Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ S-ПРОИЗВОДНЫХ ЛИПШИЦОВЫХ ФУНКЦИЙ

БЛАГОВЕСТ Х. СЕНДОВ, СПАС П. ТАШЕВ, ПЕНЧО П. ПЕТРУШЕВ

Естественным обобщением понятия производной функции действительного переменного является S-производная сегментной функции. В настоящей статье полностью характеризуются дополненные графики S-производных липшицовых функций.

Обозначим через $\mathfrak{F}_\Delta$ множество всех функций, определеных на интервале $\Delta=[a, b]$, значениями которых являются множества действительных чисел. Вообще говоря, функции из $\mathfrak{F}_\Delta$ неоднозначны.

Если $E\subset\Delta$ и $f\in\mathfrak{F}_\Delta$, то через $f(E)$ будем обозначать рестрикцию функции f на множестве E, т. е. $f(E;\ x)=f(x)$ для $x\in E$. Для функции $f(E)$ вводим верхнюю и нижнюю функции Бэра

$$S(E, f;\ x)=\lim_{\delta\to 0}\ \sup\{y: y\in f(\xi),\ \xi\in[x-\delta,\ x+\delta]\cap E\},$$

$$I(E, f;\ x)=\lim_{\delta\to 0}\ \inf\{y: y\in f(\xi),\ \xi\in[x-\delta,\ x+\delta]\cap E\}.$$

Функции $S(E, f;\ x)$ и $I(E, f;\ x)$ определены для всех $x\in\bar{E}$ ($\bar{E}$ — замыкание множества E). Если $E=\Delta$, будем обозначать $S(\Delta, f)=S(f)$ и $I(\Delta, f)=I(f)$.

Определение 1. *Дополненным графиком $F(E, f)$ функции $f(E)$ на множестве E называется функция $F(E, f; x)=[I(E,\ f;\ x),\ S(E, f;\ x)]$ для $x\in\bar{E}$.*

Если $E=\Delta$, будем обозначать $F(\Delta, f)=F(f)$ (см. [2]).

Совокупность всех ограниченных функций из $\mathfrak{F}_\Delta$, которые совпадают со своим дополненным графиком, обозначим через F_Δ, т. е. $f\in\mathsf{F}_\Delta$, если f ограниченная и $F(f)=f$ (см. [2]).

Будем считать, как обычно, что функции $f, g\in\mathfrak{F}_\Delta$ эквивалентны ($f\sim g$), если $\mu(\{x: f(x)\neq g(x)\})=0$. (Здесь $\mu(E)$ — лебегова мера множества E.)

Определение 2. *Множество M_Δ определяем как множество всех ограниченных на Δ функций $f\in\mathsf{F}_\Delta$, таких, что для каждой функции $g\in\mathsf{F}_\Delta$, $g\sim f$, выполнено $f\subset g$.*

Например, все функции $f\in\mathsf{F}_\Delta$, для которых $S(f)$ и $I(f)$ непрерывны, принадлежат множеству M_Δ, а функция $\delta(x)=0$, $x\in[-1, 1]\setminus 0$ и $\delta(0)=[0, 1]$ принадлежит классу F_Δ, но не принадлежит M_Δ. Через $S(\bar{R})$ обозначим множество всех сегментов из действительных чисел, т. е. $a\in S(\bar{R})$, если $a=\{x: a_1\leq x\leq a_2\}$, где a_1, $a_2\in\bar{R}$ ($\bar{R}$ — множество всех действительных чисел R и символы $-\infty$, $+\infty$). Пусть a, $b\in S(\bar{R})$. Объединение a и b, $a\vee b$, определим как минимальный сегмент, который содержит a и b. Сегмент $a*b$ определим как сегмент $\{x: x=\xi*\eta,\ \xi\in a,\ \eta\in b\}$, где * одна из арифметических операций: $+, -, ., /$). Когда операция $\xi*\eta$ не определена для некоторой пары

(ξ, η), по определению $a*b=[-\infty, \infty]$. Введенные выше операции между сегментами более подробно обсуждаются в [3].

Определение 3 [3]. *Сегментной границей последовательности* $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, $a_i \in S(\bar{R})$, *называется сегмент*

$$\operatorname{Slim}_{i\to\infty} a_i=\bigcap_{i=1}^{\infty}\Big(\bigvee_{n=i}^{\infty} a_n\Big).$$

Определение 4 [3]. *Сегментной границей* $\operatorname{Slim} f(x))$ *функции* $f\in F_\Delta$ *при* $x\to x_0$, $x\neq x_0$, $x\in\Delta$, *будем называть пересечение всех интервалов, содержащих все сегменты вида* $\operatorname{Slim}_{n\to\infty} f(x_n)$, *где* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— любая последовательность, такая, что* $x_n\in\Delta$ *и* $\lim_{n\to\infty} x_n=x_0$.

Определение 5 [1]. *Сегментная производная функции* $f\in F_\Delta$ *определяется через*

$$D(f;\, x)=\operatorname{Slim}_{h\to 0} h^{-1}(f(x+h)-f(x)),$$

где $h\in R$, $h\neq 0$, x, $x+h\in\Delta$.

Сформулируем наше основное утверждение.

Теорема. *Пусть* $f\in F_\Delta$. *Для того, чтобы* f *была дополненным графиком сегментной производной липшицовой функции, необходимо и достаточно, чтобы* $f\in M_\Delta$.

Перед тем как доказать теорему, сформулируем и докажем некоторые вспомогательные утверждения.

1. Множества m_Δ. Пусть $E\subset\Delta$ и $h>0$. Обозначим $E(x, h)=E\cap(x-h,\, x+h)$.

Определение 6. *Будем говорить, что множество* $E\in m_\Delta$, *если* $E\subset\Delta$, E *— измеримо и для любых* $x\in E$ *и* $h>0$ *выполнено* $\mu(E(x, h))>0$. *Отметим, что* $\varnothing\in m_\Delta$.

Лемма 1. *Для любого измеримого множества* $E\subset\Delta$ *существуют множества* E_0, E_1 *такие, что* $E=E_0\cup E_1$, $E_0\cap E_1=\varnothing$, $\mu(E_0)=0$ *и* $E_1\in m_\Delta$.

Доказательство. Пусть $p(A;\, x)=\lim_{h\to 0}\mu(A(x, h))/2h$, где $A\subset\Delta$ — измеримое множество. Если $p(A;x)=1$, то x называется точкой плотности множества A.

Справедливо следующее утверждение [4, 316]:

Почти все точки любого измеримого множества A *являются точками плотности для* A.

Пусть E_0 — множество тех точек из E, которые не являются точками плотности для E и $E_1=E\setminus E_0$. Тогда из вышеуказанного утверждения следует, что $\mu(E_0)=0$. Ввиду того, что любая точка множества E_1 является точкой плотности множества E_1, $E_1\in m_\Delta$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Объединение счетного числа множеств из* m_Δ *принадлежит* m_Δ.

Утверждение леммы очевидно.

Лемма 3 (основная). *Для любого множества* $E\in m_\Delta$, $\Delta=[a, b]$, *существуют множества* E_1, $E_2\in m_\Delta$ *такие, что*

1) $$E_1\subset E,\quad E_2\subset E,\quad E_1\cap E_2=\varnothing,$$

2) $$\mu(E_1)+\mu(E_2)=\mu(E),$$

3) $$\bar{E}_1=\bar{E}_2=\bar{E}.$$

Доказательство. Пусть $E \in m_\Delta$. Если $E=\emptyset$, то утверждение леммы очевидно. Допустим, что $E \neq \emptyset$. Сначала докажем, что для каждого интервала $(\alpha, \beta) \subset \Delta$, такого, что $\mu(E \cap (\alpha, \beta))=\delta>0$, существует множество $K(\alpha, \beta) \subset E \cap (\alpha, \beta)$ со свойствами:

а) $K(\alpha, \beta) \in m_\Delta$,

б) $\mu(K(\alpha, \beta))=\mu(E \cap (\alpha, \beta))/2=\delta/2$,

в) существуют интервалы $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1}^\infty$, для которых $K(\alpha, \beta)=E \cap (\alpha, \beta)) \setminus \bigcup_{i=1}^\infty (\alpha_i, \beta_i)$ и $[\alpha_i, \beta_i] \cap [\alpha_j \cap \beta_j]=\emptyset$ при $i \neq j$, $(\alpha_i, \beta_i) \subset (\alpha, \beta)$, $i=1, 2, \ldots$,

г) $\mu(E \cap (\alpha_i, \beta_i))=4^{-i}\delta$, $i=1, 2, \ldots$,

д) для любой точки $x \in K(\alpha, \beta)$ и любого $\varepsilon>0$ существует i_0 такое, что $(\alpha_{i_0}, \beta_{i_0}) \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

Действительно, существуют $\alpha_1, \beta_1 \in (\alpha, \beta)$, $\alpha_1<\beta_1$, для которых $\mu(E \cap (\alpha, \alpha_1)) =\mu(E \cap (\beta_1, \beta))=(3/8)\delta$ и $\mu(E \cap (\alpha_1, \beta_1))=4^{-1}\delta$.

Аналогично существуют точки $\alpha_2, \beta_2 \in (\alpha, \alpha_1)$, $\alpha_2<\beta_2$ и точки $\alpha_3, \beta_3 \in (\beta_1, \beta)$, $\alpha_3<\beta_3$ такие, что $\mu(E \cap (\alpha, \alpha_2))=\mu(E \cap (\beta_2, \alpha_1))=\mu(E \cap (\beta_1, \alpha_3))=\mu(E \cap (\beta_3, \beta)) =(3/8)^2\delta$ и $\mu(E \cap (\alpha_2, \beta_2))=\mu(E \cap (\alpha_3, \beta_3))=4^{-2}\delta$ и т. д. Получаем последовательность интервалов $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1}^\infty$, где $\mu(E \cap (\alpha_i, \beta_i))=4^{-n}\delta$, $i=2^{n-1}, 2^{n-1}+1, \ldots, 2^n-1$, $n=1, 2, \ldots$ Положим

$$K(\alpha, \beta)=(E \cap (\alpha, \beta)) \setminus \bigcup_{i=1}^\infty (\alpha_i, \beta_i).$$

Докажем, что так определенное множество $K(\alpha, \beta)$ удовлетворяет свойствам а) —д).

Утверждения б), в) и г) следуют из определения множества $K(\alpha, \beta)$.

Обозначим через $\{\Delta_n^i\}_{i=1}^{2^n}$, $n=1, 2, \ldots$ дополнительные интервалы множества $\bigcup_{i=1}^{2^n-1} (\alpha_i, \beta_i)$ до $[\alpha, \beta]$. Тогда

$$K(\alpha, \beta) \subset \bigcup_{i=1}^{2^n} \Delta_n^i, \quad n=1, 2, \ldots \tag{1}$$

Из определения интервалов (α_i, β_i), $i=1, 2, \ldots$ следует, что

$$\mu(E \cap \Delta_n^i)=(3/8)^n\delta, \quad i=1, 2, \ldots, 2^n, \quad n=1, 2, \ldots, \tag{2}$$

$$\mu(K(\alpha,\beta) \cap \Delta_n^i)=(3/8)^n\delta/2, \quad i=1, 2, \ldots, 2^n, \quad n=1, 2, \ldots \tag{3}$$

Докажем, что для любой точки $x \in K(\alpha, \beta)$ и любого $\varepsilon>0$ существуют n_0, i_0 такие, что

$$(\alpha_{n_0}, \beta_{n_0}) \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon), \tag{4}$$

$$\Delta_{n_0}^{i_0} \subset (x-\varepsilon, x+\varepsilon). \tag{5}$$

Тогда из (4) получим д), а из (5), ввиду (3), получим а).

Из (1) следует, что существует последовательность $\{\Delta_n^{i_n}\}_{n=1}^\infty$, для которой $x \in \Delta_n^{i_n}$, $n=1, 2, \ldots$ Пусть $\Delta_n^{i_n}=[c_n, d_n]$, $n=1, 2, \ldots$

Докажем утверждения (4) и (5), когда x является внутренней точкой множества $K(\alpha, \beta)$. Ввиду (3) и так как $E \in m_\Delta$, существует N такое, что для всех $n>N$ существуют интервалы $\Delta_n^{j_n}=[a_n, b_n]$ и $\Delta_n^{k_n}=[e_n, f_n]$, где $1 \leq j_n$, $k_n \leq 2^n$, $a_n<b_n$

$<c_n<d_n<e_n<f_n$, и интервалы $\Delta_n^{j_n}$, $\Delta_n^{k_n}$ — ближайшие к интервалу $\Delta_n^{i_n}$ из $\{\Delta_n^i\}_{i=1}^{2^n}$. Очевидно, для $n>N$ имеем $a_n \leqq a_{n+1}<f_{n+1}\leqq f_n$. Тогда ввиду того, что $E\in m_\Delta$ и $\lim_{n\to\infty}\mu(E\cap(a_n, f_n))=\lim_{n\to\infty}(3(3/8)^n\delta+2(1/4)^n\delta)=0$, следует, что или $\lim_{n\to\infty}a_n=x$, или $\lim_{n\to\infty}f_n=x$, откуда следуют (4) и (5).

Если x не является внутренней точкой множества $K(\alpha, \beta)$, то (4) и (5) доказываются аналогичным образом.

Используя множества типа $K(\alpha, \beta)$, построим множества E_1, E_2, удовлетворяющие утверждениям леммы.

Положим $F_1=K(a, b)$. Из построения множества $K(a, b)$ (свойство в)) следует, что существуют $\{(\alpha_i^1, \beta_i^1)\}_{i=1}^\infty$ такие, что $F_1=E\setminus\bigcup_{i=1}^\infty(\alpha_i^1, \beta_i^1)$.

Положим $F_2=\bigcup_{i=1}^\infty(K(\alpha_i^1, \beta_i^1)$. Тогда аналогично существуют интервалы $\{(\alpha_i^2, \beta_i^2)\}_{i=1}^\infty$, для которых $F_2=(E\setminus E_1)\setminus\bigcup_{i=1}^\infty(\alpha_i^2, \beta_i^2)$ и т. д. Следовательно, существует последовательность интервалов $\{(\alpha_i^n, \beta_i^n)\}_{i=1}^\infty$, $n=1, 2, \ldots$, такие, что

$$F_n=\bigcup_{i=1}^\infty K(\alpha_i^{n-1}, \beta_i^{n-1}), \quad n=2, 3, \ldots, \tag{6}$$

$$F_n=\left(E\setminus\bigcup_{i=1}^{n-1}F_i\right)\setminus\bigcup_{i=1}^\infty(\alpha_i^n, \beta_i^n), \quad n=1, 2, \ldots \tag{7}$$

Так как $K(\alpha_i^{n-1}, \beta_i^{n-1})\in m_\Delta$ (свойство а)), то из леммы 2 следует, что $F_n\in m_\Delta$, $n\geqq 2$. Кроме того, $F_1=K(a, b)\in m_\Delta$.

Положим $E_1=\bigcup_{i=1}^\infty F_{2i-1}$, $E_2=\bigcup_{i=1}^\infty F_{2i}$. Тогда из Леммы 2, ввиду того что $F_n\in m_\Delta$, $n=1, 2, \ldots$, следует, что $E_1, E_2\in m_\Delta$.

Из определений множеств F_n, $n=1, 2, \ldots$, следует утверждение 1) леммы.

Из свойства б) множества $K(\alpha, \beta)$ и из (6), (7) следует, что

$$\mu(F_n)=2^{-n}\mu(E), \quad n=1, 2, \ldots \tag{8}$$

Тогда $\mu(E_1)+\mu(E_2)=\sum_{n=1}^\infty\mu(F_n)=\mu(E)$, т. е. утверждение 2) леммы, тоже выполнено.

Докажем утверждение 3) леммы. Пусть $\varepsilon>0$ и $E(x, \varepsilon)\neq\emptyset$. Достаточно доказать, что $E_1(x, \varepsilon)\neq\emptyset$ и $E_2(x, \varepsilon)\neq\emptyset$. Так как $E(x, \varepsilon)\neq\emptyset$ и $E\in m_\Delta$, то $\mu(E(x, \varepsilon))>0$ и из 2) следует, что или $E_1(x, \varepsilon)\neq\emptyset$, или $E_2(x, \varepsilon)\neq\emptyset$. Пусть $E_1(x, \varepsilon)\neq\emptyset$. Докажем, что и $E_2(x, \varepsilon)\neq\emptyset$. Если $\xi\in E_1(x, \varepsilon)$, то из определения множества E_1 и из (6) следует, что или $\xi\in K(\alpha_i^{2n-1}, \beta_i^{2n-1})$ для некоторых $i\geqq 1$ и $n\geqq 1$, или $\xi\in K(a, b)$. Из (7) и свойства д) множества $K(\alpha, \beta)$ следует, что существует интервал $(\alpha_k^{2n}, \beta_k^{2n})$, такой, что $(\alpha_k^{2n}, \beta_k^{2n})\subset(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Тогда из б) и г) следует, что $K(\alpha_k^{2n}, \beta_k^{2n})\neq\emptyset$ и, следовательно, $E_2(x, \varepsilon)\neq\emptyset$, так как $K(\alpha_k^{2n}, \beta_k^{2n})\subset E_2(x, \varepsilon)$. Лемма доказана.

2. Функции класса M_Δ. Укажем несколько характеристик функций из M_Δ.

Лемма 4. *Если $f\in\mathfrak{F}_\Delta$, то $S(f)$ и $I(f)$ измеримы.*

Утверждение следует из полунепрерывности $S(f)$ и $I(f)$.

Лемма 5. *Для того, чтобы $f\in M_\Delta$, необходимо и достаточно, чтобы $f\in\mathfrak{F}_\Delta$ и $F(E, f)=f$ для каждого множества E, для которого $E\subset\Delta$ и $\mu(\Delta\setminus E)=0$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $f\in M_\Delta$. Любому множеству $E\subset\Delta$, (для которого $\mu(\Delta\setminus E)=0$, сопоставляем функцию

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{для} \quad x\in E,\\ [I(E,f;\,x),\ S(E,f;\,x)] & \text{для} \quad x\in\Delta\setminus E.\end{cases}$$

Так как $g\sim f$, то $f\subset g$. Из определения 1 следует, что $g=F(E,f)$. Но $F(E,f)\subset f$. Следовательно, $F(E,f)=f$.

Достаточность. Пусть $f\in \mathbb{F}_\Delta$ и для любого множества $E\subset\Delta$ такого, что $\mu(\Delta\setminus E)=0$, выполнено $F(E,f)=f$. Допустим, что $f\notin M_\Delta$. Тогда существует функция $g\in \mathbb{F}_\Delta$, $g\sim f$ и существует точка $x_0\in\Delta$ такие, что или $S(f;\,x_0)>S(g;\,x_0)$, или $I(f;\,x_0)<I(g;\,x_0)$. Пусть $E=\{x:f(x)=g(x)\}$ и

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{для} \quad x\in E,\\ [\max(I(f;\,x),\ I(g;\,x)),\ \min(S(f;\,x),\ S(g;\,x))] & \text{для} \quad x\in\Delta\setminus E.\end{cases}$$

Тогда $h\sim f$, $F(h)\subset F(f)$ и $F(h)\neq F(f)$. С другой стороны, $F(E,f)=F(E,h)\subset F(h)$. Следовательно, $F(E,f)\neq f$, что противоречит условию. Лемма доказана.

Лемма 6. *Для того, чтобы $f\in M_\Delta$, необходимо и достаточно, чтобы $f\in\mathbb{F}_\Delta$, $S(E,f)=S(f)$ и $I(E,f)=I(f)$ для каждого множества E, для которого $E\subset\Delta$ и $\mu(\Delta\setminus E)=0$.*

Доказательство леммы следует из леммы 5 и из того, что $F(f;\,x)=[I(f;\,x),\ S(f;\,x)]$ для $x\in\Delta$.

Лемма 7. *Для того, чтобы $f\in M_\Delta$, необходимо и достаточно, чтобы $f\in\mathbb{F}_\Delta$,*

$$\{x:S(f;\,x)>a\}\in m_\Delta \quad \text{и} \quad \{x:I(f;\,x)<a\}\in m_\Delta \tag{9}$$

для каждого $a\in R$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f\in M_\Delta$. Допустим, что существует такое $a\in R$, для которого $E=\{x:S(f;\,x)>a\}\notin m_\Delta$. Тогда существуют точка $x_0\in E$ и число $\varepsilon>0$, такие, что $\mu(E(x_0,\varepsilon))=0$. Пусть $E_1=\Delta\setminus E(x_0,\varepsilon)$. Очевидно, $\mu(\Delta\setminus E_1)=0$ и $S(E_1,f)\neq S(f)$. Следовательно, ввиду леммы 6, $f\notin M_\Delta$, которые противоречит условию.

Достаточность. Пусть для любого $a\in R$ выполнено (9). Допустим, что $f\notin M_\Delta$. Тогда из леммы 6 следует, что существует $E\subset\Delta$, $\mu(\Delta\setminus E)=0$ и $S(E,f)\neq S(f)$ или $I(E,f)\neq I(f)$. Предположим, что $S(E,f)\neq S(f)$. Так как $S(E,f;\,x)\leqq S(f;\,x)$ для $x\in\Delta$, то существует точка $x_0\in\Delta$, для которой $S(E,f;\,x_0)<S(f;\,x_0)$. Пусть $2\varepsilon=S(f;\,x_0)-S(E,f;\,x_0)$ и $a=S(E,f;\,x_0)+\varepsilon$. Из определения $S(E,f;\,x_0)$ следует, что существует $\delta>0$ такое, что $S(E,f;\,x)\leqq a$, для $x\in E\cap(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$. Тогда $E_1=\{x:S(f;\,x)>a\}\notin m_\Delta$, так как $x_0\in E_1$ и $\mu(E_1(x_0,\varepsilon))=0$, которое противоречит условию. Лемма доказана.

Ввиду того, что $\sim$ является отношением эквивалентности, множество $\mathbb{F}_\Delta$ разбивается на взаимно непересекающиеся классы, эквивалентных функций. Обозначим через K_f класс функций из $\mathbb{F}_\Delta$, эквивалентных функций $f\in\mathbb{F}_\Delta$.

Лемма 8. *Для любого класса эквивалентности K_f существует единственная функция g такая, что $g\in K_f$ и $g\in M_\Delta$.*

Доказательство. Пусть P — множество всех рациональных чисел и пусть $A_r=\{x:S(f;\,x)>r\}$, $B_r=\{x:I(f;\,x)<r\}$, где $r\in P$. Так как функции

$S(f)$ и $I(f)$ измеримы, то множества A_r и B_r измеримы для каждого $r\in P$. Ввиду леммы 1 существуют множества A'_r и B'_r такие, что $\mu(A'_r)=\mu(B'_r)=0$, $A_r\setminus A'_r\in m_\Delta$ и $B_r\setminus B'_r\in m_\Delta$. Положим $E'=\left(\bigcup_{r\in P} A'_r\right)\cup\left(\bigcup_{r\in P} B'_r\right)$ и $E=\Delta\setminus E'$.

Рассмотрим функцию $g(x)=[I(E, f; x), S(E, f; x)]$ для $x\in\bar{E}=\Delta$. Так как $\mu(E)=\mu(\Delta)$, то $g\sim f$, т. е. $g\in K_f$. Покажем, что $g\in\mathsf{M}_\Delta$. Действительно, допустим, что $g\notin\mathsf{M}_\Delta$. Тогда ввиду леммы 7 существует $a\in R$ такое, что или $E_1=\{x: S(g; x)>a\}\notin m_\Delta$, или $E_2=\{x: I(g; x)<a\}\notin m_\Delta$. Пусть, например, $E_1\notin m_\Delta$. Тогда существуют точка $x_0\in E_1$ и число $\varepsilon>0$ такие, что $\mu(E_1(x_0, \varepsilon))=0$. Пусть $r\in P$ и $S(g; x_0)>r>a$. Множество $E_3=\{x: S(g; x)>r\}$ не принадлежит m_Δ, так как $E_3(x_0, \varepsilon)\subset E_1(x_0, \varepsilon)$ и $x_0\in E_3$.

С другой стороны, $E_3=\{x: S(E, f; x)>r\}=(A_r\setminus A'_r)\setminus D$, где множество D такое, что $\mu(D)=0$. Из того, что $A_r\setminus A'_r\in m_\Delta$ и $\mu(D)=0$, следует, что и $(A_r\setminus A'_r)\setminus D\in m_\Delta$, т. е. $E_3\in m_\Delta$. Из полученного противоречия следует что $g\in\mathsf{M}_\Delta$.

Из определения множества M_Δ (определение 2) следует, что множество $K_f\cap\mathsf{M}_\Delta$ состоит только из одного элемента. Лемма доказана.

Заметим, что утверждение леммы 8 показывает существование взаимнооднозначного соответствия между множеством M_Δ и множеством классов эквивалентности $\{K_f\}$. Легко видно, что для любого $f\in\mathsf{F}_\Delta$ имеем $K_f\cap\mathsf{M}_\Delta = \cap(h: h\in K_f)$.

3. Доказательство теоремы. Необходимость. Пусть функция $f\in\mathrm{Lip}_M 1$ на интервале Δ, т. е. для всех $x', x''\in\Delta$ имеем $|f(x')-f(x'')|\leq M|x'-x''|$. Тогда выполнено [1]

$$\sup\{y: y\in D(f; x),\ x\in\Delta\}\leq M. \tag{10}$$

Допустим, что $F(D(f))\notin\mathsf{M}_\Delta$. Из леммы 7 следует, что существует точка $a\in R$ такая, что или $E_1=\{x: S(D(f); x)>a\}\notin m_\Delta$, или $E_2=\{x: I(D(f);\ x)<a\}\notin m_\Delta$ Пусть, например, $E_1\notin m_\Delta$. Тогда существует точка $x_0\in E_1$ и число $\varepsilon>0$, для которых $\mu(E_1(x_0, \varepsilon))=0$. Для функции $\varphi(x)=f(x)-ax$ выполнено $D(\varphi)=D(f)-a$ [1]. Следовательно, $E_1=\{x: S(D(\varphi); x)>0\}$. Из (10) и из того, что $\mu(E_1(x_0, \varepsilon))=0$, следует, что $\varphi(x)$ — монотонно невозрастающая на $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ [4, 325]. Тогда $E_1(x_0, \varepsilon)=\varnothing$, что противоречит нашему допущению. Необходимость доказана.

Достаточность. Доказательство выполним для интервала $\Delta=[0, 1]$. Пусть $f\in\mathsf{M}_\Delta$ и $\sup\{y: y\in f(x),\ x\in\Delta\}\leq M$. Согласно лемме 4 $S(f)$ измерима, тогда из теоремы Лузина следует существование множеств $\{E_i\}_{i=1}^\infty$, таких, что $E_i\subset\Delta$, $\mu(E_i)=2^{-i}$, $i=1, 2, \ldots$, $E_i\cap E_j=\varnothing$ для $i\neq j$ и $S(E_i, f)$ непрерывна на E_i. Ввиду леммы 1 будем считать, что $E_i\in m_\Delta$, $i=1, 2, \ldots$

Рассмотрим функции $I(E_i, f)$, $i=1, 2, \ldots$ Как и выше, существуют множества $\{E_{ij}\}_{j=1}^\infty$, $E_{ij}\subset E_i$, $j=1, 2, \ldots$, такие, что

$$\mu(E_{ij})=2^{-i-j},\quad i, j=1, 2, \ldots, \tag{11}$$

$$E_{ij}\cap E_{ek}=\varnothing,\quad \text{для}\quad i\neq e\quad \text{или}\quad j\neq k, \tag{12}$$

$$E_{ij}\in m_\Delta \tag{13}$$

и $I(E_{ij}, f)$ непрерывна на E_{ij}, $i, j=1, 2, \ldots$

Пусть E_{ij}^1 и E_{ij}^2 — множества из леммы 3 для E_{ij}. Положим $E_1 = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} E_{ij}^1$, $E_2 = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} E_{ij}^2$, $E = E_1 \cup E_2$. Тогда из (11) заключаем, что

$$\mu(E) = 1, \tag{14}$$

а из (12) и из свойства а) леммы 3 заключаем, что $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Положим $E_0 = [0, 1] \setminus E$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} S(f;\, x) & \text{для} \quad x \in E_1 \\ I(f;\, x) & \text{для} \quad x \in E_2 \cup E_0 \end{cases}$$

и $y(x) = \int_0^x \varphi(t)dt$. Очевидно, $y \in \mathrm{Lip}_M 1$. Докажем, что

$$E(\varphi) = f, \tag{15}$$

$$F(D(y)) = F(\varphi). \tag{16}$$

Для доказательства равенства (15) достаточно показать, что $S(\varphi) = S(f)$ и $I(\varphi) = I(f)$. Допустим противное. Пусть, например, $S(\varphi) \neq S(f)$. Так как $\varphi \subset f$, то существует точка $x_0 \in \Delta$, для которой $S(\varphi;\, x_0) < S(f;\, x_0)$. Если $3\varepsilon = S(f;\, x_0) - S(\varphi;\, x_0)$, то из определения $S(\varphi;\, x_0)$ следует, что существует $\delta > 0$ такое, что

$$\varphi(x) \leq S(\varphi;\, x_0) + \varepsilon, \qquad x \in [x_0 - \delta,\, x_0 + \delta]. \tag{17}$$

Из леммы 7 следует $E_3 = \{x : S(f;\, x) > S(\varphi;\, x_0) + 2\varepsilon\} \in m_\Delta$. Так как $x_0 \in E_3$, то $\mu(E_3(x_0, \delta)) > 0$. Кроме того, $\mu(\bigcup_{i,j=1}^{\infty} E_{ij}) = 1$. Следовательно, существуют i и j такие, что $E_{ij}(x_0, \delta) \neq \emptyset$. Пусть $\xi \in E_{ij}(x_0, \delta)$. Из леммы 3 следует, что $\overline{E_{ij}^1} = E_{ij}$. Следовательно, существует последовательность $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ такая, что $z_i \in E_{ij}^1$ и $z_i \to \xi$ при $i \to \infty$. Но $\varphi(E_{ij}^1) = S(E_{ij}^1, f)$ и $S(E_{ij}^1, f)$ непрерывна. Тогда $\varphi(z_i) = S(f;\, z_i) \to S(f;\, \xi)$ при $i \to \infty$, т. е. существует число n, для которого $\varphi(z_n) > S(\varphi;\, x_0) + 2\varepsilon$ и $z_n \in (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta)$, что противоречит (17).

Докажем, что выполнено равенство (16). Пусть $B_1 = \{x : y'(x) \neq \varphi(x)\}$ и $B = \Delta \setminus B_1$. Так как $y \in \mathrm{Lip}_M 1$, то $\mu(B_1) = 0$. Из необходимости условия следует, что $F(D(y)) \in \mathrm{M}_\Delta$. Следовательно, согласно лемме 5, $F(B, D(y)) = F(D(y))$. Так как $D(B, y) = \varphi(B)$, то достаточно доказать, что выполнено

$$F(B,\, \varphi) = F(\varphi). \tag{18}$$

Из (15) следует, что $F(\varphi) = F(f)$ и, следовательно, $F(B, \varphi) = F(B, f)$. Но из леммы 5 следует, что $F(B, f) = F(f)$, т. е. равенство (18) выполнено.

Из (15) и (16) следует, что $F(D(y)) = f$. Этим доказательство теоремы акон чено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bl. Sendov. Segment Derivatives and Taylor's Formula. *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **30**, 1977, 1093—1096.

2. Бл. Сендов. Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в хаусдорфовой метрике. *Успехи мат. наук*, **24**, 1969, № 5, 141—178.

3. Bl. Sendov. Segment Arithmetic and Segment Limit. *C. R. Acad. bulg. sci.*, **30**, 1977 955—958.

4. И. П. Натансон. Увод в теорията на реалните функции. София, 1971.

Единый центр математики и механики 1090 София п. я. 373

Поступила 23. 11. 197 7