Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

О ПРОБЛЕМЕ РАСПОЗНАВАНИЯ ГРУППОВЫХ СВОЙСТВ В ОГРАНИЧЕННЫХ АЛФАВИТАХ

РАДОСЛАВ Д. ПАВЛОВ

Пусть L_k — класс конечно определенных групп с фиксированным числом образующих k и M — произвольное групповое свойство. В работе исследуется, как проблема распознавания M в классе L_k зависит от числа образующих k. Для ряда групповых свойств M найдены такие границы $k_0(M)$ для числа образующих, что при $k<k_0(M)$ проблема распознавания M в L_k разрешима, а при $k\geq k_0(M)$ уже неразрешима.

Введение. Уточнение понятия алгоритма, полученное в 30-ых годах, позволило доказать неразрешимость ряда алгоритмических проблем в математике. Среди наиболее важных в этом направлении следует отметить результаты П. С. Новикова [1; 2], опубликовавшего первый пример группы с алгоритмически неразрешимой проблемой тождества слов (а тем самым и с алгоритмически неразрешимой проблемой сопряженности). На основе этого результата П. С. Новикова позже была установлена неразрешимость многих других алгоритмических проблем теории групп. В частности, в 1955 г. С. И. Адян доказал, что для каждой фиксированной группы неразрешима алгоритмическая проблема распознавания изоморфизма этой группы.

Пусть задан некоторый класс групп L. Проблема распознавания данного группового свойства M для класса L — это проблема нахождения алгоритма, распознающего по произвольной группе из L, обладает она свойством M или нет. Если такого алгоритма нет, проблема называется алгоритмически неразрешимой. Упомянутые выше проблемы изоморфизма фиксированной группы являются примерами таких проблем.

В работах С. И. Адяна [4; 5; 6] была доказана алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания ряда групповых свойств в классе всех конечно определенных групп (к. о. групп). Позднее эти результаты другим методом были получены М. О. Рабином, [7]. При этом, однако, примеры классов к. о. групп с неразрешимыми проблемами изоморфизма фиксированной группы и распознавания групповых свойств, построенные в этих работах, содержат большое количество образующих и определяюших соотношений. В связи с этим возникает вопрос об алгоритмической разрешимости проблемы распознавания свойств в классах к. о. груп с ограниченным числом образующих.

В настоящей работе исследуется проблема распознавания групповых свойств в ограниченных алфавитах.

Точнее, эту проблему можно сформулировать следующим образом.

Пусть L_k — класс к. о. групп с фиксированным числом образующих k. Пусть M — групповое свойство. Требуется установить, как разрешимость проблемы разпознавания данного свойства M в классе L_k зависит от числа образующих k и найти такую границу $k_0(M)$ для числа образующих, что при $k<k_0(M)$ проблема распознавания свойства M в классе L_k разрешима, а при $k \geqq k_0(M)$ уже неразрешима.

Отметим, что в теории полугрупп аналогичная задача решалась в работах А. А. Маркова [8] и Г. С. Цейтина [9]. А. А. Марков доказал для ряда свойств конечно-определенных полугрупп, что проблема распознавания этих свойств неразрешима в алфавитах с числом букв, большим или равным 4, а Г. С. Цейтин по существу уменьшил число образующих до двух. Он также доказал, что проблема распознавания любого полугруппового марковского свойства неразрешима в классе к. о. полугрупп с числом образующих, большим или равным $p+2$, где p — число образующих к. о. полугруппы, обладающей рассматриваемым свойством, и что существует полугрупповое марковское свойство, для которого проблема распознавания в классах к. о. полугрупп с меньшим числом образующих уже разрешима.

В настоящей работе для ряда групповых свойств M найдены такие границы $k_0(M)$ для числа образующих, что проблема распознавания рассматриваемого свойства M в классе L_k неразрешима тогда и только тогда, когда $k \geqq k_0(M)$. Аналогичные результаты получены не толко для отдельных групповых свойств, но и для классов групповых свойств. На базе единой конструкции систематизированы результаты автора по этой проблеме, опубликованные в [15; 16; 17; 18; 19] или еще неопубликованные. В первой главе строится единая конструкция классов к. о. групп и приводятся все технические доказательства, которые будут использоваться во второй главе. Во второй главе приводятся с доказательствами главные результаты о разрешимости проблемы распознавания групповых свойств в алфавитах с ограниченным числом букв.

Введем также некоторые обозначения, понятия и результаты, которые будут использоваться дальше. Во всех остальных случаях будем пользоваться терминологией, принятой, например, в монографии [14].

Группу Γ с образующими $g_1, \ldots, g_n$ и определяющими соотношениями $R_1=1, \ldots, R_m=1$ будем обозначать через $\Gamma = \ll g_1, \ldots, g_n; R_1=1, \ldots, R_m=1 \gg$

Равенство слов X и Y в группе Γ будем обозначать через $X \overset{\Gamma}{=} Y$, равенство в свободной группе — через $X \equiv Y$, графическое равенство — через $X \underline{\circ} Y$ и равенство по определению — через $X =_{\text{def}} Y$. Если слово φ составлено из слов $X_1, \ldots, X_k$, то это будем обозначать через $\varphi(X_1, \ldots, X_k)$. Если $X_1, \ldots, X_k$ — слова в группе Γ, то через $<X, \ldots, X_k>_\Gamma$ будем обозначать подгруппу группы Γ, порожденную словами $X, \ldots, X_k$. Свободное произведение групп Γ_1 и Γ_2 обозначим через $\Gamma_1 * \Gamma_2$, а свободное произведение групп Γ_1 и Γ_2 с объединенными подгруппами A_1 и A_2 — через $(\Gamma_1 * \Gamma_2)_{A_1=A_2}$.

Пусть задана группа

$$\Gamma = \ll s_1, \ldots, s_n, a_1, \ldots, a_r; R_1=1, \ldots, R_m=1, A_{i,1}a_i = a_iB_{i,1}, \ldots$$
$$\ldots, A_{i,k_i}a_i = a_iB_{i,k_i} (i=1, \ldots, r) \gg,$$

где слова $R_1, \ldots, R_m, A_{i,j}, B_{i,j}$ не содержат букв $a_1, \ldots, a_r$. В этом случае говорят, что $P=\{a_1, \ldots, a_r\}$ является системой проходных букв в группе Γ, а группу

$$\Gamma = \ll s_1, \ldots, s_n; R_1=1, \ldots, R_m=1 \gg$$

называют основанием группы Γ по системе проходных букв P. Система проходных букв P группы Γ называется правильной, а группа Γ HNN —. группой, если соответствие L_P

$$\begin{array}{ccc} A_{i,1} & \text{———} & B_{i,1} \\ & \cdots\cdots & \\ A_{i,k_i} & \text{———} & B_{i,k_i}, \quad i=1,\ldots,r \end{array}$$

порождает в группе $\overline{\Gamma}$ изоморфизм подгрупп, порожденных, соответственно, левыми и правыми частями L_P в группе $\overline{\Gamma}$. Если $P=\{a\}$, то будем говорить, что a — правильная проходная буква.

В последующих построениях будем использовать следующую известную лемму П. С. Новикова, которая содержится в его работах [2] и [3]:

Лемма (П. С. Новиков). *Если в группе Γ система проходных букв P правильна, то группа $\overline{\Gamma}$ является подгруппой группы Γ.*

Будем использовать также и следующий результат о группах с правильными системами проходных букв, который более известен как лемма Бриттона, хотя, однако, по существу этот результат содержится еще в работах П. С. Новикова. [2] и [3] (см. также [12]).

Лемма (Бриттон). *Пусть в группе Γ система проходных букв P правильна. Тогда, если $X\overset{\Gamma}{=}1$ и в слово X входит хотя бы одна буква a_i из P, то в X входит и подслово вида $a_i^{\delta}Ta_i^{-\delta}, \delta=\pm 1$, где при $\delta=-1$ $T\in\langle A_{i,1},\ldots,A_{i,k_i}\rangle_{\overline{\Gamma}}$, а при $\delta=+1$ $T\in\langle B_{i,1},\ldots,B_{i,k_i}\rangle_{\overline{\Gamma}}$.*

Пусть задана группа G следующего вида:

$$G=\ll s_1,\ldots,s_n,\ a;\ R_1=1,\ldots,R_m=1,\ E_1a=aL_1,\ldots$$
$$\ldots,E_ra=aL_r,\ K_1a=aM_1a^{l_1}N_1,\ldots,\ K_ta=aM_ta^{l_t}N_t\gg,$$

где $l_1,\ldots,l_t$ — целые, отличные от нуля, числа. Буква a называется квазипроходной буквой в группе G, если слова $R_1,\ldots,R_m,E_i,L_i\,(i=1,\ldots,r)$, $K_j,M_j,N_j(j=1,\ldots,t)$ не содержат буквы a.

Группа

$$\overline{G}=\ll s_1,\ldots,s_n;\ \ R_1=1,\ldots,R_m=1\gg$$

называется основанием группы G по квазипроходной букве a.

Квазипроходная буква a называется правильной, если соответствие L_a в группе $\overline{G}*\ll a\gg$

$$\begin{array}{ll} E_i \text{———} L_i, & i=1,\ldots,r, \\ K_j \text{———} M_ja^{l_j}N_j, & j=1,\ldots,t, \end{array}$$

осуществляет изоморфное отображение подгрупп, порожденных, соответственно, левыми и правыми частями L_a в группе $\overline{G}*\ll a\gg$.

В последующих построениях будем использовать следующий частный случай рассмотренной выше конструкции, которая в общем виде исследована в работе [20]. Пусть задана группа E:

$$E = \ll s_1, \ldots, s_n, a; \quad R_1 = 1, \ldots, R_m = 1, \ E_1 a = aL_1, \ldots$$
$$\ldots, E_r a = aL_r, \ Ka = aMa^{\pm 1}N \gg,$$

в которой буква a — квазипроходная буква. Пусть Z_1 — M или N, а Z_2 — соответственно N или M. Будем говорить, что в группе $\overline{E}$ выполняется ограниченное условие свободы для слов M и N, если из равенства

$$Z_1^{\varepsilon}\varphi(L_1, \ldots, L_r, Z_2)Z_1^{-\varepsilon}\varkappa \overset{\overline{E}}{=} 1,$$

где $\varepsilon = \pm 1$, $\varkappa$ — слово, составленное из $L_1, \ldots, L_r$ или из $E_1, \ldots, E_r, K$; следует, что $\varphi(L_1, \ldots, L_r, Z_r) \overset{\overline{E}}{=} 1$ и сумма степенных показателей Z_2 в слове φ равна 0. Для таких групп доказана следующая лемма (см. [20], следствие 2], которую мы будем использовать дальше.

Лемма А. *Пусть в группе E буква a — правильная квазипроходная буква, а в группе $\overline{E}$ выполняется ограниченное условие свободы для слов M и N. Тогда группа $\overline{E}$ является подгруппой группы E.*

1. Технические результаты. Пусть G° — произвольная, бесконечная, конечно определенная группа. Определим группу G_0 как свободное произведение групп G° и $\ll t \gg$, где $t \notin G^\circ$: $G_0 =_{\text{def}} G^\circ * \ll t \gg$.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество всех слов вида $t^{-1}VtV$, $V \in G^\circ$. Очевидно,

1) $t^{-1}VtV \overset{G_0}{=} 1 \Leftrightarrow V \overset{G^\circ}{=} 1$;

2) если $t^{-1}VtV \neq 1$ в G_0, то $t^{-1}VtV$ имеет в G_0 бесконечный порядок.

Следовательно, в группе G_0 проблема тождества для слов класса $\mathfrak{A}$ разрешима тогда и только тогда, когда в G° разрешима проблема тождества и все слова из класса $\mathfrak{A}$ либо равны 1, либо имеют бесконечный порядок.

В качестве группы G° будем, как правило, брать группу с неразрешимой проблемой тождества слов.

Пусть J_2 — произвольная к. о. группа. Определим

$$G_1 =_{\text{def}} G_0 * J_2 = \ll g_1, \ldots, g_n; \quad B_1 = 1, \ldots, B_m = 1 \gg.$$

Рассмотрим группу G_2:

$$G_2 =_{\text{def}} G_1 * \ll g_{n+1}, g_{n+2}, g_{n+3}, g_{n+4} \gg * \ll g; \quad g^r = 1 \gg,$$

где r — натуральное число, $r \geq 1$, а буквы $g, g_{n+1}, g_{n+2}, g_{n+3}, g_{n+4}$ не принадлежат алфавиту группы G_1.

Добавим к образующим и определяющим соотношениям этой группы новые образующие $b, v, u_1, \ldots, u_{n+4}$ и новые определяющие соотношения $u_1 = vg_1, \ldots, u_{n+4} = vg_{n+4}$. Очевидно, полученная таким образом группа

$$G_3 = \ll g, g_1, \ldots, g_{n+4}, b, v, u_1, \ldots, u_{n+4}; \quad B_1 = 1, \ldots, B_m = 1,$$
$$g^r = 1, \ u_1 = vg_1, \ldots, u_{n+4} = vg_{n+4} \gg$$

изоморфна группе

$$G_4 = \ll g, g_1, \ldots, g_{n+4}, b, v; \quad B_1 = 1, \ldots, B_m = 1, \ g^r = 1 \gg = G_2 * \ll b, v \gg.$$

Из соотношений $u_i = vg_i$ можно выразить $g_i = v^{-1}u_i$ и тогда, заменив всюду в определяющих соотношениях группы G_3 элементы $g_1, \ldots, g_{n+4}$ словами $v^{-1}u_1, \ldots, v^{-1}u_{n+4}$; получим, что G_3 изоморфна группе

$$G_5 = \ll g,\ u_1, \ldots, u_{n+4},\ b,\ v;\quad A_1 = 1, \ldots, A_m = 1,\ g^r = 1 \gg,$$

где $A_j \underline{\circ}\ \eta(B_j)$, $j = 1, \ldots, m$, а кодировка η алфавита группы G_4 определяется следующим образом:

$$\eta(g_i)\ \underline{\circ}\ v^{-1}u_i,\ (i = 1, \ldots, n+4);\quad \eta(b)\ \underline{\circ}\ b;\quad \eta(v)\ \underline{\circ}\ v;\quad \eta(g)\ \underline{\circ}\ g.$$

Следовательно, $G_5 \simeq G_4$, поскольку обе они изоморфны G_3.

Определим группу G_6

$$G_6 = \ll g,\ b,\ v,\ u_1, \ldots, u_{n+4},\ u;\quad A_1 = 1, \ldots, A_m = 1,\ g^r = 1,$$
$$b^i v b^{-i} u = u b^i u_i b^{-i},\ (i = 1, \ldots, n+4) \gg.$$

Лемма 1. *В группе G_6 буква u является правильной проходной буквой.*

Очевидно, буква u — проходная буква в группе G_6. Соответствие L_u имеет вид:

$$b^i v b^{-i} \text{———————} b^i u_i b^{-i},\ i = 1, \ldots, n+4,$$

а группа G_5 является основанием группы G_6 по проходной букве u. Покажем, что L_u порождает изоморфизм подгрупп, порожденных левыми и правыми частями L_u в группе G_5.

Элементы $bvb^{-1}, \ldots, b^{n+4}vb^{-n-4}$ являются свободными образующими порожденной ими подгруппы G_5. Действительно, для любого k

$$(b^i v b^{-i})^k \equiv b^i v^k b^{-i},$$

поэтому любое нетривиальное произведение рассматриваемых элементов перейдет в нетривиальное произведение b и v и, следовательно, не может равняться 1, так как b и v являются свободными образующими порожденной ими подгруппы группы G_5.

Элементы $bu_1b^{-1}, \ldots, b^{n+4}u_{n+4}b^{-n-4}$ являются свободными образующими порожденной ими подгруппы группы G_5. Действительно, пусть $\varphi : G_2 \to G_5$ — эндоморфизм, определеннный равенствами $b\varphi = b$, $v\varphi = v$, $g\varphi = 1$, $u_i\varphi = v$, $(i = 1, \ldots, n+4)$. Эндоморфизм φ существует, так как $G_5 \simeq G_4 = G_2 * \ll b,\ v \gg$. Ясно, что $(b^i u_i b^{-i})\varphi = b^i v b^{-i}$, $(i = 1, \ldots, n+4)$. Тогда элементы $b^i u_i b^{-i}$, $(i = 1, \ldots, n+4)$ являются свободными образующими порожденной ими подгруппы в группе G_5.

Отсюда следует, что L_u порождает изоморфизм соответствующих подгрупп в группе G_5. Лемма 1 доказана.

Из равенств $b^i v b^{-i} u = u b^i u_i b^{-i}$ можно выразить буквы u_i. Подставляя в кодировку η вместо u_i $(i = 1, \ldots, n+4)$ полученные выражения, получаем кодировку μ алфавита группы G_4:

$$\mu(g_i)\ \underline{\circ}\ v^{-1} b^{-i} u^{-1} b^i v b^{-i} u b^i,\quad i = 1, \ldots, n+4;$$

$$\mu(b)\ \underline{\circ}\ b;\quad \mu(v)\ \underline{\circ}\ v;\quad \mu(g)\ \underline{\circ}\ g.$$

Если все вхождения букв u_i в определяющих соотношениях G_6 заменим на $b^{-i}u^{-1}b^{i}vb^{-i}ub^{i}$, получим следующую изоморфную группе G_6 группу:

$$G_7 = \ll g,\ b,\ v,\ u;\quad A'_1 = 1, \ldots, A'_m = 1,\ g^r = 1 \gg,$$

где $A'_j \mathrel{\overline{\underline{\circ}}} \mu(B_j)$, $j = 1, \ldots, m$.

Лемма 2. *Пусть Q — слово в алфавите группы G_4. Тогда*

$$\mu(Q) \overset{G_7}{=} 1 \Leftrightarrow Q \overset{G_4}{=} 1.$$

Пусть $Q \overset{G_4}{=} 1$. Но определяющие соотношения группы G_7 — это определяющие соотношения группы G_4, закодированные кодировкой μ. Отсюда следует, что для любого перехода

$$Q \to \cdots \to 1$$

в группе G_4 можно найти соответствующий переход в группе G_7:

$$\mu(Q) \to \cdots \to 1.$$

Пусть $\mu(Q) \overset{G_7}{=} 1$. Добавим новые образующие $u_1, \ldots, u_{n+4}$ и новые определяющие соотношения $u_i = b^{-i}u^{-1}b^{i}vb^{-i}ub^{i}$. Подставим в $\mu(Q)$ буквы u_i вместо слов $b^{-i}u^{-1}b^{i}vb^{-i}ub^{i}$, $i = 1, \ldots, n+4$. Тогда $\mu(Q)$ перейдет в $\eta(Q)$, и, очевидно, $\eta(Q) \overset{G_6}{=} 1$. Но $\eta(Q)$ уже не содержит букв u, а в группе G_6 буква u — правильная проходная (лемма 1). Тогда по лемме П. С. Новикова (см. начало введения) $\eta(Q) \overset{G_5}{=} 1$. Поскольку $G_5 \simeq G_4$ и при этом изоморфизме $\eta(Q)$ переходит в Q, то $Q \overset{G_4}{=} 1$. Лемма 2 доказана.

Далее, через X будем обозначать произвольное слово из класса слов $\mathfrak{A}$ группы G_0, $W =_{\mathrm{def}} \mu(X)$, $Y =_{\mathrm{def}} \mu(g_{n+1})$, $Z_1 =_{\mathrm{def}} \mu(g_{n+2})$, $Z_2 =_{\mathrm{def}} \mu(g_{n+4})$, $T =_{\mathrm{def}} \mu(g_{n+3})$. Буквы X, W, Y, Z_1, Z_2, T будут употребляться лишь в указанном здесь смысле.

По любому слову X будем строить к. о. группы, которые будем обозначать нижним индексом X, например — E_X, H_X, F_X. Классы к. о. групп, которые получаются, когда X пробегает $\mathfrak{A}$, будем обозначать через $\{E_X\}_{X \in \mathfrak{A}}$, $\{H_X\}_{X \in \mathfrak{A}}$ и т. д.

Лемма 3. 1. *В группе G_7 элементы b, v, YbY^{-1}, Z_1, Z_2 являются свободными образующими порожденной ими подгруппы.*

2. *Пусть $W \overset{G_7}{\neq} 1$. Тогда u, b, W, TgT являются свободными образующими порожденной ими подгруппы группы G_7.*

3. *Пусть $W \overset{G_7}{\neq} 1$. Тогда, если*

$$Z_1^{\varepsilon}\varphi_1(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Z_2)Z_1^{-\varepsilon}\varphi_2(u,\ b,\ W,\ TgT) \overset{G_7}{=} 1, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

то $\varphi_1(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Z_2) \overset{G_7}{=} 1$; если

$$Z_2^{\varepsilon}\varphi_1(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Z_1)Z_2^{-\varepsilon}\varphi_2(u,\ b,\ W,\ TgT)\overset{G_7}{=}1,\ \varepsilon=\pm 1,$$

то $\varphi_1(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Z_1)\overset{G_7}{=}1$.

Допустим, что некоторое слово $\varphi(b, v, YbY^{-1}Z_1,\ Z_2)\overset{G_7}{=}1$. Однако

$$\varphi(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Z_1,\ Z_2)\ \underline{\circ}\ \mu(\varphi(b,\ v,\ g_{n+1}bg_{n+1}^{-1},\ g_{n+2},\ g_{n+4}))$$

и по лемме 6

$$\varphi(b,\ v,\ g_{n+1}bg_{n+1}^{-1},\ g_{n+2},\ g_{n+4})\overset{G_4}{=}1.$$

Очевидно, в группе G_4, b, v, $g_{n+1}bg_{n+1}^{-1}$, g_{n+2}, g_{n+4} являются свободными образующими порожденной ими подгруппы. Следовательно, $\varphi(t_1, \ldots, t_5)\equiv 1$ в свободной группе $\ll t_1, \ldots, t_5\gg$.

Утверждения 2) и 3) леммы 4 будем доказывать одновременно. Ввиду симметрий в третьем пункте будем доказывать только первое утверждение Доказательство второго утверждения получается из первого заменой $Z_1\leftrightarrow Z_2$.

В группе G_7 добавим новые образующие $u_1, \ldots, u_{n+4}$ и новые определяющие соотношения $u_i=b^{-i}u^{-1}b^ivb^{-i}ub^i$, $i=1, \ldots, u+4$. Поскольку $A_j'\ \underline{\circ}\ \mu(B_j)$, $j=1, \ldots, m$, а кодировка μ получается из η заменой u_i на $b^{-i}u^{-1}b^iv$ $b^{-i}ub^i$, то в определяющих соотношениях группы G_7 можно сделать обратную замену и тогда получим группу $G_6\simeq G_7$. Если некоторое

$$\varphi(u,\ b,\ W,\ TgT)\overset{G_7}{=}1$$

или

$$Z_1^{\varepsilon}\varphi_1(b,\ v,\ YbY^{-1},\ Z_2)Z_1^{-\varepsilon}\varphi_2(u,\ b,\ W,\ TgT)\overset{G_7}{=}1,$$

то, поскольку $W\ \underline{\circ}\ \mu(X)$, $Y\ \circ\ \mu(g_{n+1})$, $Z_1\ \underline{\circ}\ \mu(g_{n+2})$, $Z_2\ \underline{\circ}\ \mu(g_{n+4})$, $T\ \underline{\circ}\ \mu(g_{n+3})$ получим

$$\varphi(u,\ b,\ \eta(X),\ \eta(g_{n+3}gg_{n+3}))\overset{G_6}{=}1\ ; \tag{1}$$

$$\eta^{\varepsilon}(g_{n+2})\varphi_1(b,\ v,\ \eta(g_{n+1}bg_{n+1}^{-1}),\ \eta(g_{n+4}))\eta^{-\varepsilon}(g_{n+2})\varphi_2(u,\ b,\ \eta(X),\ \eta(g_{n+3}gg_{n+3}))\overset{G_6}{=}1. \tag{2}$$

Утверждения леммы докажем индукцией по число λ множителей u^k, входящих в слова с левой стороны равенств (1) и (2).

Пусть $\lambda=0$. Тогда

$$\varphi(b,\ \eta(X),\ \eta(g_{n+3}gg_{n+3}))\overset{G_6}{=}1$$

и

$$\eta^{\varepsilon}(g_{n+2})\varphi_1(b,\ v,\ \eta(g_{n+1}bg_{n+1}^{-1}),\ \eta(g_{n+4}))\eta^{-\varepsilon}(g_{n+2})\varphi_2(b,\ \eta(X),\ \eta(g_{n+3}gg_{n+3}))\overset{G_6}{=}1.$$

Но по лемме 1 буква u — правильная проходная в группе G_6, и по лемме П. С. Новикова эти равенства будут выполняться и в G_5. Однако, $G_5\simeq G_4$ и при этом изоморфизме

$$\varphi(b,\ X,\ g_{n+3}gg_{n+3}) \overset{G_4}{=} 1,$$

$$g_{n+2}^{\varepsilon}\varphi_1(b,\ v,\ g_{n+1}bg_{n+1}^{-1},\ g_{n+4})g_{n+2}^{-\varepsilon}\varphi_2(b,\ X,\ g_{n+3}gg_{n+3}) \overset{G_4}{=} 1.$$

По условию $W \neq 1$ в группе G_7 и по лемме 2 $X \neq 1$ в G_4 и, следовательно $X \neq 1$ в G_0. Тогда в группе G_4 $b,\ v,\ X,\ g_{n+2},\ g_{n+4},\ g_{n+1}bg_{n+1}^{-1},\ g_{n+3}gg_{n+3}$ являются свободными образующими порожденной ими подгруппы группы G_4. Отсюда следуют и утверждения леммы.

Пусть $\lambda = \lambda_0 + 1$, причем для равенств (1) и (2), в левой стороне которых находятся не больше λ_0 множителей u^k, утверждение 2) и 3) леммы 3 верны.

Пусть в слове $\varphi(u,\ b,\ \eta(X),\ \eta(g_{n+3}gg_{n+3}))$ (соответственно в слове $\varphi_2(u,\ b,\ \eta(X),\ \eta(g_{n+3}gg_{n+3}))$ имеется хотя бы одна буква u. Но в группе G_6 буква u — правильная проходная и по лемме Бритона φ_1 (соответственно — φ_2) содержит подслово

$$u^{\delta}\psi(b,\ \eta(X),\ \eta(g_{n+3}gg_{n+3}))u^{-\delta},\quad \delta = \pm 1,$$

где при $\delta = -1$

$$\psi(b,\ \eta(X),\ \eta(g_{n+3}gg_{n+3})) \overset{G_5}{=} \alpha(bvb^{-1},\ \ldots,\ b^{n+4}vb^{-n-4}),$$

а при $\delta = 1$

$$\psi(b,\ \eta(X),\ \eta(g_{n+3}gg_{n+3})) \overset{G_5}{=} \alpha(bu_1b^{-1},\ \ldots,\ b^{n+4}u_{n+4}b^{-n-4}).$$

Так как оба случая рассматриваются вполне аналогично, то рассмотрим лишь второе равенство.

Пусть $\psi \neq 1$ и $\alpha \neq 1$ и в слове $\psi\alpha^{-1}$ сделаны все возможные сокращения. В полученном после сокращений слове будут содержаться буквы b, ибо $\alpha \neq 1$, а множитель $b^iu_ib^{-i}$ из α не может полностью сократиться в слове ψ, поскольку в ψ буквы v^{-1} и u_i всегда рядом. В группе G_5 буква b — правильная проходная, и по лемме Бриттона получаем, что в сокращенном слове $\psi\alpha^{-1}$ содержится подслово

$$b^{\sigma}\beta(\eta(X),\ \eta(g_{n+3}gg_{n+3}))u_{i_1}^{l}b^{-\sigma},\quad \sigma = \pm 1,$$

где

$$\beta(\eta(X),\ \eta(g_{n+3}gg_{n+3}))u_{i_1}^{l} = 1$$

в группе

$$G_5' = \langle\!\langle v,\ u_1,\ \ldots,\ u_{n+4},\ g;\ A_1 = 1,\ \ldots,\ A_m = 1,\ g^r = 1\rangle\!\rangle.$$

Определяющие соотношения этой группы таковы, что общая сумма степенных показателей v и u_i в каждом из них равна 0. Следовательно, $l = 0$ и $\beta(\eta(X),\ \eta(g_{n+3}gg_{n+3})) \overset{G_5'}{=} 1$. Дальше, как и в случае $\lambda = 0$, получаем $\beta(\eta(X),\ \eta(g_{n+3}gg_{n+3})) = 1$. Но это означает, что $\psi\alpha^{-1}$ не сокращено полностью, что противоречит допущению. Следовательно, либо $\psi = 1$, либо $\alpha = 1$. Если $\alpha = 1$, то как и в случае $\lambda = 0$ получаем $\psi = 1$. Но тогда, сократив в слове φ (соответственно в слове φ_2) подслово ψ и соединив соседние слову

ψ множители u^{k_1} и u^{k_2} в одном, получим слово, к которому применимо индуктивное предположение. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Элементы $b, v, YbY^{-1}, Z_1a^{-1}Z_2$ являются свободными образующими порожденной ими подгруппы группы $G_7*\langle\langle a\rangle\rangle$.*

Пусть $\varphi(b, v, YbY^{-1}, Z_1\,a^{-1}Z_2)$ — произвольное слово, составленное из $b, v, YbY^{-1}, Z_1a^{-1}Z_2$, и пусть $\varphi(b, v, YbY^{-1}, Z_1\,a^{-1}Z_2)=1$ в группе $G_7*\langle\langle a\rangle\rangle$.

Утверждение докажем индукцией по числу λ множителей $Z_1a^{-1}Z_2$ в слове φ.

Пусть $\lambda=0$. Тогда $\varphi(b, v, YbY^{-1})=1$ в группе $G_7*\langle\langle a\rangle\rangle$. Следовательно, $\varphi=1$ в G_7. По лемме 2 $\varphi(b, v, g_{n+1}bg_{n+1}^{-1})\overset{G_4}{=}1$. Но в G_4 элементы $b, v, g_{n+1}bg_{n+1}^{-1}$ очевидно являются свободными образующими порожденной ими подгруппы, т. е. $\varphi(t_1, t_2, t_3)\equiv 1$ в свободной группе $\langle\langle t_1, t_2, t_3\rangle\rangle$.

Пусть $\lambda=\lambda_0+1$, причем лемма 4 доказана для всех слов φ, для которых $\lambda\leqq\lambda_0$. Пусть в слове φ λ_0+1 множителей $Z_1a^{-1}Z_2$. Буква a — правильная проходная буква в $G_7*\langle\langle a\rangle\rangle$ и по лемме Бриттона φ содержит подслово вида $a^{\varepsilon}\psi a^{-\varepsilon}$, $\varepsilon=\pm1$, где

$$\psi \overline{\underline{\circ}}\ Z_1^{-\varepsilon}\psi_1(b, v, YbY^{-1})Z_1^{\varepsilon}\overset{G_7}{=}1$$

или

$$\psi \overline{\underline{\circ}}\ Z_2^{-\varepsilon}\psi_1(b, v, YbY^{-1})Z_2^{\varepsilon}\overset{G_7}{=}1.$$

Отсюда, повторяя рассуждения случая $\lambda=0$, для $\psi_1(b, v, YbY^{-1})\overset{G_7}{=}1$ получим, что $\psi_1(t_1, t_2, t_3)\equiv 1$ в $\langle\langle t_1, t_2, t_3\rangle\rangle$. Но тогда ψ_1 можно сократить, соседние ему слова $(Z_1a^{-1}Z_2)^{-\varepsilon}$ и $(Z_1a^{-1}Z_2)^{\varepsilon}$ также сократятся, а к полученному слову уже применимо индуктивное предположение. Лемма 4 доказана.

Рассмотрим группу

$$E_X=\langle\langle g, u, b, v, a;\ A_1'=1, \ldots, A_m'=1, g^r=1, Wa=aYbY^{-1},$$
$$ua=ab,\ ba=av,\ TgTa=aZ_1a^{-1}Z_2\rangle\rangle,$$

где, как и раньше, $A_j'\ \overline{\underline{\circ}}\ \mu(B_j)$, $j=1, \ldots, m$; $W\circ\mu(X)$, $X\in\mathfrak{A}$; $Y\ \overline{\underline{\circ}}\ \mu(g_{n+1})$; $Z_1\ \overline{\underline{\circ}}\ \mu(g_{n+1})$; $Z_2\ \overline{\underline{\circ}}\ \mu(g_{n+4})$; $T\ \overline{\underline{\circ}}\ \mu(g_{n+3})$.

Лемма 5. *Пусть $W\neq1$ в G_7. Тогда a является правильной квазипроходной буквой группы E_X.*

Основанием группы E_X по квазипроходной букве a является группа G_7. Из второго условия леммы 3 и из леммы 4 следует, что соответствие L_a является изоморфизмом подгрупп, порожденных левыми и правыми частями L_a в группе $G_7*\langle\langle a\rangle\rangle$.

Лемма 6. *Пусть $W\overset{G_7}{\neq}1$. Тогда*

1) *u, b, W, T^2 являются свободными образующими порожденной ими подгруппы группы G_7.*

2) *Если $Z_1^{\varepsilon}\varphi_1(b, v, YbY^{-1}, Z_2)Z_1^{-\varepsilon}\varphi_2(u, b, W, T^2)\overset{G_7}{=}1$, $\varepsilon=\pm1$ то $\varphi_1(b, v, YbY^{-1}, Z_2)\overset{G_7}{=}1$; если $Z_2^{\varepsilon}\varphi_1(b, v, YbY^{-1}, Z_1)Z_2^{-\varepsilon}\varphi_2(u, b, W, T^2)\overset{G_7}{=}1$, $\varepsilon=\pm1$, то $\varphi_1(b, v, YbY^{-1}, Z_1)\overset{G_7}{=}1$.*

Лемма 6 доказывается аналогично лемме 3.

2. Распознаваемость инвариантных групповых свойств в ограниченных алфавитах. Групповое свойство M назовем *марковским свойством в p-буквенном алфавите,* если

1) M — инвариантное (т. е. сохраняющееся при изоморфизме) свойство;

2) существует к. о. группа J_1 с p образующими, обладающая свойством M;

3) существует к. о. группа J_2, не вложимая ни в какую группу со свойством M.

Свойства, удовлетворяющие условиям 1, 2 и 3, принято называть марковскими, поскольку впервые эти условия рассматривались в работах А. А. Маркова по распознаванию свойств ассоциативных исчислений.

Ясно, что, если M — марковское свойство в p_1-буквенном алфавите, то для любого $p_2 \geqq p_1$ M будет и марковским свойством в p_2-буквенном алфавите. Поэтому p может быть то минимальное число образующих, при котором M впервые появляется.

Пусть M — марковское свойство в p-буквенном алфавите, такое, что группа J_1 с p образующими, которая обладает им, имеет образующую конечного порядка. При любом $p \geqq 1$ и для любого такого свойства M построим класс к. о. групп с $p+1$ образующими, для которого проблема распознавания этого свойства алгоритмически неразрешима.

Лемма 7. *Пусть M — марковское свойство в p-буквенном алфавите ($p \geq 1$), соответствующая которому группа J_1 имеет образующий элемент конечного порядка. Тогда в классе к. о. групп с фиксированным числом образующих $k \geq p+1$ проблема распознавания M алгоритмически неразрешима.*

Пусть M — произвольное марковское свойство в p-буквенном алфавите ($p \geqq 1$), такое, что группа J_1 с p образующими, которая обладает им, имеет образующий элемент конечного порядка. Возьмем в качестве группы J_2, на основе которой строилась группа G_1 из этой главы, ту группу J_2, которая не вложима ни в какую группу со свойством M, а в качестве G^0 — группу с неразрешимой проблемой тождества слов (см., например, [3] или [10]). В группе $J_1 = \langle\langle d_1, \ldots, d_p;\ D_1 = 1, \ldots, D_l = 1\rangle\rangle$, обладающей M, имеется образующая d_1 некоторого конечного порядка. Пусть r (см. определение группы G_2 в начале пункта 1) равно порядку d_1.

По произвольному слову X из класса $\mathfrak{A}$ построим группу H_X как свободное произведение групп E_X и J_1 с объединенными подгруппами, порожденными словами g и d_1:

$$H_X = (E_X * J_1)_{g=d_1}.$$

Тогда

$$H_X = \langle\langle a, b, u, v, g, d_1, \ldots, d_p;\ A'_1 = 1, \ldots, A'_m = 1, g^r = 1,$$
$$Wa = aYbY^{-1}, ua = ab, ba = av, TgTa = aZ_1a^{-1}Z_2,$$
$$g = d_1, \quad D_1 = 1, \ldots, D_l = 1\rangle\rangle.$$

Пусть $X \neq 1$ в $G_0 (X \in \mathfrak{A})$. Тогда $X \neq 1$ в G_4 и по лемме 2 $W \neq 1$ в G_7. Из первого и третьего пункта леммы 3 следует, что тогда в группе G_7 выполнено ограниченное условие свободы для слов Z_1 и Z_2 (см. введение). По лемме 5 буква a — правильная квазипроходная буква в группе E_X. Так как

G_7 является основанием группы E_X по квазипроходной букве a, то по лемме A (см. введение) группа G_7 является подгруппой группы E_X. Однако $G_7 \simeq G_6$, а по лемме 1 буква u — правильная проходная буква в группе G_6. По лемме П. С. Новикова группа G_5 является подгруппой G_6. Но $G_5 \simeq G_4$, а группа

$$G_4 = G_0 * J_2 * \langle\langle b, v\rangle\rangle * \langle\langle g, g_{n+1}, g_{n+2}, g_{n+3}, g_{n+4};\ g^r = 1\rangle\rangle.$$

Следовательно, группа J_2 изоморфно вкладывается в группу E_X, а на основании свойств свободного произведения с объединенными подгруппами — и в группу H_X. Но M — марковское свойство, поэтому H_X не обладает M.

Пусть $X \overset{G_0}{=} 1$. Тогда $X \overset{G_4}{=} 1$ и по лемме 2 $W \overset{G_7}{=} 1$. Но все образующие и определяющие соотношения G_7 являются образующими и определяющими соотношениями группы H_X, поэтому $W \overset{H_X}{=} 1$. Тогда из $Wa = aYbY^{-1}$ получаем $b = 1$, из $ua = ab$, $ba = av$ получаем $u = 1$, $v = 1$. Так как $A'_j \circeq \mu(B_j)$, $T \circeq \mu(g_{n+3})$, $Z_1 \circeq \mu(g_{n+2})$, $Z_2 \circeq \mu(g_{n+4})$, то $A'_j \equiv 1$, $(j = 1, \ldots, m)$, $T \equiv 1$, $Z_1 \equiv 1$, $Z_2 \equiv 1$. Получаем, что

$$H_X = \langle\langle a, g, d_1, \ldots, d_p;\ g^r = 1,\ g = a^{-1},\ g = d_1,\ D_1 = 1, \ldots, D_l = 1\rangle\rangle$$
$$= \langle\langle d_1, \ldots, d_p;\ d_1^r = 1,\ D_1 = 1, \ldots, D_l = 1\rangle\rangle \simeq J_1,$$

так как $d_1^r = 1$ выполняется в J_1. Но тогда H_X обладает свойством M, ибо оно инвариантно, и им обладает J_1.

Получили, что H_X обладает M тогда и только тогда, когда $X \overset{G_0}{=} 1$. Из неразрешимости проблемы равенства единице в группе G_0 для слов класса $\mathfrak{A}$ следует, что проблема распознавания того, обладает ли некоторая группа H_X свойством M, алгоритмически неразрешима.

Из $ua = ab$, $ba = av$, $TgTa = aZ_1a^{-1}Z_2$ можно выразить $u = aba^{-1}$, $v = a^{-1}ba$, $g = T^{-1}aZ_1a^{-1}Z_2a^{-1}T^{-1}$. Тогда H_X изоморфна группе

$$H'_X = \langle\langle a, b, d_2, \ldots, d_p;\ A''_1 = 1, \ldots, A''_m = 1,\ W_1a = aY_1bY_1^{-1},$$
$$(T_1^{-1}aZ'_1a^{-1}Z_2^1a^{-1}Z'_2a^{-1}T_1^{-1})^r = 1,\ \widetilde{D}_1 = 1, \ldots, \widetilde{D}_l = 1\rangle\rangle,$$

где

$$A''_j \circeq \tau(B_j),\ j = 1, \ldots, m;\ W_1 \circeq \tau(X);\ Y_1 \circeq \tau(g_{n+1});$$
$$Z'_1 \circeq \tau(g_{n+2}),\ Z'_2 \circeq \tau(g_{n+4});\quad T_1 \circeq \tau(g_{n+3}),$$

а слова $\widetilde{D}_1, \ldots, \widetilde{D}_l$ получаются из $D_1, \ldots, D_l$ заменой всех вхождений. d_1 с равным ему словом $T_1^{-1}aZ'_1a^{-1}Z'_2a^{-1}T_1^{-1}$. Кодировка τ определяется подстановкой $u = aba^{-1}$, $v = a^{-1}ba$ в кодировку μ:

$$\tau(g_i) \circeq a^{-1}b^{-1}ab^{-i}ab^{-1}a^{-1}b^ia^{-1}bab^{-i}aba^{-1}b^i,\ i = 1, \ldots, n+4,$$
$$\tau(g) \circeq g;\quad \tau(b) \circeq b;\quad \tau(u) \circeq aba^{-1};\quad \tau(v) \circeq a^{-1}ba.$$

Следовательно, проблема распознавания свойства M для класса групп с $p+1$ образующими $A = \{H'_X\}_{X \in \mathfrak{A}}$ алгоритмически неразрешима. Но тогда неразрешима и проблема распознавания M в классе к. о. групп с фиксированным числом образующих, большим или равным $p+1$. Лемма 7 доказана.

Рассмотрим группу

$$\Gamma_X = \langle\langle g, u, b, v, a;\ A_1' = 1, \ldots, A_m' = 1, g^r = 1, Wa = YbY^{-1},$$
$$ua = ab,\ ba = av\rangle\rangle.$$

Лемма: 8. *Пусть $W \neq 1$ в G_7. Тогда буква a является правильной проходной буквой в группе Γ_X.*

Основанием Γ_X по проходной букве a будет группа G_7, а соответствие L_a имеет вид

$$W - YbY^{-1};\ u - b;\ b - v.$$

Из первого и второго условия леммы 3 следует, что u, b, W и b, v, YbY^{-1} являются свободными образующими порожденных ими подгрупп группы G_7. Лемма 8 доказана.

Пусть M — марковское свойство в p-буквенном алфавите, такое, что группа J_1 с p образующими, которая обладает им, имеет элемент бесконечного порядка. При любом $p \geq 1$ и для любого такого свойства M построим класс к. о. групп с $p+1$ образующими, для которого проблема распознавания этого свойства алгоритмически неразрешима.

Лемма 9. *Пусть M — марковское свойство в p-буквенном алфавите ($p \geq 1$), соответствующая которому группа J_1 имеет элемент бесконечного порядка. Тогда в классе к. о. групп с фиксированным числом образующих $k \geq p+1$ проблема распознавания M алгоритмически неразрешима.*

Пусть M — произвольное марковское свойство в p-буквенном алфавите ($p \geq 1$), такое, что группа J_1 с p образующими, которая обладает им, имеет элемент бесконечного порядка. Возьмем в качестве группы J_2, на основе которой строилась группа G_1 из главы I, ту группу J_2, которая не вложима ни в какую группу со свойством M, а в качестве G^0 — любую группу с неразрешимой проблемой тождества слов (см. [3] или [10]). Пусть в группе G_2 $r=1$. Тогда в G_2 букву g можно не писать.

В группе Γ_X сумма степенных показателей a в каждом определяющем соотношении (записанном в виде $R=1$) равна 0, поэтому a порождает бесконечную циклическую подгруппу. В группе

$$J_1 = \langle\langle d_1, \ldots, d_p;\ D_1 = 1, \ldots, D_l = 1\rangle\rangle,$$

обладающей M, по определении имеется элемент S бесконечного порядка. Рассмотрим свободное произведение Γ_X и J_1 с объединенными подгруппами, порожденными словами a и S: $F_X = (\Gamma_X * J_1)_{a=S}$. Группа F_X имеет вид

$$F_X = \langle\langle a, b, u, v, d_1, \ldots, d_p;\quad A_1' = 1, \ldots, A_m' = 1,$$
$$Wa = aYbY^{-1},\quad ua = ab,\quad ba = av,\quad a = S,\ \ D_1 = 1, \ldots, D_l = 1\rangle\rangle$$

Очевидно, по любому слову X из класса $\mathfrak{A}$ можно построить группу F_X.

Пусть $X \neq 1$ в G_0. Тогда $X \neq 1$ в G_4 и по лемме 2 $W \neq 1$ в G_7. По лемме 8 буква a — правильная проходная буква в группе Γ_X. По лемме П.С. Новикова G_7 является подгруппой Γ_X. Однако $G_7 \simeq G_6$, в G_6 буква u — правильная проходная (лемма 1), и снова по лемме П. С. Новикова G_5 будет подгруппой группы G_6. Но $G_5 \simeq G_4$, а

$$G_4 = G_0 * J_2 * \langle\langle b, v\rangle\rangle * \langle\langle g_{n+1}, g_{n+2}, g_{n+3}, g_{n+4}\rangle\rangle,$$

поэтому J_2 изоморфно вкладывается в Γ_X, а, следовательно, и в F_X. Свойство M — марковское, поэтому F_X свойством M не обладает.

Пусть $X \overset{G_0}{=} 1$. Тогда $X \overset{G_4}{=} 1$ и по лемме 6 $W \overset{G_7}{=} 1$. Из записи группы G_7 и группы F_X следует, что тогда $W \overset{F_X}{=} 1$. Из определяющих соотношений $Wa = aYbY^{-1}$, $ua = ab$, $ba = av$ получаем $b = 1$, $u = 1$, $v = 1$. Поскольку $A'_j \overline{\underline{\circ}}\, \mu(B_j)$, то $A_j = 1$, $j = 1, \ldots, m$. Получаем, что

$$F_X = \langle\langle a, d_1, \ldots, d_p;\ a = S, D_1 = 1, \ldots, D_l = 1\rangle\rangle \simeq J_1.$$

Свойство M инвариантно, поэтому F_X обладает M.

Получили, что F_X обладает M тогда и только тогда, когда $X \overset{G_0}{=} 1$. Из неразрешимости проблемы равенства единице в группе G_0 для слов класса $\mathfrak{A}$ следует, что проблема распознавания того, обладает ли некоторая группа F_X из полученного класса к. о. групп свойством M, алгоритмически неразрешима.

Из $ua = ab$, $ba = av$ выразим $u = aba^{-1}$, $v = a^{-1}ba$. Тогда, подставляя во всех вхождениях букв u и v равные им слова, получим следующую группу, изоморфную F_X:

$$\langle\langle a, b, d_1, \ldots, d_p;\ A''_1 = 1, \ldots, A''_m = 1,\ W_1 a = aY_1 bY_1^{-1},$$
$$a = S,\ D_1 = 1, \ldots, D_l = 1\rangle\rangle,$$

где, как и раньше,

$$A''_j \overline{\underline{\circ}}\, \tau(B_j),\ J = 1, \ldots, m;\ W_1 \overline{\underline{\circ}}\, \tau(X);\ Y_1 \overline{\underline{\circ}}\, \tau(g_{n+1}),$$

а кодировка τ имеет вид:

$$\tau(g_i) \overline{\underline{\circ}}\, a^{-1}b^{-1}ab^{-i}aba^{-1}b^{i}a^{-1}bab^{-i}aba^{-1}b^{i},\ i = 1, \ldots, n+4$$
$$\tau(b) \overline{\underline{\circ}}\, b;\quad \tau(u) \overline{\underline{\circ}}\, aba^{-1},\quad \tau(v) \overline{\underline{\circ}}\, a^{-1}ba.$$

Если в словах A''_j, W_1, Y_1 все вхождения буквы a заменим на S, то получим слова $\widetilde{A}''_j$, $\widetilde{W}_1$, $\widetilde{Y}_1$, а группа F_X запишется так:

$$F'_X = \langle\langle b, d_1, \ldots, d_p;\ \widetilde{A}''_1 = 1, \ldots, \widetilde{A}''_m = 1,\ \widetilde{W}_1 S = S\widetilde{Y}_1 b\widetilde{Y}_1^{-1}$$
$$D_1 = 1, \ldots, D_l = 1\rangle\rangle,$$

т. е. F_X имеет $p+1$ образующие. Лемма 9 доказана.

Теорема 1. *В классе к. о. групп с фиксированным числом образующих $k \geq p+1$ неразрешима проблема распознавания любого марковского свойства в p-буквенном алфавите ($p \geq 1$).*

Пусть M — произвольное марковское свойство в p-буквенном алфавите ($p \geqq 1$). Допустим, что существует алгоритм распознавания свойства M в классе к. о. групп с $p+1$ образующими. Но $p \geqq 1$, следовательно, группа J_1, обладающая M, имеет хотя бы одну образующую d. Индукцией по n докажем, что тогда для любого n $d^n \neq 1$ в группе J_1.

Если $d = 1$ в J_1, то образующая d будет первого порядка и, следовательно, по лемме 7 проблема распознавания M в классе к. о. групп с $p+1$ образующими алгоритмически неразрешима, что противоречит допущению. Следовательно, $d \neq 1$ в группе J_1.

Допустим, что для всех $k \leqq n$ утверждение доказано. Если $d^{n+1} \overset{J_1}{=} 1$, то на основании индуктивного предположения получаем, что d — образующая группы J_1 порядка $n+1$. Тогда снова по лемме 7 получаем противоречие с допущением. Утверждение доказано. Но тогда d будет элементом бесконечного порядка в группе J_1 и, поэтому получаем противоречие с утверждением леммы 9.

Следовательно, допущение неверно, т. е. в классе к. о. групп с $p+1$ образующими проблема распознавания любого марковского свойства в p-буквенном алфавите $(p \geqq 1)$ алгоритмически неразрешима.

Теорема 2. *В классе к. о. групп с фиксированным числом образующих k проблема распознавания изоморфизма свободной группе ранга p неразрешима тогда и только тогда, когда $k \geqq p+1$.*

Свойство M_p „быть изоморфным свободной группе ранга p является марковским свойством в p-буквенном алфавите $(p \geqq 1)$, и по лемме 9 проблема распознавания этого свойства неразрешима в классах к. о. групп с фиксированным числом образующих $k \geqq p+1$.

Докажем теперь, что для всякого $p \geqq 1$ проблема распознаваня этого свойства в классе к. о. групп с числом образующих $k \leqq p$ уже разрешима. Ранг свободной группы является инвариантом, поэтому никакая к. о. группа с числом образующих $k<p$ не обладает свойством M_p. Следовательно, нужен алгоритм распознавания M_p в классе к. о. групп с p образующими.

Пусть Γ — произвольная к. о. группа с p образующими. Если все определяющие соотношения группы Γ равны 1 в свободной группе, то, очевидно, Γ изоморфна свободной группе ранга p. Если в Γ имеются определяющие соотношения, неравные 1 в свободной группе, то Γ неизоморфна свободной группе ранга p. Это следует из того, что любая свободная группа конечного ранга хопфова, .т е. неизоморфна никакой своей истинной фактор-группе. Поскольку в свободной группе проблема тождества разрешима, то теорема 2 доказана.

Из теоремы 2 следует, что результат, полученный в теореме 1, является наилучшим для всего класса марковских свойств в p-буквенном алфавите. Это так, поскольку по теореме 2 существует марковское свойство в p-буквенном алфавите, проблема распознавания которого разрешима в алфавитах с числом букв, меньшим $p+1$.

В связи с доказательством теоремы 1 следует заметить, что можно построить следующий класс к. о. групп в $p+2$ буквенном алфавите, для которого проблема распознавания произвольного марковского свойства неразрешима.

В группе E_x положим $r=1$. Получим группу

$$E_X^0 = \langle\langle a, b, u, v;\ A_1'=1, \ldots, A_m'=1,\ Wa=aYbY^{-1},\ ua=ab,$$
$$ba=av,\ T^2a=aZ_1a^{-1}Z_2\rangle\rangle.$$

Пусть задано некоторое марковское свойство M. Тогда существует к. о. группа $J_1=\langle\langle d_1, \ldots, d_p;\ D_1=1, \ldots, D_l=1\rangle\rangle$, которая им обладает, и к. о. группа J_2', не вложимая ни в какую группу со свойством M. Определим группу L_x как свободное произведение групп E_x^0 и $J_1: L_x=E_x^0 * J_1$, т. е.

$$L_x = \langle\langle a, b, u, v, d_1, \ldots, d_p;\ A_1'=1, \ldots, A_m'=1,\ Wa=aYbY^{-1},$$
$$ua=ab,\ ba=av,\ T^2a=aZ_1a^{-1}Z_2,\ D_1=1, \ldots, D_l=1\rangle\rangle.$$

Пусть $X \overset{G_0}{\neq} 1$. Тогда $X \overset{G_4}{\neq} 1$ и по лемме 2 $W \overset{G_7}{\neq} 1$. По лемме 6 и по лемме 5, как и по лемме А из введения, следует, что группа G_7 является подгруппой группы E^0_x. Далее $G_7 \simeq G_6$, G_5 является подгруппой G_6, а $G_5 \simeq G_4$. Поскольку группа J_2 — подгруппа группы G_4, то J_2 — подгруппа группы E^0_x, а следовательно, и подгруппа группы L_X. Если в качестве J_2 возьмем группу J_2', то L_X не будет обладать свойством M.

Пусть $X \overset{G_0}{=} 1$. Тогда $X \overset{G_4}{=} 1$ и по лемме 2 $W \overset{G_7}{=} 1$. Но тогда $W \overset{E^0_X}{=} 1$. Из определяющих соотношений E^0_X следует, что тогда $b=1$, $u=1$, $v=1$, отсюда $A_j'=1$, $T=1$, $Z_1=1$, $Z_2=1$. Следовательно, из $T_a^2 = aZ_1a^{-1}Z_2$, получаем, что и $a=1$. Но тогда $L_X \simeq J_1$, т. е. L_X обладает M. Если в качестве G^0 возьмем группу с неразрешимой проблемой тождества слов, то получим, что проблема распознавания свойства M для класса групп $\{L_X\}_{X \in \mathfrak{A}}$ алгоритмически неразрешима. Однако, каждую группу L_X можно задать $p+2$ образующими, выражая u и v из соотношений $ua=ab$, $ba=av$ и подставляя эти выражения во все вхождения u и v в определяющие соотношения L_X, получим

$$L_X \simeq L_X' = \langle\langle a, b, d_1, \ldots, d_p;\ A_1''=1, \ldots, A_m''=1,\ \ W_1a = aY_1bY_1^{-1},$$
$$T_1^2a = aZ_1'a^{-1}Z_2',\ D_1, \ldots, D_l = 1\rangle\rangle,$$

где $A_j'' \,\underline{\circ}\, \tau(B_j)$, $j=1, \ldots, m$; $W_1 \,\underline{\circ}\, \tau(X)$, $Y_1 \,\underline{\circ}\, \tau(g_{n+1})$, $Z_1' \,\underline{\circ}\, \tau(g_{n+2})$,

$$Z_2' \,\underline{\circ}\, \tau(g_{n+3}),\ \ T_1 \,\underline{\circ}\, \tau(g_{n+4}),$$

а кодировка τ определяется как и раньше.

Из теоремы 1 можно получить ряд интересных следствий.

Следствие 1. *В классе к. о. групп с фиксированным числом образующих k проблема распознавания изоморфизма единичной группе неразрешима тогда и только тогда, когда $k \geq 2$.*

Единичную группу можно задать следующим образом: $\langle\langle d;\ d=1\rangle\rangle$, поэтому „быть изоморфным единочной группе“ является марковским свойством в однобуквенном алфавите (то, что это свойство марковское, легко проверяется). По теореме 1 проблема распознавания изоморфизма единичной группе неразрешима в классе к. о. групп с фиксированным числом образующих $k \geq 2$. Для групп с одной образующей проблема изоморфизма единичной группе решается нахождением наибольшего общего делителя всех степенных показателей определяющих соотношений. Следствие 1 доказано.

Заметим, что в построенном классе к. о. групп с неразрешимой проблемой распознавания изоморфизма единичной группе для всех групп

$$H_X' = \langle\langle a, b;\ \ A_1''=1, \ldots, A_m''=1,\ W_1a = aY_1bY_1^{-1},\ \ T_1^2a = aZ_1'a^{-1}Z_2'\rangle\rangle$$

достигнуто не только минимальное количество образующих, но и существенно снижено число определяющих соотношений в сравнении с ранее известными примерами. Если m — число определяющих соотношений группы с неразрешимой проблемой тождества слов, то группы H_X' имеют $m+2$ определяющих соотношений. Используя пример, построенный в [10], получим, что все группы имеют 2 образующие и 14 определяющих соотношений.

Метапроблема тождества слов для класса к. о. групп L формулируется следующим образом: требуется найти алгоритм, определяющий по произвольной группе из L, разрешима в этой группе проблема тождества слов или нет.

Следствие 2. *В классе к. о. групп с фиксированным числом образующих k метапроблема тождества слов неразрешима тогда и только тогда, когда $k \geq 2$.*

Свойство „быть группой с разрешимой проблемой тождества слов" является марковским свойством в однобуквенном алфавите. Проблема распознавания этого свойства в классе к. о. групп с одной образующей решается тривиально.

Отметим, что в построенном классе к. о. групп с неразрешимой метапроблемой тождества слов

$$\{F'_X = \langle\langle a, b;\ A''_1 = 1, \ldots, \ A''_m = 1,\ W_1 a = aY_1 bY_1^{-1}\rangle\rangle\}_{X \in \mathfrak{A}}$$

все группы имеют 2 образующие и 13 определяющих соотношений (см. лемму 9), если в качестве G^0 взят пример, построенный в [10].

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{M}$ — нетривиальное групповое тождество. В классе к. о. групп с фиксированным числом образующих k проблема распозназания того, в каких группах из этого класса выполняется $\mathfrak{M}$, неразрешима тогда и только тогда, когда $k \geq 2$.*

Свойство „быть группой, в которой выполняется нетривиальное групповое тождество $\mathfrak{M}$", является марковским свойством в однобуквенном алфавите. Проблема распознавания этого свойства в классе к. о. групп с одной образующей решается легко.

В частности, из этого следствия получаем, что в классе к. о. групп с фиксированным числом образующих k проблема распознавания таких свойств как „быть абелевой группой", быть нильпотентной группой", „быть разрешимой группой", неразрешима тогда и только тогда, когда $k \geq 2$.

Отметим, что к. о. группы из построенных нами классов к. о. групп с неразрешимой проблемой распознавания абелевости, нильпотентности, разрешимости имеют 2 образующие и 13 определяющих соотношений (см. лемму 9), если в качестве G^0 взять группу, построенную в [10].

Следствие 4. *В классе к. о. групп с фиксированным числом образующих k проблема распознавания каждого из следующих свойств:*

а) *быть свободной группой;*

б) *быть конечной группой;*

в) *быть периодической группой;*

г) *быть циклической группой;*

д) *быть группой без кручения*

неразрешима тогда и только тогда, когда $k \geq 2$.

Все эти свойства — марковские свойства в однобуквенном алфавите, поэтому проблема распознавания каждого из них неразрешима в классе к. о. групп с числом образующих $k \geq 2$. Проблема распознавания каждого из них для групп с одной образующей легко решается нахождением наибольшего общего делителя всех степенных показателей определяющих соотношений рассматриваемой группы.

Для свойств б), в), г) к. о. группы в построенном нами классе к. о. групп с неразрешимой проблемой распознавания соответствующего свойства имеют 2 образующие и 14 определяющих соотношений. Для свойств а), д) к. о. группы из соответствующего класса имеют 2 образующие и 13 определяющих соотношений и выглядят так:

$$F'_X = \langle\langle a, b;\ A''_1 = 1, \ldots, A''_m = 1,\ W_1 a = aY_1 bY_1^{-1}\rangle\rangle.$$

Список свойств из следствия 4 можно значительно продолжить.

Отметим, что построенные классы к. о. групп с $p+1$ образующими в леммах 7 и 9 дают возможность найти минимальное число образующих k_0, при котором имеют неразрешимость проблемы распознавания и для других, возможно немарковских, свойств в классе к. о. групп с этим числом образующих. Для этого достаточно, например, чтобы существовала к. о. группа с этим свойством и чтобы группы F'_X или H'_X при $X \neq 1$ в G_0 им не обладали.

Метапроблема сопряженности слов для класса к. о. групп L формулируется следующим образом: требуется найти алгоритм, определяющий по произвольной группе из L, разрешима в этой группе проблема сопряженности слов или нет.

Следствие 5. *В классе к. о. групп с фиксированным числом образующих k метапроблема сопряженности слов неразрешима тогда и только тогда, когда $k \geq 2$.*

Свойство „быть группой с разрешимой проблемой сопряженности слов" является марковским свойством в однобуквенном алфавите — им обладает, например, группа $\langle\langle d;\ d^2 = 1\rangle\rangle$. Проблема распознавания этого свойства в классе к. о. групп с одной образующей решается тривиально, ибо все группы с одной образующей имеют разрешимую проблему сопряженности.

Следствие 6. *В классе к. о. групп с фиксированным числом образующих k проблема распознавания свойства „быть простой группой" неразрешима тогда и только тогда, когда $k \geq 2$.*

Свойство „быть простой группой" является марковским свойством в однобуквенном алфавите, ибо им обладает группа $\langle\langle d;\ d^q = 1\rangle\rangle$, где q — простое число.

Проблема распознавания простоты в группах с одной образующей сводится к отысканию наибольшего общего делителя степенных показателей определяющих соотношений рассматриваемой группы и к определению того, является ли этот делитель простым числом.

Группа называется хопфовой, если она не изоморфна никакой своей истинной фактор-группе. До сих пор неизвестно, является ли хопфовость марковским свойством, поскольку остается открытым вопрос о вложимости произвольной к. о. группы в к. о. хопфову группу. С другой стороны, свойство „не быть хопфовой группой" не является марковским, ибо любую к. о. группу можно вложить в нехопфовую группу. Поэтому алгоритмическая распознаваемость хопфовости представляет самостоятельный интерес. Д. Коллинз в работе [13] построил класс к. о. групп с неразрешимой проблемой распознавания хопфовости. Используя полученные выше результаты, можно построить более простой класс к. о. групп с неразрешимой проблемой распознавания хопфовости. Все группы этого класса будут с 3 образующими и $m+2$ определяющими соотношениями, где m — число определяющих соотношений группы с неразрешимой проблемой тождества слов. В частности, если взять пример, построенный В. В. Борисовым [10], то все группы из построенного класса будет с 3 образующими и 14 определяющими соотношениями, чем значительно упрощается пример Коллинза.

Теорема 3. *В классе к. о. групп с фиксированным числом, образующим $k \geq 3$, продлема распознавания хопфовости алгоритмически неразрешима.*

По произвольному слову X из класса $\mathfrak{A}$ группы G_0 с неразрешимой проблемой тождества слов была построена группа Γ_X. Пусть в этой группе добавлено соотношение $g=1$. Если $W \overline{\underline{\circ}}\, \mu(X) \underset{\Gamma_X}{\overset{G_7}{\neq}} 1$, то b имеет в группе Γ_X бесконечный порядок. Действительно, если $b^n = 1$, то по лемме 8 и по лемме П. С. Новикова $b^n \overset{G_7}{=} 1$, но тогда по лемме 2 $b^n \overset{G_4}{=} 1$, что невозможно, так как в группе G_4 b имеет бесконечный порядок. Легко убедиться также, что в группе $\Gamma = \langle\langle s, t;\ s^2t = ts^3 \rangle\rangle$ буква t имеет бесконечный порядок.

Рассмотрим группу

$$\Gamma_X^0 = \langle\langle\, a, b, u, v, s, t;\ \ A_1' = 1, \ldots, A_m' = 1,\ Wa = aYbY^{-1},\ ua = ab,$$
$$ba = av,\ b = t,\ s^2t = ts^3 \rangle\rangle.$$

Пусть $X \overset{G_0}{\neq} 1$. Тогда $W \overset{G_7}{\neq} 1$. В этом случае Γ_X^0 является свободным произведением групп Γ_X и Γ с объединенными подгруппами, порожденными b и t. Покажем, что группа Γ_X^0 не является хопфовой. Зададим отображение φ

$$u \to u,\ v \to v,\ a \to a,\ b \to b,\ t \to t,\ s \to s^2$$

группы Γ_X^0 в себя. Отображение φ является эндоморфизмом группы Γ_X^0, так как для всех определяющих соотношений Γ_X^0 их образы также являются соотношениями — поскольку на u, v, a, b, t отображение φ действует тождественно, то $\varphi(A_j') = 1, \varphi(WaYb^{-1}Y^{-1}a^{-1}) = 1, \varphi(uab^{-1}a^{-1}) = 1, \varphi(bav^{-1}a^{-1}) = 1$, $\varphi(bt^{-1}) = 1$. Кроме того, $\varphi(s^2ts^{-3}t^{-1}) = s^4ts^{-6}t^{-1} = s^4(ts^{-3}t^{-1})^2 = s^4 \cdot s^{-4} \equiv 1$. Отображение φ есть эндоморфизм „на", ибо все образующие группы Γ_X^0 принад лежат также и образу эндоморфизма: на u, v, a, b, t эндоморфизм φ действует тождественно, а поскольку $s \overset{\Gamma_X^0}{=} t^{-1}s^2ts^{-2}$, то $s \overset{\Gamma_X^0}{=} \varphi(t^{-1}sts^{-1})$.

Наконец, φ не является автоморфизмом, ибо существует слово из группы Γ_X^0, которое не равно 1 в группе Γ_X^0, но его образ равен единице в Γ_X^0. Действительно,

$$\varphi(s^{-1}t^{-1}sts^{-1}t^{-1}sts^{-1}) = s^{-2}t^{-1}s^2ts^{-2}t^{-1}s^2ts^{-2} \overset{\Gamma_X^0}{=} s^{-2}s^3s^{-2}s^3s^{-2} \equiv 1.$$

Допустим, что $s^{-1}t^{-1}sts^{-1}t^{-1}sts^{-1} \overset{\Gamma_X^0}{=} 1$. Но $\Gamma_X^0 = (\Gamma_X * \Gamma)_{\langle b\rangle = \langle t\rangle}$, поэтому $s^{-1}t^{-1}sts^{-1}t^{-1}sts^{-1} \overset{\Gamma}{=} 1$, что невозможно, так как в Γ буква t — правильная проходная буква и тогда, по лемме Бриттона, s принадлежало бы либо подгруппе, порожденной в $\langle\langle s \rangle\rangle$ словом s^2, либо подгруппе, порожденной s^3 в $\langle\langle s \rangle\rangle$.

Следовательно, если $X \neq 1$ в G_0, то группа Γ_X^0 не будет хопфовой.

Пусть $X \overset{G_0}{=} 1$. Тогда $X \overset{G_4}{=} 1$ и по лемме 2 $W \overset{G_7}{=} 1$. Но тогда $W \overset{\Gamma_X}{=} 1$, а, следовательно, это будет выполняться и в группе Γ_X^0. Из $Wa = aYbY^{-1}$ получим $b=1$, а из $ua=ab$, $ba=av-a=1$ и $v=1$. На основании кодировки μ $A'_j \overline{\circ}\, \mu(B_j)=1$. Из соотношений $b=t$, $s^2t=ts^3$ получим, что $t=1$, $s=1$. Следовательно, $I^0_X \simeq \langle\langle a \rangle\rangle$ и, как известно, бесконечная циклическая группа является хопфовой.

Итак, группа I^0_X хопфова тогда и только тогда, когда $X \overset{G_0}{=} 1$.

В группе I^0_X можно выразить u и v : $u=aba^{-1}$, $v=a^{-1}ba$. Подставляя в определяющие соотношения группы I^0_X слова aba^{-1} и $a^{-1}ba$ вместо u и v, получим группу I_X, изоморфную I^0_X:

$$I_X = \langle\langle a, b, s;\ A''_1=1, \ldots,\ A''_m=1,\ W_1a=aY_1bY_1^{-1},\ s^2b=bs^3 \rangle\rangle,$$

где $A''_j \overline{\circ}\, \tau(B_j)$, $j=1, \ldots, m$, $W_1 \overline{\circ}\, \tau(X)$, $Y_1 \overline{\circ}\, \tau(g_{n+1})$,

а $\tau(g_i) \overline{\circ}\, a^{-1}b^{-1}ab^{-i}ab^{-1}a^{-1}b^ia^{-1}bab^{-i}aba^{-1}b^i$, $i=1, \ldots, n+3$, $\tau(b) \overline{\circ}\, b$, $\tau(v) \overline{\circ}\, a^{-1}ba$, $\tau(u) \overline{\circ}\, aba^{-1}$.

Следовательно, для класса к. о. групп $\{I_X\}_{X \in \mathfrak{N}}$ проблема распознавания хопфовости алгоритмически неразрешима.

Вопрос о нахождении точной границы для числа образующих, при которой хопфовость алгоритмически неразрешима, остается открытым.

Отметим, наконец, что все результаты, полученные в этой главе для групповых свойств, имеют место и для отрицаний этих свойств (которые, однако, могут и не быть марковскими). Это так, поскольку алгоритм, который распознает некоторое свойство в классе L_k, распознает тем самым и отрицание этого свойства в L_k.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Новиков. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества. *Доклады АН СССР*, **85**, 1952, 709—712.
2. П. С. Новиков. Неразрешимость проблемы сопряженности в теории групп. *Известия АН СССР, серия математическая*, **18**, 1954, 485—524.
3. П. С. Новиков. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп. *Труды МИАН СССР*, **44**, 1955, 3—143.
4. С. И. Адян. Алгоритмическая неразрешимость проблем распознавания некоторых свойств групп. *Доклады АН СССР*, **103**, 1955, 533—535.
5. С. И. Адян. Конечно определенные группы и алгоритмы. *Доклады АН СССР*, **117**, 1957, 9—12.
6. С. И. Адян. Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем теории групп. *Труды Моск. матем. об-ва*, **6**, 1957, 231—298.
7. M. O. Rabin. Recursive unsolvability of group theoretic problems. *Ann. Math.*, 67, 1958, 172—194.
8. А. А. Марков. Теория алгоритмов. *Труды МИАН СССР*, **42**, 1954.
9. Г. С. Цейтин. Относительно проблемы распознавания свойств ассоциативных исчислений. *Доклады АН СССР*, **107**, 1956, 209—212.
10. В. В. Борисов. Простые примеры групп с неразрешимой проблемой тождества. *Мат. заметки*, **6**, 1969, 521—532.
11. G. Higman, B. Neumann, H. Neumann. Embedding theorems for groups. *J. London Math. Soc.*, **24**, 1949, 247—254.
12. J. L. Britton. The word problem. *Ann. Math*, **77**, 1963, 16—32.
13. D. Collins. On recognizing Hopf groups. *Arch. Math.*, **20**, 1969, 235—240.
14. В. Магнус, А. Каррасс, Д. Солитар. Комбинаторная теория групп. Москва, 1973.

15. Р. Д. **Павлов**. К проблеме распознавания групповых свойств. *Мат. заметки*, **10**, 1971, 169—180.
16. Р. Д. **Павлов**. Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем теории групп в минимальных алфавитах. *Доклады БАН*, **24**, 1971, 855—858.
17. R. D. Pavlov. Algorithmic unsolvability of group properties in minimal alphabets. Abstracts of IV Internat. Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science, Bucharest, 1971, p 42.
18. Р. Д. Павлов. Невозможность некоторых алгоритмов распознавания групповых свойств в минимальных алфавитах. *Годишник Соф. унив., Фак. мат.: мех.*, 66, 1974, 191—217.
19. Р. Д. Павлов, Теоретико-групови алгоритмични проблеми в минимални азбуки. *Математика и математическо образование*, София, 1976, 205—208.
20. Р. Д. Павлов. Об одном обобщении понятия проходной буквы. *Сердика*, **5**, 1979, 149—172.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 23. 5. 1978