Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

РОСИЦА И. СЕМЕРДЖИЕВА

Рассматривается задача Трикоми и обобщенная задача Трикоми для одного класса уравнений смешанного типа. Доказывается существование и единственность сильного решения этих задач.

В работе исследуется вопрос о сильной разрешимости задачи Трикоми и обобщенной задачи Трикоми для уравнения смешанного типа

(1) $$Lu \equiv k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y),$$

где $k(y)>0$ при $y>0$, $k(y)<0$ при $y<0$, $k(0)=0$.

В случае, когда $a=b=c=0$, вопрос о сильной разрешимости задачи Трикоми и обобщенной задачи Трикоми рассмотрен в работах Н. Г. Сорокиной [1; 2] путем сведения уравнения (1) к положительной симметричной системе. В работе В. П. Диденко [4] непосредственно доказано существование и единственность слабого решения $u \in W_2^1(G)$ задачи Трикоми при $a=b=c=0$.

1. Задача Трикоми. Пусть G — конечная односвязная область плоскости независимых переменных x, y, ограниченная кусочно-гладкой кривой σ и характеристиками AC и BC уравнения (1), выходящими из точки $C(1/2, y_c)$, $y_c>0$ (см. рис. 1). Будем предполагать, что $k(y) \in C^1(\Delta)$, $k'(y)>0$ в Δ, где $\Delta=[h_1, h_2]$, $h_1=\inf_{\overline{G}} y$, $h_2=\sup_{\overline{G}} y$; $a(x, y) \in C^1(\overline{G})$, $b(x,y) \in C^1(\overline{G})$, $c(x, y) \in C^1(\overline{G})$.

Задача Трикоми. *Найти решение уравнения* (1) *в области* G, *удовлетворяющее граничному условию*

(2) $$u=0 \text{ на } \sigma \cup AC.$$

Введем следующие обозначения: L^* — оператор, сопряженный к L, $L^*v \equiv kv_{xx} - v_{yy} - (av)_x - (bv)_y + cv$; $W_2^l(G)$ — пространство Соболева [6] со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_l$ и нормой $\|\cdot\|_l$, $l=0, 1, 2$, $W_2^0(G)=L_2(G)$; $W_2^{-1}(G)$ — негативное пространство, построенное по $L_2(G)$ и $W_2^1(G)$ (см. [5]). Обозначим через $\widetilde{C}^2(\overline{G})$ множество всех функций $u \in C^2(\overline{G})$, удовлетворяющих условию (2), а через $\widetilde{W}_2^i(G)$ — замыкание этого множества по норме $W_2^i(G)$, $i=1, 2$. Через $\widetilde{C}_*^2(\overline{G})$ будем обозначать множество всех дважды непрерывно дифференцируемых в $\overline{G}$ функций, удовлетворяющих сопряженному граничному условию $v=0$ на $\sigma \cup BC$, а через $\widetilde{W}_{2,*}^2(G)$ — замыкание этого множества по норме $W_2^2(G)$.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 5, 1979, с. 123—127.

Пусть $f(x, y) \in L_2(G)$.

Определение 1. *Функция* $u \in L_2(G)$ *называется слабым решением задачи Трикоми, если* $(u, L^*v)_0 = (f, v)_0$, $\forall v \in \widetilde{W}^2_{2,*}(G)$.

Определение 2. *Функция* $u \in L_2(G)$ *называется сильным решением задачи Трикоми, если существует последовательность функций* $u_n \in \widetilde{W}^2_2(G)$ *таких, что* $\| u_n - u \|_0 \to 0$, $\| Lu_n - f \|_0 \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Пусть $u(x, y) \in \widetilde{C}^2(\bar{G})$ и $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — пока произвольные непрерывно дифференцируемые на отрезке $\Delta_1 = [\tau_1, \tau_2]$, $\tau_1 = \inf\limits_{\bar{G}} x$, $\tau_2 = \sup\limits_{\bar{G}} x$, функции. Интегрированием по частям получаем

$$2\int_G (\alpha u_x + \beta u_y) Lu\, dx\, dy \tag{3}$$

$$= -\int_G [(\alpha c)_x + \beta c_y] u^2 dx dy + \int_G A(u_x, u_y) dx dy + \int_{\partial G} c(\alpha n_1 + \beta n_2) u^2 ds + \int_{\partial G} B(u_x, u_y) ds,$$

где $n = (n_1, n_2)$ — единичный вектор внешней нормали к ∂G,

$$A(u_x, u_y) = (-k\alpha_x + k'\beta + 2a\alpha) u_x^2 + 2(-k\beta_x + \alpha b + \beta a) u_x u_y + (-\alpha_x + 2\beta b) u_y^2,$$

$$B(u_x, u_y) = k(\alpha n_1 - \beta n_2) u_x^2 + 2(-\alpha n_2 + \beta k n_1) u_x u_y + (\alpha n_1 - \beta n_2) u_y^2.$$

При некоторых ограничениях на коэффициенты уравнения (1) функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ можно выбрать так, что квадратичная форма $A(u_x, u_y)$ будет положительно определена в $\bar{G}$. Рассмотрим последовательные главные миноры D_1 и D_2 матрицы квадратичной формы $A(u_x, u_y)$. Имеем $D_1 = -k\alpha_x + k'\beta + 2a\alpha$. Пусть $2a + \lambda k' \geq \varepsilon = \text{const} > 0$ в $\bar{G}$, где $\lambda = 1/\sqrt{k(h_2)}$. Выберем $\alpha(x) = p - x$, $\beta(x) = \lambda\alpha(x)$,

где $p > 0$ столь большая постоянная, что $\alpha(x) > 0$ в Δ_1 и

$$D_1 = k + (2a + \lambda k')(p - x) \geqq \lambda^2 k^2 + 1 > 0 \quad \text{в } \bar{G} \tag{4}$$

Следовательно, $D_1 \geq d_1 = \text{const} > 0$ в $\bar{G}$.

Далее, имеем $D_2 = (-\alpha_x + 2\beta b) D_1 - (\alpha b + \beta a - k\beta_x)^2$. Принимая во внимание (4), заключаем, что

$$D_2 \geq 1 + (\lambda^2 k^2 + 1) 2b\lambda(p - x) - (p - x)^2 (\lambda a + b)^2 - 2\lambda(p - x) k (\lambda a + b).$$

Если $|a(x, y)|$ и $|b(x, y)|$ достаточно малы в $\bar{G}$, то $D_2 \geqq d_2 = \text{const} > 0$ в $\bar{G}$. Из $D_1 \geq d_1$ и $D_2 \geqq d_2$ в $\bar{G}$ вытекает, что квадратичная форма $A(u_x, u_y)$ положительно определена в $\bar{G}$.

Будем предполагать, что $n_2 < 0$, $k(h_2) n_1^2 - n_2^2 < 0$ на σ. Тогда $\lambda + n_1/n_2 \geq \lambda - |n_1/n_2| > 0$ и, следовательно,

$$\alpha n_1 + \beta n_2 = n_2 (p - x)(n_1/n_2 + \lambda) \leq 0 \qquad \forall (x, y) \in \sigma. \tag{5}$$

Квадратичная форма $B(u_x, u_y)$ неотрицательна на ∂G. Действительно, на характеристике BC это очевидно, так как дискриминанта квадратичной формы $B(u_x, u_y)$ аннулируется, т. е. $\Delta = (kn_1^2 - n_2^2)(\alpha^2 - \beta^2 k) = 0$ и коэффициент перед u_x^2 неотрицательный:

$$k(\alpha n_1 - \beta n_2) = (p - x)(1 - \lambda\sqrt{k}) \geq 0.$$

Так как $u = 0$ на $\sigma \cup AC$, то $u_x = N(x, y) n_1$ и $u_y = N(x, y) n_2$ $\forall (x, y) \in \sigma \cup AC$ и, следовательно,

$$B(u_x, u_y) = N^2(\alpha n_1 + \beta n_2)(kn_1^2 - n_2^2).$$

Принимая во внимание (5), заключаем, что $B(u_x, u_y) \geqq 0$ $\forall (x, y) \in \sigma \cup AC$.

Теорема 1. *Если* $2a + \lambda k' \geqq \varepsilon$ *в* $\bar{G}$, $c(x, y) \geqq 0$, $c_x \leqq 0$, $c_y \leqq 0$ *в* $\bar{G}$, $|a(x, y)|$ *и* $|b(x, y)|$ *достаточно малы в* $\bar{G}$ *и* $n_2 < 0$, $k(h_2)n_1^2 - n_2^2 < 0$ *на* σ, *то задача Трикоми может иметь не более одного сильного решения.*

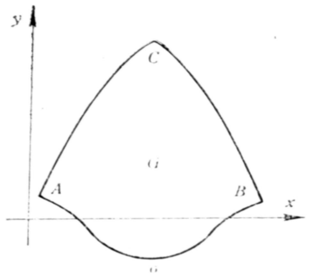

Рис. 1

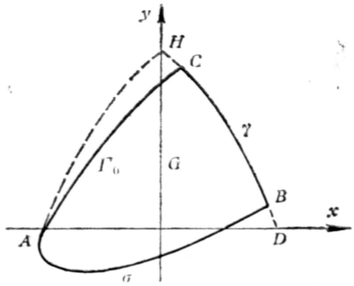

Рис. 3

Доказательство. Пусть $u \in \tilde{C}^2(\bar{G})$. Выбирая $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, как указано выше, из (3) получаем

$$(\alpha u_x + \beta u_y, Lu)_0 \geqq C_1 \| u \|_1^2, \quad \forall u \in \tilde{C}^2(\bar{G}), \tag{6}$$

где C_1 — положительная постоянная, не зависящая от функции $u(x, y)$. Из (6) получаем

$$\| Lu \|_0 \geqq C \| u \|_1, \quad \forall u \in \tilde{C}^2(\bar{G}). \tag{7}$$

Из этого неравенства вытекает единственность сильного решения задачи Трикоми.

Теорема 2. *Если* σ *дважды непрерывно дифференцируема и выполняются условия теоремы* 1, *то существует слабое решение* $u \in \tilde{W}_2^1(G)$ *задачи Трикоми для любой функции* $f \in L_2(G)$.

Доказательство. Для любой функции $v(x, y) \in \tilde{C}_*^2(\bar{G})$ задача

$$\alpha u_x + \beta u_y = v \text{ в } G, \ u = 0 \text{ на } \sigma \cup AC \tag{8}$$

имеет единственное решение $u \in C^1(\bar{G}) \cap \tilde{W}_2^2(G)$. Действительно, принимая во внимание, что $k(y)$ строго монотонно возрастает, легко видеть, что каждая линия семейства $\sqrt{k(h_2)}\,y - x = C$ пересекает линию $\sigma \cup AC$ не более чем в одной точке. Путем неособой замены независимых переменных $\xi = x$, $\eta = -x + \sqrt{k(h_2)}\,y$, уравнение $\alpha u_x + \beta u_y = v(x, y)$ принимает вид

$$\tilde{u}_\xi = \tilde{v}(\xi, \eta) / (p - \xi), \tag{9}$$

где $\tilde{u}(\xi, \eta) = u(\xi, \lambda(\xi + \eta))$, $\tilde{v}(\xi, \eta) = v(\xi, \lambda(\xi + \eta))$. Уравнение кривой $\sigma \cup AC$ в новых переменных можно записать в виде:

$$\xi = \varphi_1(\eta), \ \eta \in [\eta_0, \eta_1], \ \eta_1 > 0, \ \eta_0 > 0,$$
$$\xi = \varphi_2(\eta), \ \eta \in [-\eta_2, \eta_0], \ \eta_2 > 0,$$

где $\varphi_1(\eta_0)=\varphi_2(\eta_0)$ и φ_i, $i=1, 2$ — дважды дифференцируемые функции. Из (9), принимая во внимание граничное условие (2), получаем

$$\widetilde{u}=\begin{cases}\int\limits_{\varphi_1(\eta)}^{\xi}\widetilde{v}(t, \eta)(p-t)^{-1}dt, & \eta\in[\eta_0, \eta_1];\\ \int\limits_{\varphi_2(\eta)}^{\xi}\widetilde{v}(t, \eta)(p-t)^{-1}dt, & \eta\in[-\eta_2, \eta_0].\end{cases}$$

Легко проверить, что функция $u(x, y)\in C^1(G)\cap\widetilde{W}_2^2(G)$.

Пусть u — решение задачи (8). Из (6) получаем

$$\|L^*v\|_{-1}\|u\|_1\geqq(L^*v, u)_0=(v, Lu)_0=(\alpha u_x+\beta u_y, Lu)_0\geqq C_1\|u\|_1^2.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $\|u\|_1\geqq C_2\|v\|_0$, получаем $\|L^*v\|_{-1}\geqq C\|v\|_0$ $\forall v\in\widetilde{C}_*^2(\overline{G})$. Из этого неравенства, как известно [5], следует существование слабого решения $u\in\widetilde{W}_2^1(G)$ задачи Трикоми для любой функции $f\in L_2(G)$.

Теорема 3. *Если выполняются условия теоремы 2, то существует сильное решение $u\in\widetilde{W}_2^1(G)$ задачи Трикоми для любой функции $f\in L_2(G)$ и слабое решение $u\in\widetilde{W}_2^1(G)$ этой задачи единственно.*

Доказательство проводится также как в работах [1; 3].

2. Обобщенная задача Трикоми. Пусть G — конечная односвязная область плоскости независимых переменных x, y, ограниченная кусочно-гладкой кривой $\Gamma=\Gamma_0\cup\sigma\cup\gamma$ (см. рис. 2). Обозначим через AH и DH характеристики уравнения (1), выходящими из точки $H(0, h)$, $h>0$. Кривая $\Gamma_0\cup\sigma$ дважды непрерывно дифференцируема и нигде не характеристична. Кривая Γ_0 расположена в гиперболической полуплоскости, причем вдоль ее $\mu<dy/dx<1/\sqrt{k(y)}$, где $\mu=1/\sqrt{k(h)}$, $dy/dx\,|_{y=0}<\infty$, $n_1<0$, $n_2>0$. Пусть $\sigma=\sigma_1\cup\sigma_2\cup\sigma_3$, причем $\mu<dy/dx$, $n_1<0$, $n_2\geqq0$ на σ_1; $n_1\leqq0$, $n_2<0$ на σ_2 и $dy/dx<\mu$, $n_1>0$, $n_2<0$ на σ_3.

Обобщенная задача Трикоми. *Найти решение уравнения (1) в G, удовлетворяющее граничному условию $u=0$ на $\Gamma_0\cup\sigma$.*

Аналогично, как в пункте 1, определяются пространства $\widetilde{W}_2^i(G)$, $i=1, 2$, $\widetilde{W}_2^{-1}(G)$, $\widetilde{W}_{2,*}^2(G)$, слабое и сильное решение обобщенной задачи Трикоми.

При сделанных предположениях справедливы следующие теоремы.

Теорема 4. *Если $2a+\mu k'\geqq\varepsilon$ в $\overline{G}$, $c(x, y)\geqq0$, $c_x(x, y)\leqq0$, $c_y(x, y)\leqq0$ в $\overline{G}$, $|a(x, y)|$ и $|b(x, y)|$ достаточно малы в $\overline{G}$, то обобщенная задача Трикоми может иметь не более одного сильного решения.*

Доказательство проводится также как в теореме 1. Заметим только, что выбираем $\alpha(x)=p-x$, $\beta(x)=\mu\alpha(x)$, где $p>0$ столь большая постоянная, что $\alpha(x)>0$ в Δ_1 и

$$D_1=k+(2a+\mu k')(p-x)\geqq\mu^2k^2+1>0 \text{ в } \overline{G}\,(\Delta_1=[\tau_1, \tau_2],\ \tau_1=\inf_{\overline{G}} x,\ \tau_2=\sup_{\overline{G}} x).$$

Если выполняются условия теоремы 4, то, так же как в пункте 1, доказывается, что для обобщенной задачи Трикоми справедливы теоремы 2 и

3. Заметим только, что каждая линия семейства $\sqrt{k(h)}\,y-x=C$ пересекает линию $\Gamma_0 \cup \sigma$ не более чем в одной точке.

Выражаю благодарность ст. н. с. д-р Г. Каратопраклиеву за руководство этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Сорокина. О сильной разрешимости задачи Трикоми. *Укр. мат. ж.*, **18**, 1966 № 6, 65—77.
2. Н. Г. Сорокина. О сильной разрешимости обобщенной задачи Трикоми. *Укр. мат. ж.* **24**, 1972, 558—561.
3. Г. Д. Каратопраклиев. К теории уравнений смешанного типа и вырождающихся гиперболических уравнений. *Докторская диссертация*. Москва. 1972.
4. В. П. Диденко. Об обобщенной разрешимости задачи Трикоми. *Укр. мат. ж.*, **25**, 1973, 14—24.
5. Ю. М. Березанский. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, 1965.
6. С. Л. Соболев. Некоторые приложения функционального анализа в математической физике. Новосибирск, 1962.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 22. 9. 1977