

Provided for non-commercial research and educational use.
Not for reproduction, distribution or commercial use.

Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

The attached copy is furnished for non-commercial research and education use only.
Authors are permitted to post this version of the article to their personal websites or institutional repositories and to share with other researchers in the form of electronic reprints.

Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to third party websites are prohibited.

For further information on
Serdica Bulgaricae Mathematicae Publicationes
and its new series Serdica Mathematical Journal
visit the website of the journal <http://www.math.bas.bg/~serdica>
or contact: Editorial Office
Serdica Mathematical Journal
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Telephone: (+359-2)9792818, FAX:(+359-2)971-36-49
e-mail: serdica@math.bas.bg

ОДНО ЗАМЕЧАНИЕ О МЕТОДЕ ПОПОЛНЕНИЯ ДЛЯ ОБРАЩЕНИЯ МАТРИЦ

МИЛКО Г. ПЕТКОВ

В этой работе рассматривается вопрос о применении метода пополнения, точнее, схемы Ершова [1, 2, 3] для обращения матриц в случае, когда они эрмитовы. Покажем, что в этом частном случае количество арифметических операций и объем оперативной памяти машины, которая используется, могут сократиться примерно в два раза в сравнении с общим случаем.

Итак, пусть $A = (a_{ij})$ — неособенная эрмитова матрица порядка n , все главные миноры которой не равны нулю. В таком случае, как известно, матрица A^{-1} может быть получена следующим способом (схема Ершова). Строится следующая последовательность матриц n -го порядка:

$$(1) \quad A_0 = A - E, B_1, A_1, \dots, B_n, A_n,$$

где $A_k = (a_{ij}^{(k)})$, $B_k = (b_{ij}^{(k)})$, $E = (\delta_{ij})$,

$$(2) \quad a_{ij}^{(k)} = b_{ik}^{(k)} - b_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k-1)} / (1 + a_{kk}^{(k-1)}), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$(3) \quad b_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \delta_{ij} \text{ (символ Кронекера),} & i = k, \\ a_{ij}^{(k-1)}, & i \neq k. \end{cases}$$

Доказывается, что $A_n = A^{-1}$.

В общем случае для применения схемы Ершова необходимы $O(n^2) \sim n^2$ ячеек оперативной памяти машины и следующее количество арифметических операций:

$$(4) \quad \begin{cases} n^3 + 2n & \text{сложений,} \\ n^2 + n & \text{умножений,} \\ n & \text{делений.} \end{cases}$$

Отметим еще и следующие зависимости между элементами $a_{ij}^{(k)}$ матрицы A_k и соответствующие два минора матрицы A . Именно:

$$(5) \quad A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix} a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} (-1)^{i+j} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j-1 & j+1 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & i-1 & i+1 & \dots & k \end{pmatrix}, & i, j \leq k; \\ \uparrow \\ (-1)^{j+k+1} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & i-1 & i+1 & \dots & k \end{pmatrix}, & i \leq k, j > k; \\ (-1)^{j+k} A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j-1 & j+1 & \dots & ki \\ 1 & 2 & \dots & \dots & \dots & \dots & k \end{pmatrix}, & i > k, j \leq k. \end{cases}$$

$$(6) \quad A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix} (\delta_{ij} + a_{ij}^{(k)}) = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & ki \\ 1 & 2 & \dots & kj \end{pmatrix}, \quad i > k, j > k.$$

Выше мы обозначили через

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix}$$

тот минор матрицы A , который получается из строк с номерами $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ и столбцов с номерами $j_1 < j_2 < \dots < j_m$.

Используя формулы (5) и (6), получим

$$(7) \quad \bar{a}_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k)}, \text{ где } i, j \leq k \text{ или } i, j > k,$$

$$(8) \quad a_{ij}^{(k)} = -\bar{a}_{ji}^{(k)} \text{ в остальных случаях.}$$

Из (7) и (8) следует, что при получении A^{-1} достаточно вычислять и сохранять только те элементы каждой из матриц $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$, которые находятся по главной диагонали и выше (ниже) ее. Таким образом и получается экономический эффект, о котором шла речь в начале этой заметки.

Отметим, что аналогичный эффект имеет место и для соответственной клеточной модификации схемы Ершова.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Ершов. Об одном методе обращения матриц. *Доклады АН СССР*, 100, 1955, № 2, 209—211.
2. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. Москва, 1963.
3. М. Петков. Върху метода на попълване за обръщане на матрици и решаване на линейни системи. *Известия мат. инст. БАН*, 13, 1972, 131—140.

Единый центр науки и подготовки
кадров по математике и механике
1000 София П. Я. 373

Поступила 6. 7. 1977