Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

УСТОЙЧИВОСТЬ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ХАУСДОРФОВА РАССТОЯНИЯ

АНДРЕЙ СТ. АНДРЕЕВ

В работе получена оценка для равномерного расстояния между двумя алгебраическими многочленами n-й степени, являющимися многочленами наилучшего хаусдорфова приближения двух функций (одна из которых моногонная) через хаусдорфовое расстояние между функциями.

Вопрос об устойчивости многочлена наилучшего равномерного приближения исследован П. В. Галкиным [1]. В этой работе, используя его идеи, рассмотрим устойчивость многочлена наилучшего хаусдорфова приближения для монотонных функций. Условия монотонности существенны, потому что, как показал Бл. Сендов [2], даже для непрерывных функций (например $|x|$) многочлен наилучшего хаусдорфова приближения не единствен. Тем более он не один даже для монотонных функций. Так для функции

$$f(x)=\begin{cases} -1/2, & -1\leqq x<0, \\ 2\ , & 0\leqq x<1+\sqrt{3} \\ 8+4\sqrt{3}, & 1+\sqrt{3}\leqq x\leqq 2+\sqrt{3} \end{cases}$$

для достаточно малого $\lambda\geqq 0$ многочлены $x^2+\lambda(x-\sqrt{2})(x-1-\sqrt{3})$ являются многочленами наилучшего хаусдорфова приближения второй степени.

Обозначим через $\varrho(f, g)$, $r(f, g)$ соответсвенно равномерное и хаусдорфовое расстояние между функциями f и g, а через $\pi_n(f)$, $\pi_n(f)_r$ — многочлены наилучшего приближения n-й степени относительно равномерного и хаусдорфова расстояния функции f на отрезке $\Delta=[a, b]$ (относительно основных свойств хаусдорфова расстояния см. [3]). Пусть M_Δ^h — класс монотонных функций на отрезке Δ, такой, что если $f\in M_\Delta^h$, то $\sup_{x\in\Delta}|f(x)|\leqq M$ и $f\in \mathrm{Lip}_M 1$ для $x\in[a, a+h]\cup[b-h, b]$, $M>0$, $h>0$.

Основным результатом этой работы является следующее предложение.

Теорема. *Существует $n_0(M)>0$, так что для каждого $n>n_0$ выполняется*

$$\sup\{\varrho(\pi_n(f)_r, \pi_n(g)_r): f\in M_\Delta^h, r(f, g)\leqq\delta\}\asymp c(\delta+\delta^{1/n+1}),\ c\neq c(\delta).$$

В дальнейшем всегда будем предполагать, что $n\geqq n_0(M)$.

Доказательство теоремы основано на следующих леммах.

Лемма 1. *Пусть $f\in M_\Delta^h$. Необходимое и достаточное условие того, чтобы многоглен P n-й степени был многочленом наилучшего хаусдор-*

фова приближения функции f, есть существование $n+2$ точек $\{x_i\}_{i=1}^{n+2}$ таких, что

$$\operatorname{sign}(f(x_i)-P(x_i))=(-1)^i\cdot\varepsilon,\ i=1,2,\ldots,n+2,\ \varepsilon=\pm 1,$$

$$\min_{(x,y)\in\bar f}\max[|x-x_i|,|y-P(x_i)|]=r(f,P),\ i=2,3,\ldots,n+1, \tag{1}$$

а для $i=1$ и $i=n+2$ выполняется (1) *или*

$$\min_{x\in\Delta}\max[|x-x_i|,|f(x_i)-P(x)|]=r(f,P).$$

Точки $\{x_i\}_{i=1}^{n+2}$ будем называть точками хаусдорфова альтернанса, а $\bar f$ означает дополненный график функции f (см. [3]).

На доказательстве леммы не будем останавливаться. Отметим только, что достаточность аналогична классическому случаю теоремы Чебышева, а для необходимости нужно воспользоваться непрерывностью функции на конце отрезка.

Лемма 2. *Пусть $f\in M_\Delta^h$ и $\{x_i\}_{i=1}^{n+2}$ — ее точки хаусдорфова альтернанса. Если $\min_{x\in\Delta}\max[|x-x_i|,|f(x_i)-P(x)|]=E_n(f)_r$, $i=1$ и $i=n+2$, тогда можно выбрать $x_i=a$, $x_{n+2}=b$.*

Доказательство. Пусть f — монотонно возрастающая. Допустим, что $a<x_1$.

1. $a+E_n(f)_r<x_1$, $f(x_1)>\pi_n(f;\ x_1)_r$. Тогда $\pi_n(f;\ x)_r<f(x_1)-E_n(f)_r$, для $x\in[x_1-E_n(f)_r,\ x_1+E_n(f)_r]$ и

$$\min_{(x,y)\in\bar f}\max[|x-x_1-E_n(f)_r|,|y-\pi_n(f;\ x_1+E_n(f)_r)|]\geqq E_n(f)_r$$

и, следовательно, можно выбрать первую точку альтернанса так, что $E_n(f)_r$ достигается от $\pi_n(f)_r$ к f.

2. $a<x_1\leqq a+E_n(f)_r$. Так как $\pi_n(f;\ x)_r\geqq f(x_1)+E_n(f)_r$ (здесь нельзя, чтобы $f(x_1)>\pi_n(f;\ x_1)_r$), для $x\in[a,\ x_1+E_n(f)_r]$ следует, что $\pi_n(f;\ a)_r\geqq f(a)+E_n(f)_r$, а это показывает, что можно положить $x_1=a$.

3. $a+E_n(f)_r<x_1$, $f(x_1)<\pi_n(f;\ x_1)_r$ рассматривается как 1.

Лемма 3. *Пусть функции f и g — ограниченные константой $M>0$ на отрезке Δ. Тогда существует константа $c(\Delta, M)$, такая, что*

$$\varrho(\pi_n(f)_r,\pi_n(g)_r)\leqq c(E_n(f)_r+r(f,g))$$

Доказательство. $E_n(g)_r=r(g,\pi_n(g)_r)\leqq r(g,\pi_n(f)_r)\leqq r(\pi_n(f)_r,f)+r(f,g)$ $=E_n(f)_r+r(f,g)$. Это неравенство вместе с $r(\pi_n(f)_r,\pi_n(g)_r)\leqq r(\pi_n(f)_r,f)+r(f,g)$ $+r(g,\pi_n(g)_r)=E_n(f)_r+E_n(g)_r+r(f,g)$ ведет к $r(\pi_n(f)_r,\pi_n(g)_r)\leqq 2(E_n(g)_r+r(f,g))$. Из последнего неравенства, $\pi_n(f)_r\leqq 2M$ и [3]

$$\varrho(\pi_n(f)_r,\pi_n(g)_r)\leqq r(\pi_n(f)_r,\pi_n(g)_r)+w(\pi_n(f)_r;\ r(\pi_n(f)_r,\pi_n(g)_r)),$$

лемма следует.

Лемма 4. *Пусть $f\in M_\Delta^h$ и для произвольной функции g выполняется $r(f,g)\leqq\delta<E_n(f)_r/2$. Если $\{x_i\}_{i=1}^{n+2}$ — точки хаусдорфова альтернанса функции f, тогда существуют точки $\{y_i\}_{i=1}^{n+2}$, $y_i=x_i$, $i=2,3,\ldots,n+1$, ($x_1=y_1$, $x_{n+2}=y_{n+2}$) такие, что*

$$\varepsilon(-1)^i\{\pi_n(f;\ y_i)_r-\pi_n(g;\ y_i)_r\}\leqq c(n, \Delta, M)\,.\,\delta,\ i=1, 2, \ldots, n+2.$$

Доказательство. Пусть f — монотонно возрастающая. Для $i=2, 3, \ldots, n+1$, если $\pi_n(f;\ x_i)_r>f(x_i)$ следует

$$f(x)\leqq\pi_n(f;\ x_i)-E_n(f)_r,\quad x\in[x_i-E_n(f)_r,\ x_i+E_n(f)_r]. \tag{2}$$

Покажем, что $\pi_n(g;\ x_i-2\delta)_r\leqq\pi_n(f;\ x_i)_r+2\delta$. Допустим, что

$$\pi_n(g;\ x_i-2\delta)_r>\pi_n(f;\ x_i)_r+2\delta. \tag{3}$$

Из $r(f, g)\leqq\delta$ и (2) следует

$$g(x)\leqq\pi_n(f;\ x_i\ )_r-E_n(f)_r+\delta,\quad x\in[a,\ x_i+E_n(f)_r-\delta]. \tag{4}$$

Из (3) и (4) получаем

$$\min_{(x,\, y)\in\bar{g}}\max[|x_i-2\delta-x|,\ |\pi_n(g;\ x_i-2\delta)_r-y|]\geqq E_n(f)_r+\delta, \tag{5}$$

а из (3) и (5) следует $r(g, \pi_n(g)_r)>E_n(f)_r+\delta$, которое противоречит

$$r(g, \pi_n(g)_r)\leqq r(g, \pi_n(f)_r)\leqq r(f, g)+r(f, \pi_n(f)_r)\leqq\delta+E_n(f)_r. \tag{6}$$

Из $\pi_n(g;\ x_i-2\delta)_r-\pi_n(f; x_i)_r\leqq 2\delta$ следует $\pi_n(g;\ x_i)_r-\pi_n(f;\ x_i)_r\leqq 2\delta+\omega(\pi_n(g)_r;\ 2\delta)$ и ввиду неравенства Маркова для алгебраических многочленов получаем

$$\pi_n(g;\ x_i)_r-\pi_n(f;\ x_i)_r\leqq(2+c)\delta. \tag{7}$$

Подобные рассуждения в точке x_i, $i=2, 3, \ldots, n+1$, где $\pi_n(f;\ x_i)_r<f(x_i)$ показывают, что

$$-[\pi_n(g;\ x_i)_r-\pi_n(f;\ x_i)_r]\leqq(2+c)\delta. \tag{8}$$

Для полного доказательства надо рассмотреть конец отрезка. Ввиду леммы 2. возможны два случая:

1. $\min\limits_{(x,\, y)\in\bar{f}}\max[|x-x_1|,\ |y-\pi_n(f;\ x_1)_r|]=E_n(f)_r$. В этом случае, если $\pi_n(f;\ x_1)_r<f(x_1)$, как и выше получаем неравенство (8). Допустим, что $\pi_n(f;\ x_1)_r>f(x_1)$. Если $|x_1-a|\geqq 2\delta$, снова получим неравенство (7). Пусть $|x_1-a|<2\delta$. Тогда из неравенства Маркова следует

$$|\pi_n(g;\ a)_r-\pi_n(g;\ x_1)_r|\leqq c_1(n, \Delta, M)\,.\,\delta, \tag{9}$$

а из $2\delta<E_n(f)_r$

$$|f(a+E_n(f)_r)-f(a+E_n(f)_r+2\delta)|\leqq 2M\delta. \tag{10}$$

Из (10) и $f(a+E_n(f)_r)\leqq\pi_n(f;\ x_1)_r-E_n(f)_r$ находим $f(a+E_n(f)_r+2\delta)\leqq f(a+E_n(f)_r)+2M\delta\leqq\pi_n(f;\ x_1)_r-E_n(f)_r+2M\delta$ и ввиду $r(f, g)<\delta$ и монотонности f получаем

$$g(a+E_n(f)_r+\delta)\leqq\pi_n(f;\ x_1)_r+E_n(f)_r+2M\delta+\delta. \tag{11}$$

Последнее неравенство показывает, что

$$\pi_n(g;\ a)_r\leqq\pi_n(f;\ x_1)_r+2M\delta+2\delta. \tag{12}$$

Если допустим, что (12) неверно, вычитая из $\pi_n(g;\ a)_r > \pi_n(f;\ x_1)_r + 2M\delta + 2\delta$ неравенство (11), получим

$$\pi_n(g;\ a)_r - g(a + E_n(f)_r + \delta) > E_n(f)_r + \delta,$$

из которого следует $\pi_n(g;\ a)_r - g(a) > E_n(f)_r + \delta$, $x \in [a,\ a + E_n(f)_r + \delta]$. Последнее неравенство противоречит (6). Из (12) следует неравенство типа (7).

2. $\min\limits_{x\in\Delta} \max\,[|\,x - x_1\,|,\ |\,f(x_1) - \pi_n(f;\ x)_r\,|] = E_n(f)_r$. По лемме 2. $x_1 = a$. Из $f(a) > \pi_n(f;\ a)_r$ находим $r(f;\ \pi_n(f)_r)_r > E_n(f)_r$, поэтому $f(a) < \pi_n(f;\ a)_r$. Отсюда

(13) $$\pi_n(f;\ x)_r \geq f(a) + E_n(f)_r \quad x \in [a,\ a + E_n(f)_r].$$

Из (6) следует, что существует точка $\xi \in [a,\ a + E_n(f)_r + 2\delta]$, так что

(14) $$\pi_n(g;\ \xi)_r \leq f(a) + E_n(f)_r + 2\delta.$$

Если $\xi \in [a,\ a + E_n(f)_r]$, вычитая (13) из (14), получим $\pi_n(g;\ \xi)_r - \pi_n(f;\ \xi)_r \leq 2\delta$, и тогда можно положить $y_1 = \xi$. Пусть $\xi \in [a + E_n(f)_r,\ a + E_n(f)_r + 2\delta]$. Тогда выполнено

(15) $$|\,\xi - a - E_n(f)_r\,| \leq 2\delta.$$

После вычитания неравенства $\pi_n(f;\ a + E_n(f)_r)_r \geq f(a) + E_n(f)_r$, $\pi_n(g;\ \xi)_r \leq f(a) + E_n(f)_r + 2\delta$ получаем $\pi_n(g;\ \xi)_r - \pi_n(f;\ a + E_n(f)_r)_r \leq 2\delta$ и согласно (15) и неравенства Маркова

$$\pi_n(g;\ a + E_n(f)_r)_r - \pi_n(f;\ a + E_n(f)_r)_r \leq c_2(n,\ \Delta,\ M)\,.\,\delta,$$

Так что в этом случае можно положить $y_1 = a + E_n(f)_r$.

Лемма 5. *При обозначениях леммы 4 существует константа $c(n,\ \Delta,\ M)$, такая, что $y_{i+1} - y_i \geq cE_n(f)_r$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$.*

Доказательство. Пусть f — монотонно возрастающая функция. Покажем, что утверждение леммы выполняется для точек хаусдорфова альтернанса $\{x_i\}_{i=1}^{n+2}$. Пусть в точке x_i $\pi_n(f;\ x_i)_r > f(x_i)$, $1 \leq i \leq n$. Если $x_{i+1} - x_i \geq 2E_n(f)_r$, все доказано, поэтому допустим

(16) $$x_{i+1} - x_i < 2E_n(f)_r, \quad \pi_n(f;\ x_i)_r - \pi_n(f;\ x_{i+1})_r < 2E_n(f)_r.$$

Из неравенств $f(x) \leq \pi_n(f;\ x_i)_r - E_n(f)_r$, $x \in [x_i - E_n(f)_r,\ x_i + E_n(f)_r]$, $f(x) \geq \pi_n(f;\ x_{i+1})_r + E_n(f)_r$, $x \in [x_{i+1} - E_n(f)_r,\ x_{i+1} + E_n(f)_r]$ следует существование точки $z \in [x_i,\ x_{i+1}]$, для которой $f(z) \leq \pi_n(f;\ x_i)_r - E_n(f)_r$, $f(z) \geq \pi_n(f;\ x_{i+1})_r + E_n(f)_r$. После вычитания последних двух неравенств получим $\pi_n(f;\ x_i)_r - \pi_n(f;\ x_{i+1})_r \geq 2E_n(f)_r$, которое противоречит (16).

Из неравенств $x_{i+1} - x_i < 2E_n(f)_r$, $\pi_n(f;\ x_i)_r - \pi_n(f;\ x_{i+1})_r > 2E_n(f)_r$, $|\,\pi_n(f;\ x_i)_r - \pi_n(f;\ x_{i+1})_r\,| \leq c(n,\ \Delta,\ M)\,(x_{i+1} - x_i)$ следует утверждение леммы в этом случае.

Рассмотрим случай $x_1 \neq y_1$. По лемме 4 выполняется $y_1 \leq a + E_n(f)_r$. Покажем, что существует константа $c_1(n,\ \Delta,\ M)$, для которой $x_2 - y_1 \geq c_1\,.\,E_n(f)_r$. Тоже из леммы 4 следует, что $x_1 = a$, $f(a) \leq \pi_n(f;\ a)_r - E_n(f)_r$, $\min\limits_{x\in\Delta} \max\,[|\,x - x_1\,|,\ |\,f(x_1) - \pi_n(f;\ x)_r\,|] = E_n(f)_r$. Допустим, что $a + 2E_n(f)_r \leq x_2$. Тогда все доказано. Пусть $a + E_n(f)_r < x_2 < a + 2E_n(f)_r$ и пусть рассмотрим функцию

(17) $$f_1(x) = \begin{cases} f(a) + E_n(f)_r, & a \leq x \leq a + E_n(f)_r, \\ f(x - E_n(f)_r) - E_n(f)_r, & x > a + E_n(f)_r. \end{cases}$$

Из определения хаусдорфова расстояния следует, что $(x_2, \pi_n(f;\ x_2))$ — первая точка пересечения f_1 и $\pi_n(f)_r$. Если $\pi_n(f;\ x_2)_r \leqq f(a)$, тогда $\pi_n(f;\ a + E_n(f)_r)_r - \pi_n(f;\ x_2)_r \geqq E_n(f)_r$ и, следовательно,

$$x_2 - a - E_n(f)_r \geqq c_1 \,.\, E_n(f)_r. \tag{18}$$

Если наоборот: $\pi_n(f;\ x_2)_r = f_1(x_2) > f(a)$, из (17) следует $f(x_2 - E_n(f)_r) - E_n(f)_r - f(a) > 0$ и ввиду $f \in \mathrm{Lip}_M 1$ на интервале $[a, a + 2E_n(f)_r]$ получаем

$$M \mid x_2 - E_2(f)_r - a \mid > E_n(f)_r. \tag{19}$$

Неравенства (18) и (19) доказывают утверждение.

Лемма 6. *Пусть P — многочлен степени не выше n и в точках $a \leqq x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+2} \leqq b$ выполняется $\min\limits_{1 \leqq i \leqq n+1} (x_{i+1} - x_i) \geqq \gamma$, $(-1)^i \,.\, P(x_i) \leqq \varkappa$, $\varkappa > 0$. Тогда имеет место $\max\limits_{x \in \Delta} |P(x)| \leqq c \,.\, (b-a)^n \varkappa / \gamma^n$, где $c = c(n)$.*

Доказательство леммы с несущественными изменениями дано в [1].

Теперь можно приступить к доказательству оценки сверху теоремы.

Согласно [3] существует $n_0 \geqq 0$, такое, что для $n > n_0$ выполняется $E_n(f)_r < h/2$ для всех функций, для которых $\sup_{x \in \Delta} |f(x)| \leqq M$. Будем рассматривать только $n \geqq n_0$.

Пусть $f \in M_\Delta^h$ и $r(f, g) \leqq \delta$. Если $E_n(f)_r \leqq 2\delta$, из леммы 3 следует

$$\varrho(\pi_n(f)_r, \pi_n(g)_r) \leqq c_1 \,.\, \delta. \tag{20}$$

Если $E_n(f)_r > 2\delta$, применяя лемму 6 к полиному $\pi_n(f)_r - \pi_n(g)_r$ при $\gamma = c_2 \,.\, E_n(f)_r$ $\varkappa = c_3 \delta$, ввиду леммы 4 и леммы 5 получаем

$$\varrho(\pi_n(f)_r, \pi_n(g)_r) \leqq c_3 \delta / [E_n(f)_r]^n. \tag{21}$$

Согласно лемме 3

$$\varrho(\pi_n(f)_r, \pi_n(g)_r) \leqq c_4 (E_n(f)_r + \delta). \tag{22}$$

Из (21) и (22) следует при $E_n(f)_r > 2\delta$,

$$\begin{aligned} \varrho(\pi_n(f)_r, \pi_n(g)_r) &\leqq \max(c_3, c_4) \min(\delta/[E_n(f)_r]^n,\ E_n(f)_r + \delta) \\ &\leqq c_5 \,.\, \min(\delta/[E_n(f)_r]^n,\ E_n(f)_r). \end{aligned} \tag{23}$$

Из (20) и (23) находим

$$\varrho(\pi_n(f)_r, \pi_n(g)_r) \leqq c_6 \max(\delta, \min(\delta/[E_n(f)_r]^n,\ E_n(f)_r)).$$

Последнее неравенство показывает, что

$$\begin{aligned} \sup\{\varrho(\pi_n(f)_r, \pi_n(g)_r) :\ f \in M_\Delta^h,\ r(f, g) \leqq \delta\} &\leqq c_6 \,.\, \max_{E>0} \max(\delta, \min(\delta/E^n, E)) \\ &\leqq c_6 \,.\, \delta + c_6 \,.\, \max_{E>0} \min(\delta/E^n, E) = c_6 \,.\, (\delta + \delta^{1/n+1}). \end{aligned}$$

Этим оценка сверху доказана.

Для доказательства оценки снизу будет нужна следующая лемма.

Лемма 7. *Пусть $n > 0$, $0 < \lambda < (b-a)/2$, $a \leqq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqq a + \lambda < b$. Если многочлен n-й степени удовлетворяет $(-1)^i \,.\, P(x_i) \geqq \delta$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $\delta > 0$, тогда $|P_n(b)| \geqq c\delta/\lambda^n$, где $c = c(n, b-a)$.*

Доказательство леммы можно найти в [1].

Рассмотрим функции ($n=2k$)

$$(24)\qquad f(x)=\begin{cases} 0\ , & 0\leq x\leq 2\delta^{1/n+1},\\ 4i\delta^{1/n+1}, & (4i-2)\delta^{1/n+1}<x<(4i+2)\delta^{1/n+1},\ i=1,2,\dots,n/2,\\ x+2\delta^{1/n+1}, & (2n+2)\delta^{1/n+1}\leq x\leq b-\delta^{1/n+1},\\ b+\delta^{1/n+1}, & b-\delta^{1/n+1}<x\leq b,\ b=6n.\end{cases}$$

$$(25)\qquad g(x)=\begin{cases} f(x),\ & 0\leq x<(2n+2)\delta^{1/n+1}\\ f(x)+2\delta, & (2n+2)\delta^{1/n+1}\leq x\leq b-\delta-\delta^{1/n+1},\\ f(b)+\delta, & b-\delta-\delta^{1/n+1}<x\leq b,\ b=6n.\end{cases}$$

Из определения функций f и g следует, что $r(f,g)=\delta$. Покажем, что существует константа $c, c\neq c(\delta)$, такая, что $\varrho(\pi_n(f)_r, \pi_n(g)_r)\geq c\delta^{1/n+1}$. Так как $r(f,x)=\delta^{1/n+1}$, из леммы 1 следует $\pi_n(f)_r=x$, $E_n(f)_r=\delta^{1/n+1}$. Покажем, что $E_n(g)_r>\delta^{1/n+1}$. Допустим

$$(26)\qquad E_n(g)_r\leq\delta^{1/n+1}.$$

Из (25) следует

$$(27)\qquad x_i-g(x_i)=(-1)^{i+1}\delta^{1/n+1},\ i=1,2,\dots,n+1,\ \text{где}\ x_i=(2i-1)\delta^{1/n+1}$$

и согласно (26) находим

$$(28)\qquad (-1)^{i-1}(\pi_n(g;\ x_i)_r-x_i)\leq 0,\quad i=1,2,\dots,n+1,$$

так как, если допустим, что для некоторого i, $(-1)^{i-1}(\pi_n(g;\ x_i)_r-x_i)>0$, складывая последное неравенство и (27), получаем $(-1)^{i+1}(\pi_n(g;\ x_i)_r-g(x_i))>\delta^{1/n+1}$, которое противоречит (26). Из (28) следует $\pi_n(g;\ x)_r=x$. С другой стороны, $r(g,x)\geq\min\limits_{(x,y)\in\bar g}\max[|b-x|,\ |b-y|]=\delta+\delta^{1/n+1}>\delta^{1/n+1}$. Полученное противоречие показывает, что (26) неверно. Пусть $E_n(g)_r=\delta^{1/n+1}+\mu$. Можно считать, что $0<\mu<\delta^{1/n+1}$, так как из (25) видно, что $r(g,x+\delta^{1/n+1})<2\delta^{1/n+1}$. Отсюда находим $(-1)^{i-1}\{x_i+(-1)^{i+1}\mu-\pi_n(g;\ x_i+(-1)^i\mu)_r\}\geq 0$, или $(-1)^{i-1}\times\{\pi_n(g;\ x_i+(-1)^i\mu)_r-x_i\}\leq\mu$, $i=1,2,\dots,n+2$. Применяя неравенство Маркова к полиному $\pi_n(g)_r$, получаем

$$(29)\qquad (-1)^{i-1}\{\pi_n(g;\ x_i)_r-x_i\}\leq c(n)\mu,\quad i=1,2,\dots,n+2,$$

где $c(n)=1+c_1(n)$, $|\pi_n(g;\ x_i+(-1)^i\mu)_r-\pi_n(g;\ x_i)_r|\leq c_1(n)\,.\,\mu$. Ввиду (29) и леммы 6 на отрезке $[0, x_{n+2}]$ при $x_{i+1}-x_i=2\,.\,\delta^{1/n+1}$ выполняется

$$\max\nolimits_{0\leq x\leq x_{n+2}}|x-\pi_n(g;\ x)_r|\leq c_2(n)\,.\,c_1(n)\,.\,\mu/(2\delta^{1/n+1})^n\,.\,x_{n+2}^n=c_3(n)\,.\,\mu,$$

$$x_{n+2}+(2n+3)\,.\,\delta^{1/n+1}\ \text{и}\ \max\nolimits_{0\leq x\leq(2n+3)\delta^{1/n+1}}|x-\pi_n(g;\ x)_r|\leq c_3\mu.$$

Отсюда следует

$$(30)\qquad |(2n+3)\delta^{1/n+1}-\pi_n(g;\ (2n+3)\delta^{1/n+1})_r|\leq c_3\mu.$$

Из определений функции g прямо получается

$$(31)\qquad g((2n+3)\delta^{1/n+1})-(2n+3)\delta^{1/n+1}=2\delta^{1/n+1}+2\delta.$$

Покажем, что существует константа c_4, $c_4 = c_4(n)$, такая, что

$$(32)\qquad |g((2n+3)\delta^{1/n+1}) - \pi_n(g;\ (2n+3)\delta^{1/n+1})_r| \leqq c_4 \,.\, \mu + 2\delta^{1/n+1}.$$

В точке $(2n+3)\delta^{1/n+1} - \mu$ выполняется

$$(33)\qquad \pi_n(g;\ (2n+3)\delta^{1/n+1} - \mu))_r \leqq g((2n+3)\delta^{1/n+1}) + 2\delta^{1/n+1} + \mu,$$

так как в противном случае $r(g, \pi_n(g)_r) \geqq \min_{(x,y)\in \bar g} \max [|(2n+3)\delta^{1/n+1} - \mu - x|,$ $|\pi_n(g;\ (2n+3)\delta^{1/n+1}) - \mu)_r - y|] > \delta^{1/n+1} + \mu$, а это противоречит $E_n(g)_r = \delta^{1/n+1} + \mu$. Из (33), применяя неравенство Маркова к $\pi_n(g)_r$, получаем

$$(34)\qquad \pi_n(g;(2n+3)\delta^{1/n+1})_r - g((2n+3)\delta^{1/n+1}) \leqq 2\delta^{1/n+1} + c_5 \,.\, \mu.$$

В точке $(2n+3)\delta^{1/n+1} + \mu$ выполняется

$$(35)\qquad g((2n+3)\delta^{1/n+1}) - \pi_n(g;\ (2n+3)\delta^{1/n+1} + \mu)_r \leqq \delta^{1/n+1} + \mu.$$

(если последнее неравенство неверно, как и выше придем к противоречию $r(g, \pi_n(g)_r) > \delta^{1/n+1} + \mu$). Ввиду $g((2n+3)\delta^{1/n+1}) - \pi_n(g;\ (2n+3)\delta^{1/n+1} + \mu)_r$ $\leqq 2\delta^{1/n+1} + \mu$ из (35) находим $g((2n+3)\delta^{1/n+1}) - \pi_n(g;\ (2n+3)\delta^{1/n+1} + \mu)_r$ $\leqq 2\delta^{1/n+1} + \mu$ и снова применяя неравенство Маркова к $\pi_n(g)_r$, получаем

$$(36)\qquad g(2n+3)\delta^{1/n+1}) - \pi_n(g;\ (2n+3)\delta^{1/n+1})_r \leqq c_6(n) \,.\, \mu + 2\delta^{1/n+1}.$$

Неравенства (34) и (36) доказывают (31) при $c_4 = \max(c_5, c_6)$. Из (30), (31) и (32) следует $|g((2n+3)\delta^{1/n+1}) - (2n+3)\delta^{1/n+1}| - |(2n+3)\delta^{1/n+1} - \pi_n(g;$ $(2n+3)\delta^{1/n+1})_r| \leqq |g((2n+3)\delta^{1/n+1}) - \pi_n(g;\ (2n+3)\delta^{1/n+1})_r|$, т. е. $2\delta^{1/n+1} + 2\delta - c_3 \,.\, \mu$ $\leqq c_4 \,.\, \mu + 2\delta^{1/n+1}$. Из последнего неравенства получаем

$$(37)\qquad \mu \geqq c_5 \,.\, \delta, \quad c_5 = 1/(c_3 + c_4).$$

Если на отрезке $[(2n+2)\delta^{1/n+1}, b]$ существуют по крайней мере две точки хаусдорфова альтернанса функции g, из (25) следует $\varrho(\pi_n(f)_r, \pi_n(g)_r) \geqq \delta^{1/n+1}$, и оценка снизу доказана.

Допустим, что на отрезке $[0, (2n+2)\delta^{1/n+1}]$ находятся $n+1$ точек $\{z_i\}_{i=1}^{n+1}$ хаусдорфова альтернанса функции g. Покажем, что если $\pi_n(g;\ z_i)_r > g(z_i)$, тогда $\pi_n(g;\ z_i)_r - z_i \geqq \mu$. В самом деле, ввиду $r(g, \pi_n(g)_r) = \delta^{1/n+1} + \mu$ следует, что $\pi_n(g;\ z_i)_r - g(z_i) \geqq \delta^{1/n+1} + \mu$. В точках z_i возможны следующие два случая:

$$1.\ g(z_i) - z_i \geqq 0;$$

$$2.\ g(z_i) - z_i \geqq -\delta^{1/n+1}.$$

И в обоих случаях получаем требуемое неравенство (если $g(z_i) - z_i \leqq -\delta^{1/n+1}$ точка z_i не может быть точкой хаусдорфова альтернанса). Подобным образом в точках z_i, где $\pi_n(g;\ z_i)_r < g(z_i)$, получаем $\pi_n(g;\ z_i)_r - z_i \geqq \mu$, а так как $\operatorname{sgn}(\pi_n(g;\ z_i)_r - g(z_i)) = \varepsilon \,.\, (-1)^i$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, $\varepsilon = \pm 1$, следует, что $(-1)^i(\pi_n(g;\ z_i)_r - z_i) \geqq \mu$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Теперь можно применить лемму 7 к многочлену $\pi_n(g;\ x)_r - x$ при $z_{n+1} = \lambda \leqq (2n+2)\delta^{1/n+1}$, $a = 0$, $b = 6n$. Из $\delta \leqq 1$ следует $(n \geqq 2)\lambda \leqq 2n + 2 < b/2$ и, следовательно,

$$(38)\qquad |\pi_n(g;\ b)_r - b| \geqq c_6 \,.\, \mu/\lambda^n, \quad c_6 = c_6(n).$$

Из (38) ввиду $\lambda \leqq (2n+2)\delta^{1/n+1}$ и (37) следует

$$|\pi_n(g;\ b)_r - b| \geqq c_7 . \delta^{1/n+1},$$

где $c_7 = c_5 . c_6 . /(2n+2)^n$. Этим оценка снизу доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. В. Галкин. О модуле непрерывности оператора наилучшего приближения в пространстве непрерывных функций. *Мат. заметки*, **10**, 1971, 601—613.
2. Бл. Сендов. Аппроксимация относительно хаусдорфова расстояния. *Диссертация*, Москва, 1967.
3. Бл. Сендов. Некоторые вопросы теорий приближений функций и множеств в хаусдорфовой метрике. *Успехи мат. наук*, **24**, 1969, № 5, 141—178.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 8. 12. 1978