Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ПРОСТРАНСТВА С КОНЕЧНОПОРОЖДЕННЫМИ ГОМОЛОГИЯМИ И КОГОМОЛОГИЯМИ

СТАНИСЛАВА В. ПЕТКОВА

В работе рассматриваются пространства с конечнопорожденными группами гомологий и когомологий (главным образом относительно канонических и спектральных теорий гомологий и когомологий). Исследуется поведение этих групп в случае, когда пространство — граница обратного спектра пространств (не непременно счетного), или объединение своих подпространств. Показана, например, непрерывность канонических гомологий для произвольной группы коэффициентов, если целочисленные гомологии конечнопорожденные.

Определено ядро естественного гомоморфизма групп когомологий произвольного полиэдра в обратный предел когомологий его конечных подполиэдров (если когомологии полиэдра конечнопорожденные, то ядро — нулевое).

Показано, что для локально компактных метризуемых пространств, гомологически локально связных относительно Z, и канонических гомологий с компактными носителями эти гомологии совпадают с гомологиями Бореля—Мура с компактными носителями и с спектральными гомологиями с компактными носителями для произвольной группы коэффициентов (последние гомологии совпадают с спектральными гомологиями пространств).

1. Обратные спектры, чьи пределы имеют конечнопорожденные группы гомологий и когомологий.

Алгебраическая лемма. *Если для прямого спектра $\{A_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}_{\alpha\in\Gamma}$ абелевых групп и гомоморфизмов группа $A=\lim A_\alpha$ конечнопорожденная, то существует $\beta\in\Gamma$ такое, что спектр $\{A_\gamma, \pi_\gamma^\delta\}_{\gamma\geq\beta}$ распадается в прямую сумму $\{A\}_{\gamma\geq\beta}+\{B_\gamma\}_{\gamma\geq\beta}$, где $\{A\}_{\gamma\geq\beta}$ — постоянный спектр, а $\varinjlim B_\gamma=0$.*

Доказательство. Так как группа A имеет конечное число образующих, то для каждого $\alpha\in\Gamma$ существует $\beta\geqq\alpha$ такое, что естественный гомоморфизм $\pi_\beta: A_\beta\to A$ является эпиморфизмом. Пусть A_α отображается эпиморфно на A. Каждой образующей из A сопоставим по одному представителю из A_α, а каждой линейной комбинации образующих из A — линейную комбинацию выбранных представителей с теми же коэффициентами. Если линейная комбинация в A нулевая, то для соответствующей ей линейной комбинации в A_α существует индекс $\beta\geqq\alpha$ такой, что образ этой комбинации в A_β нулевой. Так как в A имеется конечное число определяющих соотношений, то β можно выбрать одно и то же для всех линейных комбинаций в A_α, соответствующих этим соотношениям. Определим гомоморфизм $\mu_\beta: A\to A_\beta$ так: каждой образующей в A сопоставим образ в A_β при $\pi_\alpha^\beta: A_\alpha\to A_\beta$ ее представителя в A_α. Очевидно $\pi_\beta\mu_\beta=1$ и, следовательно, $A_\beta=A+\operatorname{Ker}\pi_\beta$. Для $\gamma>\beta$ положим $\mu_\gamma: A\to A_\gamma$, $\mu_\gamma=\pi_\beta^\gamma\mu_\beta$. Из $\pi_\beta\mu_\beta=1$ вытекает, что $\pi_\gamma\mu_\gamma=1$ и $A_\gamma=A+\operatorname{Ker}\pi_\gamma$. При этом, если $\delta\geqq\gamma\geqq\beta$, то гомоморфизм $\pi_\gamma^\delta: A_\gamma\to A_\delta$ совпадает на A с идентитетом ($\pi_\gamma^\delta\mu_\gamma=\mu_\delta$) и отображает $\operatorname{Ker}\pi_\gamma$ в $\operatorname{Ker}\pi_\delta$. Следовательно, спектр $\{A_\gamma, \pi_\gamma^\delta\}_{\gamma\geq\beta}$ распадается в прямую сумму $\{A, 1\}_{\gamma\geq\beta}+\{\operatorname{Ker}\pi_\gamma, \pi_\gamma^\delta\}_{\gamma\geq\beta}$. Очевидно $\varinjlim\operatorname{Ker}\pi_\gamma=0$. Этим лемма доказана.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 3, 1977, с. 349—358.

Замечание. Для обратного спектра с конечнопорожденным пределом аналогичное утверждение неверно, как видно на следующем примере. Построим последовательность подгрупп рациональных чисел $P_1 \supset P_2 \supset R_3, \ldots,$ порожденных числами вида $1/p$, p — простое число. Для P_i, $p \geqq p_i$, где p_i — i-тое по величине простое число. Гомоморфизмы в последовательности — вложения. Очевидно $\varprojlim P_i = Z$, но Z не отделяется как прямое слагаемое в никакой из групп P_i.

Из алгебраической леммы получаем

Утверждение 1. *Если для непрерывной теории когомологий H^* и топологического пространства X группа $H^n(X)$ конечнопорожденная, а $\{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}_{\alpha \in \Gamma}$ — обратный спектр пространств с $\varprojlim X_\alpha = X$, то существует $\beta \in \Gamma$, такое, что спектр $\{H^n(X_\gamma), (\pi_\gamma^\delta)^*\}_{\gamma \geqq \beta}$ расщепляется (посредством гомоморфизмов $\pi_\gamma^* : H^n(X_\gamma) \to H^n(X)$) на постоянный спектр $\{H^n(X)\}_{\gamma \geqq \beta}$ и на спектр, чей прямой предел равен нулю.*

Утверждение 1 верно для канонических когомологий [3; 4], т. е. для спектральных когомологий с компактными носителями $H_c^*(\ , G)$ (G — произвольная группа) в категории локально компактных метризуемых пространств и их непрерывных отображений. В частности, оно верно для спектральных когомологий на категории компактных пространств и их непрерывных отображений.

Для канонических когомологий $H_c^*(\ , G)$ сделаем следующее замечание.

Допустим, что группы $H_c^n(X)$ и $H_c^{n+1}(X)$ (вместо $H_c^n(X, G)$, как это было в утверждении 1) — конечнопорожденные. Тогда из формулы универсальных коэффициентов $0 \to H_c^n(X) \otimes G \to H_c^n(X, G) \to \operatorname{Tor}(H_c^{n+1}(X), G) \to 0$, распадающейся в прямую сумму [3] и из утверждения 1 следует, что существует $\beta \in \Gamma$, для которого постоянный спектр $\{H_c^n(X, G)\}_{\gamma \geqq \beta}$ отделяется как прямое слагаемое в спектре $\{H_\gamma^n(X_\gamma, G), (\pi_\gamma^\delta)^* \otimes 1 + \operatorname{Tor}((\pi_\gamma^\delta)^*, 1)\}_{\gamma \geqq \beta}$ посредством $\pi_c^* \otimes 1 + \operatorname{Tor}(\pi_\gamma^*, 1)$: $H_c^n(X_\gamma, G) \to H_c^n(X, G)$, где $(\pi_\gamma^\delta)^*$ и π_γ^* — гомоморфизмы целочисленных когомологий, а $1 : G \to G$ — идентитет в G. Отметим, что гомоморфизмы когомологий с коэффициентами в G, индуцированные отображениями π_γ^δ и π_γ, не всегда совпадают с вышеупомянутыми гомоморфизмами этих групп (в формуле универсальных коэффициентов, хотя группа $H_c^n(X, G)$ и расщепляется, гомоморфизмы не всегда расщепляются).

Перейдем к каноническим гомологиям H_* на категории локально компактных метризуемых пространств и их собственных отображений [3; 4].

Отметим сначала, что если для локально компактного метризуемого пространства X группы $H_c^n(X)$ и $H_c^{n+1}(X)$ конечнопорожденные, то и группа $H_n(X)$ конечнопорожденная. Аналогично, если $H_{n-1}(X)$ и $H_n(X)$ — конечнопорожденные группы, то $H_c^n(X)$ — тоже конечнопорожденная группа. Это видно из точной последовательности $0 \to \operatorname{Ext}(H_c^{n+1}(X), Z) \to H_n(X) \to \operatorname{Hom}[H_c^n(X), Z) \to 0$, распадающейся в прямую сумму [3] и из того факта, что если для некоторой группы A, $\operatorname{Ext}(A, Z)$ и $\operatorname{Hom}(A, Z)$ — группы с конечном числом образующих, то и A — с конечным числом образующих [10]. В частности, для метризуемого компакта X группы $\check{H}^n(X)$ и $H_n(X)$ — одновременно конечнопорожденные для каждого n (тогда $H_n(X, G)$ изоморфна группе $\check{H}_n(X, G)$ для произвольной группы G, где $\check{H}_*$ — спектральная теория гомологий [15]). Однако есть случаи, когда целочисленные спектральные гомологии пространства — конечнопорожденные для каждого n, но это неверно для его спектральных когомологий. Пример такого пространства — p-адический соленоид Σ_p, который ацикличен относительно $\check{H}_*$, но группа $\check{H}^1(\Sigma_p)$ изоморфна группе рациональных чисел вида n/p^k, n и k — целые.

На основании утверждения 1 получаем

Утверждение 2. *Если для локально компактного метризуемого пространства X группы $H_k(X)$ конечнопорожденные $k=n-1$, n, $n+1$, и $X=\varprojlim X_\alpha$, где $\{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}_{\alpha\in\Gamma}$ — обратный спектр локально компактных метризуемых пространств и их собственных отображений, то существует $\beta\in\Gamma$ такое, что гомоморфизм $(\pi_\gamma)_*: H_n(X, G)\to H_n(X_\gamma, G)$, индуцированный проекцией $\pi_\gamma: X\to X_\gamma$ — мономорфизм для $\gamma\geqq\beta$ и произвольной группы G. (Следовательно, мономорфизм и естественное преобразование $\pi: H_n(X, G)\to \varprojlim H_n(X_\alpha, G)$).*

Доказательство. Если группы $H_k(X)$ конечнопорожденные, $k=n-1$, n, $n+1$, то, как отметили выше, группы $H_c^n(X)$ и $H_c^{n+1}(X)$ тоже конечнопорожденные. Тогда существует $\beta\in\Gamma$, такое, что эти группы отделяются как прямые слагаемые соответственно в группах $H_c^n(X_\beta)$ и $H_c^{n+1}(X_\beta)$ (посредством $\pi_\beta^*: H_c^*(X_\beta)\to H_c^*(X)$). Поэтому в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathrm{Ext}(H_c^{n+1}(X), G) & \to & H_n(X, G) & \to & \mathrm{Hom}(H_c^n(X), G) & \to & 0\\
 & & \downarrow \mathrm{Ext}(\pi_\beta^* 1) & & \downarrow (\pi_\beta)_* & & \downarrow \mathrm{Hom}(\pi_\beta^* 1) & & \\
0 & \to & \mathrm{Ext}(H_c^{n+1}(X_\beta), G) & \to & H_n(X_\beta, G) & \to & \mathrm{Hom}(H_c^n(X_\beta), G) & \to & 0,
\end{array}$$

в которой обе горизонтальные последовательности точны, первый вертикальный гомоморфизм отделяет $\mathrm{Ext}(H_c^{n+1}(X), G)$ как прямое слагаемое в $\mathrm{Ext}(H_c^{n+1}(X_\beta), G)$, а последний — $\mathrm{Hom}(H_c^n(X), G)$ как прямое слагаемое в $\mathrm{Hom}(H_c^n(X_\beta), G)$. Тогда $\mathrm{Ker}(\pi_\beta)_*=0$, вместе с ним и $\mathrm{Ker}(\pi_\gamma)_*=0$, если $\gamma\geqq\beta$.

Заметим, что в условиях утверждения 2 из вышеупомянутой формулы, распадающейся в прямую сумму и из утверждения 1, следует, что существует $\beta\in\Gamma$, такое, что $\{H_n(X, G)\}_{\gamma\geqq\beta}$ отделяется как прямое слагаемое в $\{H_n(X_\gamma, G), \mathrm{Ext}((\pi_\gamma^\delta)^*, 1)+\mathrm{Hom}((\pi_\gamma^\delta)^*, 1)\}_{\gamma\geqq\beta}$ посредством $\mathrm{Ext}(\pi_\gamma^*, 1)+\mathrm{Hom}(\pi_\gamma^*, 1)$: $H_n(X, G)\to H_n(X_\gamma, G)$. И здесь гомоморфизмы гомологий с коэффициентами в G, определенные рассматриваемой формулой, не всегда совпадают с гоморфизмами, индуцированными отображениями π_γ^δ и π_γ.

В частности, когда спектр $\{X_k, \pi_k^l\}_{k=1}^\infty$ счетный, то $\pi: H_n(X, G)\to \varprojlim H_n(X_k, G)$ — эпиморфизм [4].

Отсюда получаем

Следствие 1. *Если $\{X_k, \pi_k^l\}_{k=1}^\infty$ — обратный спектр локально компактных метризуемых пространств и их собственных отображений, а целочисленные канонические гомологии пространства $X=\varprojlim X_k$ — конечнопорожденные в размерности $n-1, n, n+1$, то $\pi: H_n(X, G)\to\varprojlim H_n(X_k, G)$ — изоморфизм для произвольной группы G.*

Напомним, что $\mathrm{Ker}\,\pi=\varprojlim{}^{(1)} H_{n+1}(X_k, G)$ [8].

Расщепление спектра, аналогично утверждению 1, можно получить и в том случае, когда для пространства X имеется непрерывное отображение в некоторый полиэдр N, такое, что индуцированные им гомоморфизмы гомологий (когомологий) — изоморфизмы.

Лемма [1]. *Если* $\{X_\alpha, \pi^\beta_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ — *обратный спектр компактных пространств,* N — *полиэдр, а* $f: X=\overleftarrow{\lim} X_\alpha \to N$, *то существует* $\beta\in\Gamma$ *и* $f_\gamma: X_\gamma\to N$, *где* $\gamma\geq\beta$ *такие, что* $f_\gamma\pi_\gamma$ *и* f *гомотопны* ($\pi_\gamma: X\to X_\gamma$ — *проекция*).

Пусть H_* и H^* — произвольные теории гомологий и когомологий, X — компактное пространство, N — полиэдр, $f: X\to N$.

Из вышеупомянутой леммы получаем

Утверждение 3. *Если* f *индуцирует изоморфизм групп гомологий (когомологий) для некоторого* n, *а* $\{X_\alpha, \pi^\beta_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ — *обратный спектр компактных пространств с* $X=\overleftarrow{\lim} X_\alpha$, *то существует* $\beta\in\Gamma$, *такое, что постоянный спектр* $\{H_n(X)\}_{\gamma\geq\beta}$ *отделяется как прямое слагаемое в спектре* $\{H_n(X_\gamma), (\pi^\delta_\gamma)_*\}_{\gamma\geq\beta}$ *посредством* $(\pi_\gamma)_*: H_n(X)\to H_n(X_\gamma)$ (*постоянный спектр* $\{H^n(X)\}_{\gamma\geq\beta}$ *отделяется как прямое слагаемое в* $\{H^n(X_\gamma), (\pi^\delta_\gamma)^*\}_{\gamma\geq\beta}$ *посредством* $\pi^*_\gamma: H^n(X_\gamma)\to H^n(X)$). *В случае, когда* f_* — *изоморфизм для каждого* n, *выбор* β *не зависит от* n.

Пусть N — нерв некоторого покрытия пространства X.

Обозначим для X и покрытия α через $\alpha_*: H_*(X)\to H_*(\alpha)$ ($\alpha^*: H^*(\alpha)\to H^*(X)$) гомоморфизм, индуцированный каноническими отображениями X в нерв α.

Предложение 1. *Если для компактного пространства X существует открытое покрытие* α, *такое, что* $\alpha_*: H_*(X)\to H_*(\alpha)$ — *изоморфизм* ($\alpha^*: H^*(\alpha)\to H^*(X)$ — *изоморфизм*), *то с некоторого места* m *имеем* $H_k(X)=0$ ($H^k(X)=0$) *при* $k>m$.

Докажем предложение 1 для гомологий H_*. Пусть β — конечное покрытие X такое, что $\alpha<\beta$. Отметим сначала, что для конечного полиэдра β имеем $H_k(\beta)=0$ при $k>m=\dim\beta$. С другой стороны, из равенства $(\pi^\beta_\alpha)_*\beta_*=\alpha_*$, где π^β_α — проекция нерва β в нерв α, видно, что β^* — мономорфизм. Это дает право заключить, что и $H_k(X)=0$, если $k>m$.

Из предложения 1 видно, что существуют компакты X с конечнопорожденными спектральными когомологиями во всех размерностях, не имеющие покрытия α, для которого $\alpha^*: \check{H}^*(\alpha)\to\check{H}^*(X)$ — изоморфизм. Пример такого компакта — компактный букет $\vee_{k=1}^\infty S^k$, где S^k — k-мерная сфера, а диаметры сфер стремятся к нулю при $k\to\infty$. ($\check{H}^k(\vee_{k=1}^\infty S^k)=Z$ для каждого k).

2. Непрерывность относительно прямого предела. Остановимся сначала на случае, когда пространство X — объединение счетного числа своих подпространств, точнее $X=\bigcup_{k=1}^\infty X_k$, где $X_k\subset X_{k+1}$ для каждого k.

Пусть H^* — произвольная теория когомологий. Обозначим через $\gamma: H^*(X)\to\overleftarrow{\lim} H^*(X_k)$ гомоморфизм, индуцированный вложениями X_k в X. Гомоморфизм γ исследован в [6] и [8] при следующих условиях: В [6] X — нормальное пространство, X_k — замкнутые в X, $X_k\subset \operatorname{Int} X_{k+1}$, а H^* — произвольная Π-аддитивная теория когомологий. В [8], X — произвольное топологическое пространство, X_k — открытые в X, а H^* — спектральные когомологии с коэффициентами в некотором пучке над X. Показано [6, 8], что в этих ситуациях короткая последовательность

$$0 \to \varprojlim{}^{(1)} H^{n-1}(X_k, G) \to H^n(X, G) \xrightarrow{\gamma} \varprojlim H^n(X_k, G) \to 0$$

точна.

Напомним, что $\varprojlim{}^{(1)} H^{n-1}(X_k, G) = 0$, если $H^{n-1}(X_k, G)$ и $\varprojlim{}^{(1)} H^{n-1}(X_k, G)$ — счетные группы [8, лемма 3]. Тогда, имея в виду еще, что $\varprojlim{}^{(1)} H^{n-1}(X_k, G) \subset H^n(X, G)$, получаем

Предложение 2. *Если $H^{n-1}(X_k, G)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, и $H^n(X, G)$ — счетные группы, то γ — изоморфизм.*

Предложение 2 в условиях из [6] выполнено, в частности, для сингулярных и для спектральных когомологий. Для последних оно выполнено и в условиях из [8].

Для спектральных когомологий верно

Предложение 3. *Если для локально компактного метризуемого пространства X группа $\check{H}^n(X)$ счетная, то естественный гомоморфизм γ: $\check{H}^n(X) \to \varprojlim \check{H}^n(C)$ (по всем компактным множествам в X) является изоморфизмом.*

Действительно, для X существует последовательность компактных подмножеств, удовлетворяющих условиям из [6] и определяющих конфинальную часть в классе всех компактных подмножеств в X. Кроме того, если C — компакт, то для каждого n группа $\check{H}^n(C)$ счетная. Тогда предложение 3 следует из предложения 2.

Рассмотрим некоторые случаи, когда X непредставимо в виде счетной суммы своих компактных подпространств. Пусть $\{\zeta_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ — прямой спектр (необязательно счетный), G — произвольная группа, а $\gamma: \mathrm{Ext}(\varinjlim \zeta_\alpha, G) \to \varprojlim \mathrm{Ext}(\zeta_\alpha, G)$ — естественный гомоморфизм группы $\mathrm{Ext}(\varinjlim \zeta_\alpha, G)$ в $\varprojlim \mathrm{Ext}(\zeta_\alpha, G)$. Воспользуемся следующей теоремой.

Теорема [5]. *Если каждая группа ζ_α представима в виде прямой суммы циклических групп, то короткая последовательность*

$$0 \to \varprojlim{}^{(1)} \mathrm{Hom}(\zeta_\alpha, G) \to \mathrm{Ext}(\varinjlim \zeta_\alpha, G) \xrightarrow{\gamma} \varprojlim \mathrm{Ext}(\zeta_\alpha, G) \to 0$$

точна.

Будем говорить, что пространство X удовлетворяет формуле универсальных коэффициентов в размерности n относительно группы G и теорий гомологий и когомологий H_* и H^*, если короткая последовательность $0 \to \mathrm{Ext}(H_{n-1}(X, Z), G) \to H^n(X, G) \to \mathrm{Hom}(H_n(X, Z), G) \to 0$ естественна и точна.

Лемма. *Если пространство X, удовлетворяющее формуле универсальных коэффициентов в размерности n относительно некоторой группы G, теории гомологий с компактными носителями H_* и теории когомологий H^*, имеет конфинальную часть компактных подмножеств, удовлетворяющих этой формуле в размерности $n-1$, n и таких, что их целочисленные гомологии в размерности $n-2$ и $n-1$ представимы в виде прямой суммы циклических групп, то короткая последовательность*

$$0 \to \varprojlim^{(1)} H^{n-1}(C, G) \to H^n(X, G) \xrightarrow{\gamma} \varprojlim H^n(C, G) \to 0$$

(по всем компактным $C \subset X$) точна.

Доказательство. Для X и всех компактных подмножеств C_α, $\alpha \in \Gamma$, из условия леммы, выполнена формула универсальных коэффициентов в размерности n. Рассуждая стандартным образом, перейдем к обратному пределу в формулах для C_α. Отметим, что в рассматриваемых спектрах $\alpha < \beta \Longleftrightarrow C_\alpha \subset C_\beta$, а гомоморфизмы индуцированы вложениями $i_\alpha^\beta : C_\alpha \to C_\beta$, $\alpha < \beta$. Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to \operatorname{Ext}(\varinjlim H_{n-1}(C_\alpha), G) & \to & H^n(X, G) & \to & \operatorname{Hom}(H_n(X), G) \to 0 \\ \downarrow \gamma' & & \downarrow \gamma & & \downarrow 1 \\ 0 \to \varprojlim \operatorname{Ext}(H_{n-1}(C_\alpha), G) & \to & \varprojlim H^n(C_\alpha, G) & \to & \operatorname{Hom}(H_n(X), G) \to 0 \end{array}$$

(использована перестановочность функтора $\varprojlim$ с функтором Hom и равенство $H_*(X) = \varinjlim H_*(C_\alpha)$ для групп гомологий с компактными носителями). В диаграмме обе последовательности точны, сладовательно γ — эпиморфизм, если γ' — эпиморфизм и $\operatorname{Ker}\gamma = \operatorname{Ker}\gamma'$. Тогда, по теореме из [5], γ — эпиморфизм, а $\operatorname{Ker}\gamma = \varprojlim^{(1)} \operatorname{Hom}(H_{n-1}(C_\alpha), G)$. Покажем, что $\varprojlim^{(1)} \operatorname{Hom}(H_{n-1}(C_\alpha), G) = \varprojlim^{(1)} H^{n-1}(C_\alpha, G)$. Действительно, из точности естественной последовательности $0 \to \operatorname{Ext}(H_{n-2}(C_\alpha), G) \to H^{n-1}(C_\alpha, G) \to \operatorname{Hom}(H_{n-1}(C_\alpha), G) \to 0$ следует точность последовательности $0 \to \varprojlim \operatorname{Ext}(H_{n-2}(C_\alpha), (G) \to \varprojlim H^{n-1}(C_\alpha, G) \to \varprojlim \operatorname{Hom}(H_{n-1}(C_\alpha), G) \to \varprojlim^{(1)} \operatorname{Ext}(H_{n-2}(C_\alpha), G) \to \varprojlim^{(1)} H^{n-1}(C_\alpha, G) \to \varprojlim^{(1)} \operatorname{Hom}(H_{n-1}(C_\alpha), G) \to \varprojlim^{(2)} \operatorname{Ext}(H_{n-2}(C_\alpha), G) \to \cdots$ [13]. В ней $\varprojlim^{(i)} \operatorname{Ext}(H_{n-2}(C_\alpha), G) = 0$ при $i > 0$ [5, теорема 5, а)]. Следовательно, $\varprojlim^{(1)} \operatorname{Hom}(H_{n-1}(C_\alpha), G) = \varprojlim^{(1)} H^{n-1}(C_\alpha, G)$. Чтобы закончить доказательство леммы, заметим, что значения функтора $\varprojlim^{(i)}$, $i \geq 0$ не меняются при переходе к конфинальной части [13].

Рассмотрим некоторые приложения доказанной леммы. Напомним, что X гомологически локально связно в размерности n относительно некоторой теории гомологий H_*, если для каждого $x \in X$ и каждой окрестности U на x существует окрестность V на x, $V \subset U$ такая, что образ $H_n(V)$ в $H_n(U)$ при гомоморфизме, индуцированным вложением $V \to U$ — нулевой (при $n = 0$ — приведенные гомологии).

Если G — группа коэффициентов теории H_*, то гомологически локальную связанность вплоть до размерности n будем обозначать через hlc_G^n, а локальную связанность во всех размерностях — через hlc_G^∞.

Аналогичным образом определяется когомологически локальная связанность для когомологий H^* и символы clc_G^n и clc_G^∞.

Из леммы получаем

Предложение 4. *Если топологическое пространство X имеет конфинальную часть компактных подпространств, hlc_Z^n относительно сингулярных гомологий ${}_sH_*$, то короткая последовательность*

$$0 \to \varprojlim^{(1)} {}_sH^{n-1}(C, G) \to {}_sH^n(X, G) \xrightarrow{\gamma} \varprojlim {}_sH^n(C, G) \to 0,$$

где ${}_sH^*$ — сингулярные когомологии — точна для произвольной группы G.

Действительно, каждое топологическое пространство удовлетворяет формуле универсальных коэффициентов относительно произвольной группы G и сингулярных гомологий и когомологий. Кроме этого, если локально компактное пространство Y, hlc^n_Z относительно ${}_sH_*$, то при $k\leqq n-1$ группы ${}_sH_k(Y)$ естественно изоморфны группам ${}^{\mathrm{BM}}H^c_k(Y)$, где ${}^{\mathrm{BM}}H^c_*$ — гомологии Бореля — Мура с компактными носителями [12]. Тогда компактные C_α из условия предложения hlc^{n-1}_Z и относительно ${}^{\mathrm{BM}}H^c_*$, а для таких пространств группы ${}_sH_k(C_\alpha)={}^{\mathrm{BM}}H^c_k(C^\alpha)$ — конечнопорожденные, $k\leq n-1$ [11].

Предложение 5. *Если локально компактное хаусдорфово пространство X и конфинальная часть его компактных подмножеств — clc^n_Z относительно пучковых когомологий H^* с коэффициентами в постоянном пучке G, то последовательность*

$$0\to\varprojlim{}^{(1)}H^{n-1}(C,G)\to H^n(X,G)\xrightarrow{\gamma}\varprojlim H^n(C,G)\to 0$$

точна для произвольной группы G.

В этом случае пользуемся тем фактом, что для пространства X и для отмеченных в условии предложения 5 компактных пространств выполнена в необходимых размерностях формула универсальных коэффициентов относительно G, гомологий Бореля — Мура с компактными носителями и пучковых когомологий. Кроме того, для каждого компактного clc^n_Z пространства пучковые когомологии с коэффициентами в Z, $k\leq n$, а вместе с тем и гомологии Бореля-Мура, $k\leqq n-1$, конечнопорожденные [10]. В частности верно

Предложение 6. *Если локально компактное хаусдорфовое, слабо локально стягиваемое пространство X имеет систему компактных, слабо локально стягиваемых пространств, определяющую конфинальную часть среди всех компактных подмножеств в X, то последовательность*

$$0\to\varprojlim{}^{(1)}H^{n-1}(C,G)\to H^n(X,G)\xrightarrow{\gamma}\varprojlim H^n(C,G)\to 0$$

точна для произвольной группы G (H^* — пучковые когомологии).

Напомним, что X слабо локально стягиваемое, если для каждой точки $x\in X$ и окрестности U на x существует окрестность V на x, $V\subset U$, которая стягивается в x по U.

Предложение 7. *Если X — полиэдр, а $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ — его конечные подполиэдры, то для каждого n и произвольной группы G последовательность*

$$0\to\varprojlim{}^{(1)}H^{n-1}(X_\alpha,G)\to H^n(X,G)\xrightarrow{\gamma}\varprojlim H^n(X_\alpha,G)\to 0$$

точна. Если $H^n(X,G)$ — конечнопорожденная, то γ — изоморфизм.

Очевидно здесь лемма применима к классу $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$. Остановимся на последнем утверждении. Отметим, что когда $H^n(X,G)$ конечнопорожденная, то и группа $\mathrm{Ext}(H_{n-1}(X),G)\subset H^n(X,G)$ тоже конечнопорожденная (H_* и H^* — обычные гомологии и когомологии полиэдра). С другой стороны, $\mathrm{Ker}\,\gamma$ совпадает с максимальной полной подгруппой в $\mathrm{Ext}(H_{n-1}(X),G)$ [5], следовательно $\mathrm{Ker}\,\gamma=0$.

Пример локально компактного и счетного полиэдра, для которого $\mathrm{Ker}\,\gamma\neq 0$, показан в [7].

Отметим еще, что доказанные выше предложения можно сформулировать подходящим образом и для пар (X, A).

Припомним, что в случае, когда пространство X локально компактно и метризуемо, группа $\operatorname{Ker}\gamma=\underleftarrow{\lim}^{(1)} H^{n-1}(C, G)$ изоморфна группе $\Pi_{k=1}^{\infty} H^{n-1}(C_k, G)/\operatorname{Im} d_{n-1}$, где гомоморфизм $d_{n-1}: \Pi_{k=1}^{\infty} H^{n-1}(C_k, G) \to \Pi_{k=1}^{\infty} H^{n-1}(C_k, G)$ задается формулой $d_{n-1}(h_1, h_2, h_3, \dots)=(h_1-i_1^* h_2, h_2-i_2^* h_3, h_3-i_3^* h_4, \dots)$. Здесь C_k — компактные множества в X, $C_k \subset \operatorname{Int} C_{k+1}$, $k=1, 2, 3, \dots$, $X=\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$, а $i_k^*: H^{n-1}(C_{k+1}, G) \to H^{n-1}(C_k, G)$ — гомоморфизмы, индуцированные вложениями $i_k: C_k \to C_{k+1}$ [6; 2]. Аналогичное представление группы $\underleftarrow{\lim}^{(1)} H^{n-1}(C, G)$ в несчетном случае можно получить, пользуясь T-резольвентой Рооса [13; 5]. Напомним, как эта резольвента строится. Для обратного спектра $\zeta=\{H^{n-1}(C_\alpha, G), (i_\alpha^\beta)^*\}_{\alpha\in\Gamma}$ определяется спектр $R(\zeta)=\{B_\alpha=\Pi_{\gamma\leq\alpha} H^{n-1}(C_\gamma, G), \varphi_\alpha^\beta\}_{\alpha\in\Gamma}$, где φ_α^β — проектирование прямого произведения на сомножители. Гомоморфизм $\varepsilon: \zeta \to R(\zeta)$, определенный формулой $\varepsilon(h_a)=((i_\gamma^\alpha)^* h_\alpha)_{\gamma\leq\alpha}$, $h_\alpha \in H^{n-1}(C_\alpha, G)$, определяет мономорфизм тождественного функтора в функтор R. Кроме этого, $R(\eta)$ ацикличен для каждого спектра η. Это дает возможность построить ациклическую резольвенту спектра ζ при помощи функтора R. Одномерная когомологическая группа комплекса, состоящего из обратных границ спектров этой резольвенты, совпадает с группой $\underleftarrow{\lim}^{(1)} H^{n-1}(C_\alpha, G)$.

Таким образом, для $\underleftarrow{\lim}^{(1)} H^{n-1}(C_\alpha, G)$ получаем следующее представление. Пусть $\Gamma_\alpha=\Pi_{\gamma<\alpha} H^{n-1}(C_\gamma, G)$, а $Z^1\subset\Pi_{\alpha\in\Gamma}\Gamma_\alpha$ — подгруппа в $\Pi_{\alpha\in\Gamma}\Gamma_\alpha$, состоящая из таких элементов $\{(h_\gamma^\alpha)_{\gamma<\alpha}\}_{\alpha\in\Gamma}$, для которых выполнено следующее условие: если $t\leqq\alpha$, $t\leq\beta$, то $(h_\gamma^\alpha-h_\gamma^\beta)_{\gamma\leq t}\in\varepsilon(A_t)$ (полагаем $h_\alpha^\alpha=h_\beta^\beta=0$). Припомним, что $\varepsilon: A_t \to \Pi_{\gamma\leq t} H^{n-1}(C_\gamma, G)$ задается формулой $\varepsilon(h_t)=((i_\gamma^t)^* h_t)_{\gamma\leq t}$. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы $(h_\gamma^\alpha-h_\gamma^\beta)_{\gamma\leq t}\in\varepsilon(A_t)$, является условие: каждый раз, когда $p\leq q\leq t$, то $h_p^\alpha-(i_p^q)^* h_q^\alpha=h_p^\beta-(i_p^q)^* h_q^\beta$. Обозначим через B^1 подгруппу в Z^1, состоящую из элементов вида $\{(h_\gamma-(i_\gamma^\alpha)^* h_\alpha)_{\gamma<\alpha}\}_{\alpha\in\Gamma}$, где $\{h_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}\in\Pi_{\alpha\in\Gamma} H^{n-1}(C_\alpha, G)$. Тогда $\underleftarrow{\lim}^{(1)} H^{n-1}(C_\alpha, G)=Z^1/B^1$.

В счетном случае Z^1 изоморфна подгруппе в $\Pi_{k=1}^{\infty} H^{n-1}(C_1, G)\times H^{n-1}(C_2, G)\times\cdots\times H^{n-1}(C_k, G)$, состоящей из элементов $(h_1^1, h_1^2\times h_2^2, h_1^3\times h_2^3\times h_3^3, \dots)$, где $h_k^n-(i_k^{k+1})^* h_{k+1}^n=h_k^{n+1}-(i_k^{k+1})^* h_{k+1}^{n+1}$ при $k=1, 2, 3 \dots n-1$ и $h_n^n=h_n^{n+1}-(i_n^{n+1})^* h_{n+1}^{n+1}$, $n=2, 3, 4, \dots$. Группа B^1 составлена из элементов вида $(h_1-(i_1^2)^* h_2;\ h_1-(i_1^3)^* h_3, h_2-(i_2^3)^* h_3;\ h_1-(i_1^4)^* h_4, h_2-(i_2^4)^* h_4, h_3-(i_3^4)^* h_4; \dots)$, $(h_k)_{k=1}^{\infty}\in\Pi_{k=1}^{\infty} H^{n-1}(C_k, G)$.

Сопоставляя каждому элементу $(h_1^1, h_1^2\times h_2^2, h_1^3\times h_2^3\times h_3^3, \dots)\in Z^1$ элемент по диагонали $(h_1^1, h_2^2, h_3^3, \dots)\in\Pi_{k=1}^{\infty} H^{n-1}(C_k, G)$, получаем естественный изоморфизм групп $\underleftarrow{\lim}^{(1)} H^{n-1}(C_k, G)$ и $\Pi_{k=1}^{\infty} H^{n-1}(C_k, G)/\operatorname{Im} d_{n-1}$.

Отметим еще одно применение вышеупомянутой теоремы из [5] и точной последовательности $0\to\operatorname{Ext}(H_c^{n+1}(X), G)\to H_n(X, G)\to\operatorname{Hom}(H_c^n(X), G)\to 0$, выполненной для каждого G. Рассуждая аналогичным образом как при доказательстве леммы, можно утверждать, что следствие 1, часть 1, выполнено и в том случае, когда обратный спектр $\{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}_{\alpha\in\Gamma}$ несчетный, но группы $H_c^{n+1}(X_\alpha)$ представимы в виде прямой суммы циклических групп.

3. Пространства, гомологически локально связные относительно канонических гомологий с компактными носителями. Обозначим через $\gamma: H^c_*(X, G) \to \check{H}^c_*(X, G)$ естественное отображение канонических гомологий с компактными носителями в спектральные гомологии с компактными носителями [3].

Известно, что если X — локально компактное метризуемое пространство, hlc^n_Z относительно H^c_*, то $\gamma: H^c_k(X, Z) \to \check{H}^c_k(X, Z)$ — изоморфизм для $k \leq n$ [9; 8].

Оказывается, что этот результат верен для произвольной группы G.

Теорема. *Если (X, A) — локально компактные метризуемые пространства, обе hlc^n_Z относительно H^c_*, то $\gamma: H^c_k(X, A, G) \to \check{H}^c_k(X, A, G)$ — изоморфизм при $k \leq n$ для произвольной группы G.*

Доказательство. Для простоты будем предполагать что $A = \varnothing$ (доказательство одно и то же для одного пространства и для пар). Так как канонические гомологии с компактными носителями совпадают с гомологиями Бореля—Мура с компактными носителями ${}^{\mathrm{BM}}H^c_*$, когда группа коэффициентов — с конечном числом образующих [3], то X является hlc^n_Z и относительно ${}^{\mathrm{BM}}H^c_*$. Пользуясь теперь тем фактом, что естественная последовательность $0 \to {}^{\mathrm{BM}}H^c_k(X) \otimes G \to {}^{\mathrm{BM}}H^c_k(X, G) \to \mathrm{Tor}({}^{\mathrm{BM}}H^c_{k-1}(X), G) \to 0$ точна для произвольной группы G, $k = 1, 2, 3, \ldots$, можно утверждать, что X является hlc^n_G относительно ${}^{\mathrm{BM}}H^c_*$. Доказательство стандартное. Пусть $x \in X$ и U — окрестность x. Существуют окрестности V и W на x, такие, что $W \subset V \subset U$ и гомоморфизмы групп гомологий, индуцированные вложениями $W \to V$ и $V \to U$ — нулевые в размерности $k \leq n$. Получаем, что в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} & & {}^{\mathrm{BM}}H^c_k(W, G) & \to & \mathrm{Tor}({}^{\mathrm{BM}}H^c_{k-1}(W), G) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ {}^{\mathrm{BM}}H^c_k(V) \otimes G & \to & {}^{\mathrm{BM}}H^c_k(V, G) & \to & \mathrm{Tor}({}^{\mathrm{BM}}H^c_{k-1}(V), G) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ {}^{\mathrm{BM}}H^c_k(U) \otimes G & \to & {}^{\mathrm{BM}}H^c_k(U, G), & & \end{array}$$

где вертикальные гомоморфизмы индуцированные вложениями, а вторая горизонтальная последовательность точна, левый и правый вертикальный гомоморфизм — нулевые при $k \leq n$. Тогда и гомоморфизм ${}^{\mathrm{BM}}H^c_k(W, G) \to {}^{\mathrm{BM}}H^c_k(U, G)$ нулевой при $k \leq n$ [10], следовательно X является hlc^n_G относительно ${}^{\mathrm{BM}}H^c_*$. Но если это так, то как показано в [14], группы ${}^{\mathrm{BM}}H^c_k(X, G)$, $\check{H}^c_k(X, G)$ и $\check{H}_k(X, G)$ естественно изоморфны для $k \leq n$. Поэтому гомоморфизм $\gamma: H^c_k(X, G) \to \check{H}^c_k(X, G)$ можно заменить гомоморфизмом $\gamma: H^c_k(X, G) \to \check{H}_k(X, G)$, $k \leq n$. Отметим, что $\check{H}_k(X, G) = \varprojlim H^c_k(\alpha, G)$, где обратный предел взят по всем локально конечным покрытиям пространства X (на категории полиэдров симплициальные гомологии совпадают с H^c_* как Σ-аддитивные). Изоморфность $\gamma: H^c_k(X, G) \to \check{H}_k(X, G)$, $k \leq n$ получается как следствие следующего предложения.

Если для теории гомологий H_*, $H_p = 0$ при $p < 0$, а X — паракомпактное хаусдорфово, hlc^n_G относительно H_* пространство, то в любое от-

крытое покрытие α пространства X можно вписать такое локально конечное покрытие β, что в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} H_k(X) & \xrightarrow{(\pi_\alpha)_*} & H_k(\alpha) \\ \downarrow(\pi_\beta)_* & & \uparrow(\pi^\beta_\alpha)_* \\ H_k(\beta) & \xrightarrow{1} & H_k(\beta) \end{array}$$

$\operatorname{Ker}(\pi_\beta)_* = 0$ *при* $k \leq n$, *а* $\operatorname{Im}(\pi^\beta_\alpha)_* \subset \operatorname{Im}(\pi_\alpha)_*$ *при* $k \leq n+1$.

Сформулированное предложение является очевидным следствием теоремы 3.3 из [12].

Отметим специально, что верно

Предложение 8. *Если (X, A) — локально компактные метризуемые пространства, обе* hlc^n_Z *относительно* H^c_*, *то группы* $H^c_k(X, A, G)$, ${}^{\mathrm{BM}}H^c_k(X, A, G)$, $\check{H}^c_k(X, A, G)$ и $\check{H}_k(X, A, G)$ *естественно изоморфны для произвольной группы G и $k \leq n$.*

В случае, когда (X, A) — компактные пространства, изоморфность γ в условиях теоремы показано в [15]. Действительно, в этом случае группы $H_k(X, A, Z)$, а вместе с ними и группы $\check{H}^k(X, A, Z)$, — конечнопорожденные, $k \leq n$. Тогда, как показано в [15], γ — изоморфизм для произвольной группы G.

Изоморфность γ при $k \leq n-1$ в компактном случае содержится и в следствие 1 настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Стинрод, С. Эйленберг. Основания алгебраической топологии. Москва. 1958.
2. М. Атья, И. Макдональд. Введение в коммутативную алгебру. Москва, 1972.
3. Е. Г. Скляренко. Теория гомологий и аксиома точности. *Успехи мат. наук*, **24**, 1969, № 5, 87—140.
4. Е. Г. Скляренко. Теоремы единственности в теории гомологий. *Мат. сб.*, **85**, 1971, № 2, 201—223.
5. В. И. Кузьминов. О производных функторах функтора проективного предела. *Сиб. мат. ж.*, **8**, 1967, № 2, 333—345.
6. С. В. Петкова. Об аксиомах гомологий. *Мат. сб.*, **90**, 1973, № 4, 607—624.
7. С. В. Петкова. Пример полиэдра, когомологии которого не изоморфны обратному пределу когомологий его конечных подполиэдров. *Годишник Соф. унив., Мат. фак.*, **66**, 1974, 159—161.
8. А. Э. Харлап. Локальные гомологии и когомологии, гомологическая размерность и обобщенные многообразия. *Мат. сб.*, **96**, 1975, № 3, 347—373.
9. В. Г. Мирюк. Гомологии и когомологии множеств и их окрестностей. *Мат. сб.*, **92**, 1973, № 2, 306—318.
10. G. E. Bredon. Sheaf theory. New York, 1967.
11. A. Borel, J. C. Moore. Homology theory for locally compact spaces. *Michigan Math. J.*, **7**, 1960, No. 2, 137—160.
12. C. N. Lee. The regular convergence theorem. *Michigan Math. J.*, **14**, 1967, No. 2, 207—217.
13. J. E. Roos. Sur les foncteurs dérivés de lim. Applications. *C. R. Acad. sci. Paris*, **252**, 1961, № 24, 3706—3704.
14. O. Jussila. On homology theories in locally connected spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I*, No. 340, 1964.
15. N. E. Steenrod. Regular cycles for compact metric spaces. *Ann. of Math.*, **41**, 1940, 833—851.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике 1000 София П. Я. 373

Поступила 27. 10. 1977