Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОДНО ЗАМЕЧАНИЕ О МЕТОДЕ ПОПОЛНЕНИЯ ДЛЯ ОБРАЩЕНИЯ МАТРИЦ

МИЛКО Г. ПЕТКОВ

В этой работе рассматривается вопрос о применении метода пополнения, точнее, схемы Ершова [1, 2, 3] для обращения матриц в случае, когда они эрмитовы. Покажем, что в этом частном случае количество арифметических операций и объем оперативной памяти машины, которая используется, могут сократиться примерно в два раза в сравнении с общим случаем.

Итак, пусть $A=(a_{ij})$ — неособенная эрмитова матрица порядка n, все главные миноры которой не равны нулю. В таком случае, как известно, матрица A^{-1} может быть получена следующим способом (схема Ершова).

Строится следующая последовательность матриц n-го порядка:

$$A_0=A-E,\ B_1,\ A_1,\ \dots,\ B_n,\ A_n, \tag{1}$$

где $A_k=(a_{ij}^{(k)})$, $B_k=(b_{ij}^{(k)})$, $E=(\delta_{ij})$,

$$a_{ij}^{(k)}=b_{ik}^{(k)}-b_{ik}^{(k)}a_{kj}^{(k-1)}/(1+a_{kk}^{(k-1)}),\quad k=1, 2, \dots, n, \tag{2}$$

$$b_{ij}^{(k)}=\begin{cases}\delta_{ij}\ \text{(символ Кронекера)}, & i=k,\\ a_{ij}^{(k-1)}, & i\neq k.\end{cases} \tag{3}$$

Доказывается, что $A_n=A^{-1}$.

В общем случае для применения схемы Ершова необходимы $O(n^2)\sim n^2$ ячеек оперативной памяти машины и следующее количество арифметических операций:

$$\begin{cases} n^3+2n & \text{сложений},\\ n^2+\ n & \text{умножений},\\ \qquad n & \text{делений}.\end{cases} \tag{4}$$

Отметим еще и следующие зависимости между элементами $a_{ij}^{(k)}$ матрицы A_k и соответствующие два минора матрицы A. Именно:

$$A\begin{pmatrix}1 & 2\dots k\\ 1 & 2\dots k\end{pmatrix}a_{ij}^{(k)}=\begin{cases}(-1)^{i+j}\ A\begin{pmatrix}1\ 2\dots j-1\ \ j+1\dots k\\ 1\ 2\dots i-1\ \ i+1\dots k\end{pmatrix}, & i, j\leq k;\\ \qquad\qquad\updownarrow & \\ (-1)^{i+k+1}A\begin{pmatrix}1\ 2\dots i\dots .k\\ 1\ 2\dots i-1\ i+1\dots kj\end{pmatrix}, & i\leq k, j>k;\\ (-1)^{j+k}\ A\begin{pmatrix}1\ 2\dots j-1\ \ j+1\dots ki\\ 1\ 2\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ k\end{pmatrix}, & i>k, j\leq k.\end{cases} \tag{5}$$

$$A\begin{pmatrix}1 & 2\dots k\\ 1 & 2\dots k\end{pmatrix}(\delta_{ij}+a_{ij}^{(k)})=A\begin{pmatrix}1 & 2\dots k\,i\\ 1 & 2\dots k\,j\end{pmatrix},\quad i>k, j>k. \tag{6}$$

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 3, 1977, с. 347—348.

Выше мы обозначили через

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix}$$

тот минор матрицы A, который получается из строк с номерами $i_1<i_2<\cdots<i_m$ и столбцов с номерами $j_1<j_2<\cdots<j_m$.

Используя формулы (5) и (6), получим

$$\bar{a}_{ij}^{(k)}=a_{ij}^{(k)}, \text{ где } i, j\leq k \text{ или } i, j>k, \tag{7}$$

$$\bar{a}_{ij}^{(k)}=-a_{ji}^{(k)} \text{ в остальных случаях.} \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует, что при получении A^{-1} достаточно вычислять и сохранять только те элементы каждой из матриц $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$, которые находятся по главной диагонали и выше (ниже) ее. Таким образом и получается экономический эффект, о котором шла речь в начале этой заметки.

Отметим, что аналогичный эффект имеет место и для соответственной клеточной модификации схемы Ершова.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Ершов. Об одном методе обращения матриц. *Доклады АН СССР*, **100**, 1955, № 2, 209—211.
2. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. Москва, 1963.
3. М. Петков. Върху метода на попълване за обръщане на матрици и решаване на линейни системи. *Известия мат. инст. БАН*, **13**, 1972, 131—140.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике 1000 София П. Я. 373

Поступила 6. 7. 1977