Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

О СТРУКТУРЕ ГАУССОВСКИХ МАРТИНГАЛОВ

ДИМИТР И. ХАДЖИЕВ

В работе изучается разложение гауссовского мартингала на непрерывную и чисто разрывную компоненту, которые тоже оказываются гауссовскими мартингалами. В качестве приложения находится явный вид решения соответствующего линейного уравнения.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ — (полное) вероятностное пространство с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_t)$, $t \in R_+=[0, +\infty)$. Рассмотрим произвольный мартингал $M=(M_t), t \in R_+$ (относительно потока $\mathcal{F}$), имеющий непрерывные справа и допускающие пределы слева траектории. Известно [5], что M допускает единственное разложение

$$M=M^c+M^d \tag{1}$$

в виде суммы непрерывного мартингала M^c и компенсированной суммы скачков M^d.

В этой работе изучается структура компоненты M^d в предположении, что исходый мартингал M является гауссовским процессом.

Необходимые определения вводятся и комментируются в **1.** Основной результат содержится в **2.** Здесь, в частности, показано, что гауссовская компенсированная сумма скачков является чисто разрывным процессом со скачками в (неслучайные) моменты скачков своей скобки. Используя этот факт, в заключительном пункте 3 мы находим явный вид решения линейного интегрального уравнения со свободным членом, являющимся гауссовским мартингалом.

Результаты этой работы частично использовались при выводе уравнений фильтрации, анонсированных в сообщении автора [9].

1. Определения и комментарии. 1. Пусть Π — некоторое подмножество множества $\Omega \times R_+$. Множество Π называется пренебрежимым, если его проекция на Ω имеет P-меру нуль. Два случайных процесса $Y=(Y_t)$, $t \in R_+$ и $Z=(Z_t)$, $t \in R_+$, называются неотличимыми, если множество

$$\{(\omega,t): \omega \in \Omega,\ t \in R_+,\ Y_t(\omega) \neq Z_t(\omega)\}$$

пренебрежимо. В этом случае мы пишем $Y=Z$ и допуская вольность, отождествляем каждый класс неотличимых процессов с любым его представителем. Процессы Y и Z называются неотличимыми на множестве $D \subset \Omega \times R_+$, если процессы $Y 1_D$ и $Z 1_D$, где 1_D — индикатор множества D, неотличимы.

Если P — почти все траектории процесса Z допускают пределы слева, используются также обозначения $Z_{t-}=\lim_{s \uparrow t} Z_s$, $Z_-=(Z_{t-})$, $t \in R_+$, и $\Delta Z=Z-Z_-$.

Случайный процесс $Z=(Z_t)$, $t \in R_+$, называется согласованным с семейством σ-алгебр $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_t)$, $t \in R_+$, если при любом $t \in R_+$ случайная величина $Z_t=Z_t(\omega)$ $\mathcal{F}_t$-измерима. В этом случае мы используем запись $Z=(Z_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in R_+$.

Семейство σ-алгебр $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_t)$, $t\in R_+$, будем называть потоком, если оно не убывает ($\mathcal{F}_s\subseteq\mathcal{F}_t$, $s\leqq t$) и непрерывно справа ($\mathcal{F}_t=\bigcap\limits_{u>t}\mathcal{F}_u$). Всюду далее рассматривается фиксированный поток σ-алгебр $\mathcal{F}$ такой, что $\mathcal{F}_0$ содержит все P-нулевые множества из $\mathcal{F}_\infty$.

2. Обозначим $\mathfrak{M}$ класс мартингалов M относительно потока $\mathcal{F}$, имеющих выходящие из нуля непрерывные справа и допускающие пределы слева (быть может за исключением $\lim\limits_{t\to\infty}$) траектории. Напомним, что, если случайный процесс $M\in\mathfrak{M}$, то $M_0=0$ и выполняется $E|M_t|<\infty$, $E(M_{t+s}/\mathcal{F}_t)=M_t$, $s, t\in R_+$.

Далее, $\mathfrak{M}^2$ будет обозначать класс мартингалов M из $\mathfrak{M}$, удовлетворяющих при любом $t\in R_+$ условию $EM_t^2<\infty$.

Случайный процесс, выходящий из нуля и имеющий неубывающие, непрерывные справа траектории, называется возрастающим процессом. Процесс органиченной вариации определяется как разность двух конечных возрастающих процессов.

Случайный процесс $Z=(Z_t, \mathcal{F}_t)$, $t\in R_+$, называется предсказуемым, если отображение $(\omega, t)\to Z_t(\omega)$ измеримо относительно σ-алгебры $\mathcal{D}$ на $\Omega\times R_+$, порожденной согласованными с $\mathcal{F}$ случайными процессами с непрерывными слева траекториями.

Если $M\in\mathfrak{M}^2$, то существует единственный с точностью до неотличимости предсказуемый возрастающий процесс $\langle M\rangle$, такой, что $M^2-\langle M\rangle\in\mathfrak{M}$ (см. [2], [8]). Если же $M, N\in\mathfrak{M}^2$, то единственный (с точностью до неотличимости) предсказуемый процесс ограниченной вариации $\langle M, N\rangle$ такой, что $MN-\langle M, N\rangle\in\mathfrak{M}$ определяется по формуле $\langle M, N\rangle=(\langle M+N\rangle-\langle M-N\rangle)/4$.

Процессы M и N из класса $\mathfrak{M}^2$ называются ортогональными, если процесс $MN\in\mathfrak{M}$, или, что эквивалентно, если $\langle M,N\rangle=0$. Мартингал $M\in\mathfrak{M}^2$ ортогонален себе тогда и только тогда, когда он неотличим от нуля. Или иначе, $\langle M\rangle=0$ эквивалентно тому, что $M=0$.

Обозначим $\mathfrak{M}_c^2$ класс мартингалов M из $\mathfrak{M}^2$, имеющих непрерывные траектории. Пусть далее $\mathfrak{M}_d^2$ — класс мартингалов M из $\mathfrak{M}^2$, ортогональных ко всем процессам класса $\mathfrak{M}_c^2$. Из результатов работы [5] нетрудно вывести, что любой процесс M из $\mathfrak{M}^2$ допускает, причем единственное с точностью до неотличимости, представление (1) с мартингалами $M^c\in\mathfrak{M}_c^2$ и $M^d\in\mathfrak{M}_d^2$. В терминологии указанной работы M^c называется непрерывной частью, а M^d — компенсированной суммой скачков процесса M из $\mathfrak{M}^2$.

3. Встречающиеся далее интегралы по процессам ограниченной вариации (в частности, по возрастающим процессам) следует понимать как интегралы Лебега — Стилтьеса (для любого фиксированного $\omega\in\Omega$). Используя подход работы [5], ниже мы определяем стохастические интегралы по марингалам класса $\mathfrak{M}^2$.

Пусть мартингал $M\in\mathfrak{M}^2$. Введем два класса предсказуемых процессов $Z=(Z_t, \mathcal{F}_t)$, $t\in R_+$, полагая

$$L_0^2(M)=\left\{Z: E\int\limits_{(0,\infty)} Z_s^2\, d\langle M\rangle_s<\infty\right\},$$

$$L^2(M)=\left\{Z: \int\limits_{(0,t]} Z_s^2\, d\langle M\rangle_s<\infty,\ P\text{— п. н.}, t\in R_+\right\}.$$

Известно, что для любого $Z \in L^2(M)$ существует единственный с точностью до неотличимости мартингал $Z * M \in \mathfrak{M}^2$, такой, что

$$\langle Z * M, N \rangle = Z * \langle M, N \rangle \tag{2}$$

при любом $N \in \mathfrak{M}^2$, где

$$Z * \langle M, N \rangle = \left(\int\limits_{(0,t]} Z_s \, d \langle M, N \rangle_s, \mathcal{F}_t \right), t \in R_+, \tag{3}$$

— процесс, определенный значениями интегралов Лебега — Стилтьеса. При этом процесс $Z * M$ удовлетворяет условию

$$\Delta(Z * M) = Z \, . \, \Delta M, \tag{4}$$

обозначается так:

$$Z * M = \left(\int\limits_{(0,t]} Z_s \, dM_s, \mathcal{F}_t \right), t \in R_+,$$

и называется стохастическим интегралом от процесса $Z \in L^2(M)$ по мартингалу $M \in \mathfrak{M}^2$.

Стохастический интеграл $Z * M$ можно получить и предельным переходом, отправляясь от интегралов от простых процессов класса $L_0^2(M)$ (см. [7], гл. 5, §4).

В случае, когда мартингал M является процессом ограниченной вариации, стохастический интеграл $Z * M$ неотличим от интеграла Лебега — Стилтьеса (см. [5]), обозначаемого тем же символом.

4. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\xi(\omega) \in R^n$, $n \geq 1$, называется гауссовским (или нормальным), если его характеристическая функция $\psi(\lambda) = E \exp\{i(\lambda, \xi)\}$, где $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in R^n$, $(\lambda, \xi) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k$, имеет вид $\psi(\lambda) = \exp\{i(\lambda, m) - (\mathbb{C}\lambda, \lambda)/2\}$ с некоторым вектором $m = (m_1, \ldots, m_n) \in R^n$ и неотрицательно определенной симметрической матрицей $\mathbb{C} = (\mathbb{C}_{jk})$, $j, k = 1, \ldots, n$. Если $n = 1$, принято говорить о гауссовской (нормальной) случайной величине ξ.

Система случайных величин $\{\xi_a, a \in \mathfrak{U}\}$ называется гауссовской, если любой (конечномерный) вектор $(\xi_{a}, \ldots, \xi_{a_n})$, $a_k \in \mathfrak{U}$, $k = 1, \ldots, n$ является гауссовским.

Случайный процесс $Z = (Z_t, \mathcal{F}_t)$ $t \in R_+$, называется гауссовским, если $\{Z_t, t \in R_+\}$ — гауссовская система.

При рассмотрении гауссовских процессов мы, не ограничивая общности, будем предполагать, что поток σ-алгебр $\mathcal{F}$ порождается некоторым сепарабельным (быть может векторным) гауссовским процессом, образующим совместно со всеми рассматриваемыми процессами гауссовскую систему.

Мартингал $M = (M_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in R_+$, $M, \mathfrak{M}$ называется гауссовским, если он представляет собой гауссовский процесс.

Очевидно, если M — гауссовский мартингал, то $M \in \mathfrak{M}^2$ и, следовательно, существует процесс $\langle M \rangle$. Предположение на поток $\mathcal{F}$ и теорема о нормальной корреляции (см. [7, гл. 13, §1]) позволяют вывести, что гауссовский мартингал является процессом с независимыми приращениями. Более того, приращения $M_t - M_s$, $0 \leq s \leq t < \infty$ не зависят от событий σ-алгебры $\mathcal{F}_s$ и, следовательно, $\langle M \rangle_t = EM_t^2$, $t \in R_+$, представляет собой неслучайную функцию, неубывающую и непрерывную справа.

Рассматриваемые далее задачи для простоты сформулированы только для случая скалярных гауссовских мартингалов. Все результаты без труда переносятся на случай гауссовских мартингалов со значениями из пространства R^n, $n \geq 1$.

2. Разрывная компонента гауссовского мартингала. Пусть $M = (M_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in R_+$, — фиксированный гауссовский мартингал. Обозначим

$$F = F(M) = \{t \in R_+ : \Delta \langle M \rangle_t > 0\}, \tag{6}$$

$$F_T = F_T(M) = F \cap [0, T], \ T \in (0, \infty), \tag{7}$$

$$F^c = R_+ \setminus F, \quad F^c_T = [0, T] \setminus F_T. \tag{8}$$

Определим стохастические интегралы (очевидно неслучайные функции 1_F, $1_{F^c} \in L^2(M)$)

$$M' = 1_{F^c} * M, \ M'' = 1_F * M. \tag{9}$$

При этом заведомо имеет место равенство

$$M = M' + M''. \tag{10}$$

Цель настоящего параграфа — показать, что (10) задает (единственное) представление гауссовского мартингала M в виде суммы его непрерывной мартингальной части и компенсированной суммы скачков (см. (1)).

Лемма 1. *Процесс M' является гауссовским мартингалом из $\mathfrak{M}^2_c$.*

Доказательство. Обозначим $\mathcal{L}(M)$ замкнутое в L^2 $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, P)$ многообразие, порожденное линейными комбинациями вида $\lambda_1 M_{t_1} + \ldots + \lambda_n M_{t_n}$, $t_k \in R_+$, $k = 1, \ldots, n$. $\mathcal{L}(M)$ является гауссовской системой (см. [10]) Тот факт, что функция 1_{F^c} неслучайна, и конструкция стохастического интеграла в [7, гл. 5, §4] показывают, что случайные величины $M'_t \in \mathcal{L}(M)$, $t \in R_+$ Следовательно, мартингал M' является гауссовским.

С другой стороны, из (2) получаем, что $\langle M' \rangle = 1_{F^c} * \langle M \rangle = \langle M \rangle^c$ представляет собой непрерывную часть функции $\langle M \rangle$. Тогда согласно [1, теорема 6, гл. IV, §5] гауссовский процесс M' имеет непрывные траектории.

Лемма 2. *Процесс M'' является гауссовским мартингалом из $\mathfrak{M}^2_d$.*

Доказательство. Из (10) и леммы 1 вытекает, что M'' является гауссовским мартингалом. Покажем теперь, что $M''N \in \mathfrak{M}$ при любом N из $\mathfrak{M}^2_c$.

В силу (2) получаем $\langle M'', N \rangle = 1_F * \langle M, N \rangle$, где согласно лемме 1 в [6] траектории процесса $\langle M, N \rangle$ абсолютно непрерывны относительно траекторий процесса $\langle N \rangle$ и относительно функции $\langle M \rangle$.

С одной стороны, имеем

$$\langle M'', N \rangle_t = \int_{[0,t]} 1_F(s) \frac{d\langle M, N \rangle_s}{d\langle M \rangle_s} \, d\langle M \rangle_s = \sum_{s \leq t} 1_F(s) \frac{\Delta \langle M, N \rangle_s}{\Delta \langle M \rangle_s} \Delta \langle M \rangle_s.$$

С другой стороны, так как $N \in \mathfrak{M}^2_c$, то $\langle N \rangle$ — процесс с непревывными траекториями ([8, гл. VIII, T25]). Следовательно, $\langle M, N \rangle$ также непрерывен и $\Delta \langle M, N \rangle = 0$.

Таким образом, $\langle M'' N \rangle = 0$. Но тогда $M'' N \in \mathfrak{M}$ и лемма доказана.

Теорема 1. *Непрерывная мартингальная часть M^c и компенсированная сумма скачков M^d гауссовского мартингала M определяются формулами* (см. (9)) $M^c = M'$, $M^d = M''$.

Доказательство. Из лемм 1 и 2 и формулы (10) следует, что M' и M'' задают разложение гауссовского мартингала M на непрерывный мартингал и компенсированную сумму скачков. Утверждение теоремы следует из единственности такого разложения, доказанной в [5].

Заметим далее, что множество F не более чем счетно. Тогда множество F_T, $T\in(0,\infty)$, тоже не более чем счетно. Пусть $F_T=\{t_1, t_2, \ldots\}$ — произвольная нумерация элементов F_T, T — фиксировано, $T\in(0,\infty)$.

Обозначим $F_T^n=\{t_1, \ldots, t_n\}$, $n\geq 1$, и пусть $M^{(0)}=0$, $M^{(n)}=1_{F_T^n}*M$. Так как множество F_T^n конечно, конструкция стохастического интеграла как предел интегралов от простых функций приводит к формуле

$$M_t^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}\Delta M_{t_k\wedge t}^T=\sum_{\substack{0<s\leq t\\ s\in F_T^n}}\Delta M_s, \tag{11}$$

где $M^T=(M_{t\wedge T}, \mathcal{F}_t)$, $t\in R_+$.

При этом

$$\sum_{n\geq 0}E[(M_T^{(n)}-M_T^{(n+1)})^2]=\sum_{n\geq 1}E[(\Delta M_{t_n})^2]=\sum_{n\geq 1}\Delta\langle M\rangle_{t_n}$$

$$=\sum_{s\in F_T}\Delta\langle M\rangle_s=\sum_{s\leq T}\Delta\langle M\rangle_s<\infty.$$

Поскольку $M^{(n)}\in\mathcal{M}^2$, $n\geq 1$, то из леммы 1 в [5] следует, что существует мартингал $M^*\in\mathcal{M}^2$ такой, что для P — почти всех $\omega\in\Omega$ имеет место равномерная на $[0, T]$ сходимость траекторий

$$M_t^{(n)}\underset{[0,\,T]}{\Longrightarrow}M_t^*,\quad n\to\infty. \tag{12}$$

Но, с другой стороны, очевидно

$$E[(M_T^{(n)}-M_T'')^2]=E[(\int_{(0,\,T]}1_{F_T\setminus F_T^n}(s)\,dM_s)^2]$$

$$=\int_{(0,\,T]}1_{F_T\setminus F_T^n}(s)\,d\langle M\rangle_s=\sum_{s\in F_T\setminus F_T^n}\Delta\langle M\rangle_s\to 0,\quad n\to\infty.$$

Из мартингального свойства получаем, что $M_t''=M_t^*$ P — п. н., $t\in[0, T]$ и в силу непрерывности справа траекторий M'' и M^* на $[0, T]$ и [2, гл. III, Т6], окончательно

$$M''=M^*\quad\text{на}\quad\Omega\times[0, T]. \tag{13}$$

Здесь M^* зависит от способа нумерации элементов множества F_T, а M'' от него не зависит. Равенство (13) показывает, что перенумерация множества F_T приводит снова к неотличимому от M'' процессу M^*, а (11) и (12) показывают, что (с точностью до неотличимости)

$$M_t''=\sum_{s\leq t}\Delta M_s \tag{14}$$

для всех $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$. В силу произвольности T равенство (14) имеет место на всем пространстве $\Omega \times R_+$, причем сумму следует понимать как равномерную сходимость типа (12) на любом отрезке $[0, T]$ любых конечных сумм (11) независимо от способа нумерации точек в F.

В частности, имеет место следующий общий результат.

Теорема 2. *Гауссовская компенсированная сумма скачков является чисто разрывным процессом со скачками в неслучайные моменты скачков своей скобки.*

Как следствие из формулы (14) и разложения (10) получаем и такое утверждение.

Теорема 3. *Непрерывная мартингальная часть гауссовского мартингала совпадает с его непрерывной частью.*

3. Решение линейного уравнения. Пусть $M = (M_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in R_+$, — гауссовский мартингал, $Y_0 = (Y_0, \mathcal{F}_0)$ — гауссовская случайная величина, независящая от мартингала M, и $b = b(t)$, $t \in R_+$, — неслучайная функция ограниченной вариации, непрерывная справа.

В этом параграфе находится решение $Y = (Y_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in R_+$, линейного уравнения

$$Y_t = Y_0 + \int_{(0, t]} Y_{s-}\, db(s) + M_t \tag{15}$$

в классе процессов с непрерывными справа и допускающими пределы слева траекториями.

Заметим прежде всего, что согласно результатам работы [4] указанное решение Y существует и единственно с точностью до неотличимости. Ниже для процесса Y приводится явная формула.

Функция $b = b(t)$, $t \in R_+$, имеет не более чем счетное число скачков размера -1 на $R_+ \setminus \{0\}$, т. е. существует (конечная или бесконечная) последовательность чисел $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_k < \cdots \leqq \infty$ таких, что $\Delta b(s_k) = b(s_k) - b(s_k-) = -1$, $k \geqq 1$, исчерпывающая все скачки функции $b = b(t)$, $t \in R_+$, размера -1. Очевидно, при этом выполняется соотношение $\Delta Y_{s_k} = Y_{s_k} - Y_{s_k-} = Y_{s_k-} \Delta b(s_k) + \Delta M_{s_k} = \Delta M_{s_k} - Y_{s_k-}$. Следовательно,

$$Y_{s_k} = \Delta M_{s_k}, \quad k \geqq 1. \tag{16}$$

Будем решать уравнение (15) на полуинтервале $[s_k, s_{k+1})$, $k \geqq 0$, с начальным условием Y_{s_k}, независящим от приращений $M_t - M_{s_k}$, $s_k \leqq t < s_{k+1}$, в силу (16) и исходного предположения на Y_0.

Известно (см. [3]), что (однородное) уравнение

$$\varphi(t, s_k) = 1 + \int_{(s_k, t]} \varphi(s-, s_k)\, db(s) \tag{17}$$

имеет единственное решение ($\varphi(s_k, s_k) = 1$, $k \geqq 0$), задаваемое формулой

$$\varphi(t, s_k) = \exp\{b(t) - b(s_k)\} \prod_{s_k < s \leqq t} (1 + \Delta b(s)) e^{-\Delta b(s)} \tag{18}$$

$$= \exp\{b'_k(t)\} \prod_{s_k < s \leqq t} (1 + \Delta b(s)),$$

где $b'_k(t)=[b(t)-b(s_k)]^c$ — непрерывная часть функции $b(t)-b(s_k)$, $s_k\leqq t<s_{k+1}$, $k\geqq 0$. Отметим сразу же, что

$$\inf_{s_k\leqq t<s_{k+1}\wedge T}|\varphi(t, s_k)|>0 \tag{19}$$

при любом $T\in[s_k, \infty)$, $k\geqq 0$. Действительно,

$$\inf_{s_k\leqq t<s_{k+1}\wedge T}|\varphi(t, s_k)|\geqq\exp\{-\int_{(s_k, T\wedge s_{k+1}]}|db'_k(s)|\}$$
$$\times\inf_{s_k\leqq t<s_{k+1}\wedge T}\Big|\prod_{s_k<s\leqq t}(1+\Delta b(s))\Big|>0$$

так как

$$\int_{(s_k, T\wedge s_{k+1}]}|db'_k(s)|<\infty,\quad \sum_{s_k<s<s_{k+1}\wedge T}|\Delta b(s)|<\infty$$

и, следовательно, любое из произведений $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\Delta b(t_n))$, $s_k<t_n<s_{k+1}\wedge T$, $n\geqq 1$, сходится абсолютно и, в частности, не расходится к нулю, что влечет за собой (19).

Пусть функция $\varphi=\varphi(t)$, $t\in R_+$, определена по формуле

$$\varphi(t)=\varphi(t, s_k),\quad s_k\leqq t<s_{k+1},\quad k\geqq 0. \tag{20}$$

Из (19) следует, что функция $\varphi^{-1}=[\varphi(t)]^{-1}$, $t\in R_+$, корректно определена и ограничена на любом из отрезков $[0, T]$, $T\in R_+$.

Следовательно, при любом $t\in R_+$ выполняется неравенство

$$\int_{(0, t]}\varphi^{-2}(s)d\langle M\rangle_s<\infty, \tag{21}$$

и мы можем образовать процесс (см. (16) и (18))

$$Y_t^{(k)}=\varphi(t, s_k)(Y_{s_k}+\int_{(s_k, t]}\varphi^{-1}(s)\,dM_s),\quad s_k\leqq t<s_{k+1},\quad k\geqq 0. \tag{22}$$

Теорема 4. *Единственное решение $Y=(Y_t, \mathcal{F}_t)$, $t\in R_+$, уравнения* (15) *определяется формулой*

$$Y_t=Y_t^{(k)},\quad s_k\leqq t<s_{k+1},\quad k\geqq 0, \tag{23}$$

где $Y_t^{(k)}$ определено в (22).

Доказательство. Достаточно проверить, что процесс Y из (23) является решением уравнения (15) на любом из полуинтервалов $[s_k, s_{k+1})$, $k\geqq 0$, и даже на (s_k, s_{k+1}), $k\geqq 0$, так как (16) выполняется по построению.

На интервале (s_k, s_{k+1}) согласно (23), (22), формуле Ито [5] и результатам предыдущего параграфа получаем

$$Y_t=Y_{s_k}+\int_{(s_k, t]}(Y_{s_k}+\int_{(s_k, s)}\varphi^{-1}(u)\,dM_u)\,d\varphi(s, s_k)$$
$$+\int_{(s_k, t]}\varphi(s-, s_k)\varphi^{-1}(s)\,dM_s+\sum_{s_k<s\leqq t}\Delta\varphi(s, s_k)\cdot\varphi^{-1}(s)\,\Delta M_s$$

$$= Y_{s_k} + \int_{(s_k, t]} Y_{s-}\, db(s) + \int_{(s_k, t]} \frac{1}{1+\Delta b(s)} [1_{\{\Delta \langle M\rangle_s = 0\}}$$

$$+ 1_{\{\Delta \langle M\rangle_s \neq 0\}}]\, dM_s + \sum_{s_k < s \leq t} \varphi(s-, s_k)\Delta b(s)\varphi^{-1}(s, s_k)\Delta M_s$$

$$= Y_{s_k} + \int_{(s_k, t]} Y_{s-} db(s) + \int_{(s_k, t]} \frac{1}{1+\Delta b(s)}\, dM_s^c$$

$$+ \int_{(s_k, t]} \frac{1}{1+\Delta b(s)}\, dM_s^d + \sum_{s_k < s \leq t} \frac{\Delta b(s)}{1+\Delta b(s)}\, \Delta M_s^d$$

$$= Y_{s_k} + \int_{(s_k, t]} Y_{s-} db(s) + \int_{(s_k, t]} dM_s^c + \int_{(s_k, t]} dM_s^d$$

$$= Y_{s_k} + \int_{(s_k, t]} Y_{s-} db(s) + M_t - M_{s_k}.$$

Итак, если $s_k < t < s_{k+1}$, то

$$Y_t = Y_{s_k} + \int_{(s_k, t]} Y_{s-} db(s) + M_t - M_{s_k}. \tag{24}$$

Вместе с равенствами (16) соотношение (24) приводит к (15). Теорема доказана.

Следствие. *Из (22) и (23) видно, что процесс Y является гауссовским марковским процессом.*

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Гихман. А. В. Скороход. Введение в теорию случайных процессов. Москва, 1965.
2. К. Деллашери. Емкости и случайные процессы. Москва, 1975.
3. C. Doleans-Dade Quelques applications de la formule de changement de variables pour les semimartingales, *Z. Wahr. verw. Geb.*, **16**, 1970, 181—194.
4. C. Doleans-Dade. On the existence and unicity of solutions of stochastic integral equations. *Z. Wahr. verw. Geb.*, **36**, 1976, 93—101.
5. C. Doleans-Dade, P. A. Meyer. Integrales stochastiques par rapport aux martingales locales. *Lecture Notes in Mathematics*, **124**, 1970, 77—107.
6. Р. Ш. Липцер. Гауссовские мартингалы и обобщение фильтра Калмана-Бьюси. Теория вероятностей и ее применения, **20**, 1975, № 2, 292—308.
7. Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. Статистика случайных процессов. Москва, 1974.
8. П. А. Мейер. Вероятность и потенциалы. Москва, 1973.
9. D. I. Hadjiev. A generalization of the Kalman-Bucy filter, Sixth Balkan mathematical congress, Varna, 3—9 June 1977, Summaries, p. 281.
10. А. Н. Ширяев. Случайные процессы. Москва, 1972.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 22. 9. 1977