_k\in C_0 \ \ и \ \ \|\Sigma f*\psi_k\|_0\leq CN(f\,|\,\dot{B}^{n/p}_{p,1}).$$

Доказательство. Если $f\in C_0$, то $f*\psi_k\in C_0$ и

$$\|f*\psi_k\|_0\leq C\,\|f\|_0. \tag{32}$$

Рассмотрим изображение $f\to f*\psi_k$. Из (28) и (32) следует, что это изображение действует непрерывно в парах пространств (L^1, C_0) и (C_0, C_0). Поэтому из теоремы A и леммы 10 имеем оценку

$$\|f*\psi_k\|_0\leq C2^{-kn/p}\,\|f\|_p. \tag{33}$$

Аналогично, рассматривая изображение $g\to 2^{2mk}a_k*g$ и учитывая свойство (19), получаем

$$\|f*\psi_k\|_0\leq C2^{k(2m-n/p)}N(f\,|\,\dot{W}^{2m}_p). \tag{34}$$

Теперь оценка в лемме 11 следует из (33), (34) и леммы 1. Лемма доказана.

Утверждение a. теоремы следует из лемм 8, 9, 11.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. В. Бесов. Поведение дифференцируемых функций в бесконечности и плотность финитных функций. *Труды МИАН СССР*, **105**, 1969, 3—14.
2. Ю. С. Никольский. Поведение на бесконечности функций с заданными в L_p дифференциально-разностными свойствами. *Труды МИАН СССР*, 131, 1974, 182—198.
3. A. Beurling. Constuction and analysis of some convolution algebras. *Ann. Inst. Fourier*, **14**, 1964, No. 2, 1—32.
4. И. Стейн, Г. Вейс. Введение в гармонический анализ на эвклидовых пространствах. Москва, 1974.
5. T. Holmstedt. Interpolation of quasi-normed spaces. *Math. Scand.*, **26**, 1970, No. 1, 177—199.
6. Н. Темиргалиев. О связи теорем вложения с равномерной сходимостью кратных рядов Фурье. *Мат. заметки*, **12**, 1972, No 2, 139—148.
7. J. Peefre. Espaces d'interpolation et theorems de Soboleff. *Ann. Inst. Fourier*, **16**, 1966, No. 1, 279—317.
8. J. Lions, J. Peetre. Sur une classe d'espaces d'interpolation *Publ. Math. de l'IHES*, **19**, 1964, 5—68.
9. С. М. Никольский. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения Москва, 1969.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике

1000 София П. Я. 373

Поступила 20. 5. 1977