Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В СФЕРОИДАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

МИХАИЛ СТ. КАСЧИЕВ

В работе построена разностная схема численного решения смешанной задачи для эллиптического уравнения в сфероидальной системе координат. Показана сходимость разностной схемы к точному решению рассматриваемого уравнения со скоростью $O(|h|^2)$ в сеточной норме W_2^1.

1. Введение. Рассмотрим уравнение

$$-\Delta_{\xi\eta\varphi}v+q_1(\xi,\eta,\varphi)v=f_1(\xi,\eta,\varphi), \tag{1}$$

где $\Delta_{\xi\eta\varphi}$ — оператор Лапласа в вытянутых сфероидальных координатах:

$$\Delta_{\xi\eta\varphi}\equiv\frac{4}{R^2}\,\frac{1}{\xi^2-\eta^2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\,(\xi^2-1)\,\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\,(1-\eta^2)\,\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{\xi^2-\eta^2}{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right].$$

Связь декартовых координат (x, y, z) с вытянутыми сфероидальными координатами (ξ,η,φ) дается равенствами [1]

$$x=0.5\,R[(\xi^2-1)(1-\eta^2)]^{1/2}\cos\varphi,\ \ y=0.5\,R[(\xi^2-1)(1-\eta^2)]^{1/2}\sin\varphi,$$

$$z=0.5\,R\xi\eta,\ \ 1\leq\xi<\infty,\ \ -1\leq\eta\leq1,\ \ 0\leq\varphi\leq2\pi.$$

Для уравнения (1) поставим краевую задачу

$$\lim_{\xi\to1+0}(\xi^2-1)\,\frac{\partial v}{\partial\eta}=0,\qquad \lim_{\eta\to\substack{-1+0\\1-0}}(1-\eta^2)\,\frac{\partial v}{\partial\eta}=0,$$

$$(\xi^2-1)\,\frac{\partial v}{\partial\xi}=-\varkappa_1(\eta,\varphi)v+g_1(\eta,\varphi),\ \ \xi=l>1,\ \ v(\xi,\eta,\varphi)=v(\xi,\eta,\varphi+2\pi). \tag{2}$$

Первые два условия в (2) характеризуют ограниченные при $\xi=1$, $\eta=-1$ и $\eta=1$ решения, а последнее — периодическое решение относительно переменной φ. В ряде задач физики (дифракция на диске и сфероидах, теория резонаторов, квантовомеханическая задача двух центров) требуется найти собственные функции и собственные значения однородной задачи (1)—(2). Если для их нахождения воспользуемся непрерывным аналогом метода Ньютона, на каждом „временном" шаге мы должны решать неоднородную задачу (1)—(2). Как показано в [1], собственные функции обладают вращательной симметрией, т. е. коэффициенты уравнения (1) и краевых условий (2) не зависят от φ. Тогда решение задачи (1)—(2) можно искать в виде $v=u^{eim\varphi}$, где u решение задачи

$$Lu\equiv-\frac{4}{R^2}\,\frac{1}{\xi^2-\eta^2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi^2-1)\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}(1-\eta^2)\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]+q(\xi,\eta)u=f(\xi,\eta), \tag{3}$$

(4) $$\lim_{\xi\to 1+0}(\xi^2-1)\frac{\partial u}{\partial \xi}=0,\quad \lim_{\eta\to {-1+0 \atop 1-0}}(1-\eta^2)\frac{\partial u}{\partial \eta}=0,\quad (\xi^2-1)\frac{\partial u}{\partial \xi}=-\varkappa(\eta)u+g(\eta),\ \xi=l>1.$$

Коэффициенты q, f, $\varkappa$, g задачи (3)—(4) выражаются через коэффициенты задачи (1)—(2).

2. Постановка разностной задачи. Для компактности записи положим $x_1=\xi$, $x_2=\eta$. Построим равномерные сетки $\bar\omega_1$ и $\bar\omega_2$ на отрезках $[1,\ l]$ и $[-1,\ 1]$.

$$\bar\omega_1=\{x_1^{(i_1)}=1+(i_1-0{,}5)h_1,\ i_1=1,2,\ldots,N_1,\ h_1=(l-1)/(N_1-0{,}5)\},$$
$$\bar\omega_2=\{x_2^{(i_2)}=-1+(i_2-0{,}5)h_2,\ i_2=1,2,\ldots,N_2,\ h_2=2/N_2\}.$$

В области $G=\{1\leqq x_1\leqq l,-1\leqq x_2\leqq 1\}$, следуя [2], построим равномерную сетку $\bar\omega=\bar\omega\times\bar\omega_2$. Введем обозначения [2]

$$\gamma=\{(x_1,\ x_2),\ x_1=l,\ x_2\in\bar\omega_2\},\ \omega=\bar\omega\setminus\gamma,$$
$$\gamma_\alpha^-=x_\alpha^{(1)}\},\ \gamma_\alpha^+=\{x_\alpha^{(N_\alpha)}\},\ \omega_\alpha=\bar\omega_\alpha\setminus(\gamma_\alpha^-\cup\gamma_\alpha^+),\ \alpha=1,2,$$
$$\omega^{(+1)}=(\bar\omega_1\setminus\gamma_1^-)\times\bar\omega_2,\ \omega^{(+2)}=\bar\omega_1\times(\bar\omega_2\setminus\gamma_2^-).$$

Для каждой сеточной функции v, заданной на $\bar\omega$, обозначим

$$v^{(\pm1_1)}=v(x_1\pm h_1,\ x_2),\ v^{(\pm1_2)}=v(x_1,\ x_2\pm h_2),\ v_{x_\alpha}\equiv(v^{(+1_\alpha)}-v)/h_\alpha,$$
$$v_{\bar x_\alpha}\equiv(v-v^{(-1_\alpha)})/h_\alpha.$$

Пусть y — сеточная функция на $\bar\omega$. Напишем разностную аппроксимацию операторов $L_1\equiv\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1^2-1)\frac{\partial}{\partial x_1}$ и $L_2\equiv\frac{\partial}{\partial x_2}(1-x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_2}$.

$$\Lambda_1 y=\begin{cases} a_1^{(+1_1)}y_{x_1}/h_1,\ x_1\in\gamma_1^-,\\ (a_1 y_{\bar x_1})_{x_1},\ x_1\in\omega_1,\\ -2\,a_1(x)\,y_{\bar x_1}/h_1,\ x_1\in\gamma_1^+;\end{cases}\qquad \Lambda_2 y=\begin{cases} a_2^{(+1_2)}y_{x_2}/h_2,\ x_2\in\gamma_2^-,\\ (a_2 y_{\bar x_2})_{x_2},\ x_2\in\omega_2,\\ -a_2\,y_{\bar x_2}/h_2,\ x_2\in\gamma_2^+,\end{cases}$$

$$a_1(x)=(x_1-0{,}5\,h_1)^2-1,\ a_2(x)=1-(x_2-0{,}5\,h_2)^2,\ \varrho(x)=x_1^2-x_2^2.$$

Разностную аппроксимацию задачи (3)—(4) запишем в виде

(5) $$\Lambda y\equiv-\frac{4}{R^2}\,\frac{1}{\varrho(x)}(\Lambda_1\ y+\Lambda_2 y)+d\,y=\varphi,$$

$$d(x)=\begin{cases} q(x), & x\in\omega,\\ q(x)+\frac{2}{h_1}\,\frac{4}{R^2}\,\frac{\varkappa(x)}{\varrho(x)}, & x\in\gamma,\end{cases}\qquad \varphi(x)=\begin{cases} f(x), & x\in\omega,\\ f(x)+\frac{2}{h_1}\,\frac{4}{R^2}\,\frac{g(x)}{\varrho(x)}, & x\in\gamma.\end{cases}$$

3. Погрешность аппроксимации. Предположим, что $u\in C^4(G)$ — решение задачи (3)—(4). Имеет место

Лемма 1. *Для погрешности аппроксимации* ψ *схемы* (5) *на решении задачи* (3)—(4) *верна оценка*

(6) $$\psi=\psi_\omega+\delta(x)\psi_\gamma+O(|h|^2),\quad |h|^2=h_1^2+h_2^2,$$

$$\psi_\omega=O(|h|^2/(R^2\varrho(x))),\ \psi_\gamma=\frac{2}{h_1}O(|h|^2/(R^2\varrho(x))),\ \delta(x)=\begin{cases}0, & x\in\omega,\\ 1, & x\in\gamma.\end{cases}$$

Доказательство. Положим $\psi_\gamma=\{\Lambda u-[(x_1^2-1)\,\partial u/\partial x_1+\varkappa u-g]\}_{x\in\gamma}$, $\psi_\omega=(\Lambda u-Lu)_{x\in\omega}$. Следуя [3], получаем, что

$$\psi_\omega=\frac{4}{R^2}\frac{|h|^2}{\varrho(x)}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)+\frac{1}{3}\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}+\frac{1}{2}x_2\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}\right\}+O(|h|^2),$$

$$\psi_\gamma=\frac{2}{h_1}\frac{4}{R_1^2}\frac{|h|^2}{\varrho(x)}\left(\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial x_1}-\frac{1}{2}l\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)+O(|h|^2).$$

Из этих представлений ψ_ω и ψ_γ следует (6).

4. Оценка скорости сходимости Для сеточных функций v и w, заданных на ω, вводим скалярные произведения

$$(v,w)_{\bar\omega}=\frac{R^3}{8}\sum_{x\in\bar\omega}\varrho(x)vw\hbar_1h_2,\quad \hbar_1=\begin{cases}h_1, & x\in\omega,\\ h_1/2, & x\in\gamma,\end{cases}\tag{7}$$

$$(v,w)=\frac{R^3}{8}\sum_{x\in\bar\omega}vw\hbar_1h_2,\tag{8}$$

$$(v,w)_{\omega(+\alpha)}=\frac{R^3}{8}\sum_{x\in\omega(+\alpha)}a_\alpha(x)\,v_{\bar x_\alpha}w_{\bar x_\alpha}h_1h_2,\quad \alpha=1,2,\tag{9}$$

$$(v,w)_\gamma=\frac{R^3}{8}\sum_{x\in\gamma}vwh_2.\tag{10}$$

Скалярные произведения (7), (8), (9), (10) индуцируют нормы $\|v\|_0^2=(v,v)_{\bar\omega}$, $\|v\|^2=(v,v)$, $\|v_{\bar x_\alpha}\|_0^2=(v,v)_{\omega(+\alpha)}$, $\alpha=1,2$, $\|v\|_\gamma^2=(v,v)_\gamma$, $\|\nabla v\|_0^2=\Sigma_{\alpha=1}^2\|v_{\bar x_\alpha}\|^2$, $\|v\|_1^2=\|v_0\|_0^2+\|\nabla v\|_0^2$. Оценки для скорости сходимости схемы (5) к решению задачи (3)—(4) найдем методом энергетических неравенств. Основную роль имеет следующая

Лемма 2. *Для решения y задачи (5) справедливо тождество*

$$(\Lambda y,y)_{\bar\omega}=\frac{4}{R^2}[\|\nabla y\|_0^2+(q,y^2)_{\bar\omega}+(\varkappa,y^2)_\gamma].\tag{11}$$

Доказательство. Умножим Λy скалярно на y и воспользуемся первой разностной формулой Грина [4].

На основании лемм 1,2 легко можно получить, предположив, что $q(x)\geq c_1>0$, $\varkappa(x)\geq 0$ или $q(x)\geq 0$, $\varkappa(x)\geq c_2>0$, априорную оценку для решении задачи (5) $\|y\|_1\leq M\|\varphi\|_0$. Из этой оценки следует однозначная решимость системы линейных алгебраических уравнений (5) и сходимость приближенного решения к точному со скоростью $O(|h|^2\ln(|h|^{-1})$. Наша задача — показать, что скорость сходимости схемы (5) — величина порядка $O(|h|^2)$. Для решения этой проблемы сначала установим некоторые неравенства, связывающие разные нормы данной сеточной функции.

Лемма 3. *Для каждой сеточной функции y, заданной на $\bar\omega$, справедливо неравенство*

$$\|y\|^2\leq 2(l-1)(\|y\|_\gamma^2+\|\nabla y\|_0^2).\tag{12}$$

Доказательство. Пусть $x=(x_1, x_2)\in\omega$, $\bar{x}=(l, x_2)\in\gamma$. Тогда

$$y^2(x)=[y(\bar{x})-\sum_{x_1'=x_1+h_1}^{l} y_{\bar{x}_1}(x_1', x_2)h_1]^2$$

$$y^2(x)\leq 2y^2(\bar{x})+2\sum_{x_1'=x_1+h_1}^{l} h_1/\left(x_1'-\frac{1}{2}h_1-1\right)\sum_{x_1'=x_1+1}^{l}\left(x_1'-\frac{1}{2}h_1-1\right)y^2_{\bar{x}_1}(x_1', x_2)h_1$$

$$\leq 2y^2(\bar{x})+2\sum_{X_1'=x_1+h_1}^{l} h_1/\left(x_1'-\frac{1}{2}h_1-1\right)\sum_{x_1=x_1(2)}^{l} a_1(x)\,y^2_{\bar{x}_1}h_1.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались неравенством Коши—Буняковского и $1\leq x_1'-h_1/2-1\leq(x_1'-h_1/2)^2-1=a_1(x)$.

Суммируя по $\bar{\omega}$, получаем (12), так как

$$\sum_{x_1\in\omega_1}\hbar_1\sum_{x_1'=x_0+h_1}^{l} h_1/\left(x_1'-\frac{1}{2}h_1-1\right)\leq l-1.$$

Для каждой функции $v(x_1)$, заданной на $\bar{\omega}_1$, легко доказывается, что

$$\sum_{x_1\in\bar{\omega}_1}\hbar_1\sum_{x_1'=x_1+h_1}^{l} v^2(x_1')h_1\leq 2\sum_{x_1\in\bar{\omega}_1}(x_1-1)v^2(x_1)h_1. \tag{13}$$

Лемма 4. *Пусть y — сеточная функция на $\bar{\omega}$. Тогда $\|y\|_\gamma^2$ можно оценить сверху нормами $\|y\|_0^2$ и $\|\nabla y\|_0^2$ следующим способом:*

$$\|y\|_\gamma^2\leq\frac{1+4l+2\varepsilon(l-1)}{(l-1)(l^2-1)}\|y\|_1^2+\frac{1}{2\varepsilon(l-1)}\|\nabla y\|_0^2,\quad \varepsilon>0. \tag{14}$$

Доказательство. Для точек x и $\bar{x}$ имеем

$$(l^2-1)y^2(\bar{x})=(x_1^2-1)y^2(x)+\sum_{x_1'=x_1+h_1}^{l}[(x_1'^2-1)y^2(x_1', x_2)]_{\bar{x}_1}h_1. \tag{15}$$

Воспользуемся формулами [2]

$$[(x_1^2-1)y^2(x_1, x_2)]_{\bar{x}_1}=(x_1^2-1)_{\bar{x}_1}y^2(x)+[(x_1-h_1)^2-1](y^2)_{\bar{x}_1},$$

$$(x_1^2-1)_{\bar{x}_1}=(2x_1+h_1)\leq 2l,\ x_1^2-1\leq\varrho(x),$$

$$(y^2)_{\bar{x}_1}=[y+y^{(-1_1)}]y_{\bar{x}_1},\ |ab|\leq\varepsilon a^2+b^2/4\varepsilon,\ \varepsilon>0.$$

Из (15) получаем

$$(l^2-1)y^2(\bar{x})\leq\varrho(x)y^2(x)+2l\sum_{x_1'=x_1+h_1}^{l} y^2(x_1', x_2)h_1$$

$$+2\varepsilon\sum_{x\in\bar{\omega}_1}\varrho(x)y^2(x)h_1+\frac{1}{4\varepsilon}\sum_{x_1\in\bar{\omega}_1\setminus\sigma_1}a_1(x)y^2_{\bar{x}_2}h_1.$$

Просуммировав последнее неравенство по $\bar{\omega}$ и используя (13), получаем (14). Оценим $\|y\|^2$ через $\|y\|_0^2$ и $\|\nabla y\|_0^2$, используя (12) и (14).

$$\|y\|^2\leq 2[1+4l+2\varepsilon(l-1)]\ \|y\|_0^2/(l^2-1)+(l-1)\|\nabla y\|_0^2/(\varepsilon(l^2-1)). \tag{16}$$

Из неравенства $\|y\|_0^2\leq(l^2+1)\|y\|^2$ и (12) следует

$$\|y\|_0^2\leq 2(l-1)(l^2+1)(\|y\|_\gamma^2+\|\nabla y\|_0^2). \tag{17}$$

Теорема 1. *Для решения y схемы* (5) *верна априорная оценка*

$$\|y\|_1\le RM(l, c_1, c_2)(\|\varrho f\|+\|g\|_\gamma),\quad M(l, c_1, c_2)>0. \tag{18}$$

Доказательство. Из лемы 2 следует

$$4[\|\nabla y\|_0^2+(q, y^2)_{\bar\omega}+(\varkappa, y^2)^{\gamma-}]/R^2=(\Lambda y, y)_{\bar\omega}=(\varphi, y)_{\bar\omega} \tag{19}$$
$$\le\|y\|\,\|\varrho\varphi\|\le\varepsilon_1\|y\|^2+\max(1, l^2-1)(\|\varrho f\|^2+\|g\|_\gamma^2)/4\varepsilon_1 .$$

Предположим, что $q(x)\ge c_1>0$, $\varkappa(x)\ge 0$. Из (16) и (19) получаем

$$\left\{\frac{4}{R^2}-\varepsilon_1\left[\frac{1}{2\varepsilon(l-1)}+2(l-1)\right]\right\}\|\nabla y\|_0^2+\left\{\frac{4}{R^2}c_1-\frac{2\varepsilon_1}{l^2-1}[1+4l+2\varepsilon(l-1)]\right\}\|y\|_0^2 \tag{20}$$
$$\le A_1(l)(\|\varrho f\|^2+\|g\|_\gamma^2)4\varepsilon_1 .$$

Положим $\varepsilon=1/2(l-1)$, $\varepsilon_1=4R^{-2}\min[1/2(2l-1), (l^2-1)c_1/4(2l+1)]$, $\delta^2=4R^{-2}\min(1-R^2\varepsilon_1/4,\ c_1-R^2\varepsilon_1/4)$. Из (20) получаем

$$\|y\|_1\le RA(l, c_1)(\|\varrho f\|+\|g\|_\gamma). \tag{21}$$

Пусть $q(x)\ge 0$, $\varkappa(x)\ge e_2>0$. Из (12) и (19) следует

$$\left[\frac{4}{R^2}-2\varepsilon_1(l-1)\right]\|\nabla y\|_0^2+\left[\frac{4c_2}{R^2}-2\varepsilon_1(l-1)\right]\|y\|_\gamma^2\le\frac{A_1(l)}{4\varepsilon_1}\|\varrho f\|^2+\|g\|_\gamma^2). \tag{22}$$

Поставим $\varepsilon_1=\frac{4}{R^2}\,\frac{\min(1, c_2)}{4(l-1)}$, $\quad\delta^2=\frac{4}{R^2}\min\left(1-\frac{R^2}{4}\varepsilon_1,\ c_2-\frac{R^2}{4}\varepsilon_1\right)$.

Из (22) получаем

$$\delta^2(\|y\|_\gamma^2+\|\nabla y\|_0^2\le A_2(l, c_2)(\|\varrho f\|^2+\|y\|_\gamma^2). \tag{23}$$

Оценим левую часть в (23). Используя (17), имеем

$$\delta^2(\|y\|_\gamma^2+\|\nabla y\|_0^2)\ge\frac{\delta^2}{2}(\|y\|_\gamma^2+\|\nabla y\|_0^2+\frac{\delta^2\|y\|_0^2}{2(l-1)(l^2+1)} \tag{24}$$
$$\ge\frac{\delta^2}{2}\left[\|\nabla y\|_0^2+\frac{1}{(l-1)(l^2+1)}\|y\|_0^2\right].$$

Поставим $\delta_1^2=\frac{\delta^2}{2}\min\{1, [(l-1)(l^2+1)]^{-1}\}$. Из (23) и (24) следует

$$\|y\|_1\le RB(l, c_2)(\|\varrho f\|+\|g\|_\gamma). \tag{25}$$

Пусть $M(l, c_1, c_2)=\max(A, B)$. Из (21) и (25) получаем (18).

Теорема 2. *Для скорости сходимости решения y схемы* (5) *для решения задачи* (3)—(4) *справедлива оценка*

$$\|u-y\|_1\le R^{1/2}M_1(l, c_1, c_2)|h|^2. \tag{26}$$

Доказательство. Если u — решение задачи (3)—(4), а y — решение схемы 5, погрешность схемы $z=u-y$ удовлетворяет уравнению $\Lambda z=\psi$. По теореме 1

$$\|z\|_1\le RM(l, c_1, c_2)(\|\varrho\psi_\omega\|+\|\psi_\gamma\|_\gamma). \tag{27}$$

Вычислим правую часть последнего неравенства, применяя лемму 1.

$$\|\varrho\psi_\omega\|+\|\psi_\gamma\|_\gamma\le R^{-1/2}A_3(l)|h|^2.$$

Из последнего неравенства и (27) получаем (26).

В заключение автор выражает благодарность Р. Лазарову за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. В. Комаров, Л. И. Пономарев, С. Ю. Славянов. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. Москва, 1976.
2. А. А. Самарский. Введение в теорию разностных схем. Москва, 1971.
3. И. В. Фрязинов. О разностных схемах для уравнения Пуассона в полярной, цилиндрической и сферической системах координат. *Ж. вычисл. мат. и мат. физ.*, 11, 1971, 1219—1228.
4. А. А. Самарский, В. Б. Андреев. Разностные методы для эллиптических уравнений, Москва, 1976.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 2. 11. 1977.