Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОЦЕНКИ СНИЗУ ДЛЯ НАИЛУЧШИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ХАУСДОРФОВОЙ МЕТРИКЕ

ПЕНЧО П. ПЕТРУШЕВ

Доказаны некоторые оценки снизу для наилучших рациональных приближений в хаусдорфовой метрике. Из этих оценок, в частности, следует, что точный порядок наилучших рациональных приближений ограниченных на отрезке $[0, 1]$ функций относительно хаусдорфовой метрики является $O(\ln n/n)$.

Определим сначала хаусдорфовое расстояние. Обозначим через F_Δ множество всех замкнутых и ограниченных точечных множеств на плоскости, которые выпуклы относительно оси y и проекция которых на оси x совпадает с интервалом $\Delta=[0, 1]$. Обозначим через F^ε, G^ε ε-окрестности множеств $F, G\in F_\Delta$ относительно расстояния $d(A(a_1, a_2), B(b_1, b_2))=\max\{|a_1-a_2|, |b_1-b_2|\}$. Хаусдорфовое расстояние между множествами $F, G\in F_\Delta$ определяется через

$$r(F, G)=\inf\{\varepsilon: F\subset G^\varepsilon,\ G\subset F^\varepsilon\}.$$

Дополненный график $\bar{f}$ ограниченной на отрезке Δ функции f определяется через $\bar{f}=\cap\{F: F\in F_\Delta$ и $(x, f(x))\in F$ при $x\in\Delta\}$. Отметим, что для любой ограниченной на отрезке Δ функции f имеем $\bar{f}\in F_\Delta$. Тогда хаусдорфовое расстояние между двумя ограниченными на отрезке Δ функциями f, g определяется как хаусдорфовое расстояние между их дополненными графиками, т. е. $r(f, g)=r(\bar{f}, \bar{g})$. Свойства хаусдорфова расстояния обсуждаются подробно в [1].

Обозначим через H_n множество всех алгебраических полиномов n-той степени с действительными коэффициентами, а через R_n — множество всех действительных рациональных функций n-того порядка, т. е. $R_n=\{q: q=p_1/p_2,\ p_1, p_2\in H_n\}$. Обозначим еще через $E_n(f)_r$ и $R_n(f)_r$ наилучшие приближения функции f (множества f) соответственно элементами из H_n и R_n относительно хаусдорфова расстояния. Например, $R_n(f)_r=\inf\{r(f, q): q\in R_n\}$.

Бл. Сендов [2; 1] доказал следующую универсальную оценку: для любого множества $f\in F_\Delta$ справедливо

$$E_n(f)_r=O(\ln n/n). \tag{1}$$

Эта оценка точна по порядку в классе всех абсолютно непрерывных функций [3]. Оценка (1) точна по порядку и для важных в теории хаусдорфовых аппроксимаций функций

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1 & \text{при } x\in[-1, 0)\\ 0 & \text{при } x=0\\ 1 & \text{при } x\in(0, 1]\end{cases} \quad \text{и} \quad \delta(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\in[-1, 0)\cup(0, 1]\\ 1 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 6, 1980, 120—127.

Отметим, что для этих двух функций наилучшие хаусдорфовые рациональные приближения намного лучше: $R_2(\delta)_r=0$, $R_n(\operatorname{sgn} x)_r=O(e^{-c\sqrt{n}})$. Последнюю оценку легко получить (см. [4]), имея в виду известную статью [5] Д. Нюмана.

Из оценки (1) непосредственно следует, что для любого множества $f\in F_\Delta$ имеет место

$$R_n(f)_r=O(\ln n/n). \tag{2}$$

Бл. Сендов поставил проблему найти точный порядок убывания к нулю $R_n(f)_r$ для множеств $f\in F_\Delta$. В этой статье докажем, что оценка (2) точна по порядку в классе всех ограниченных на отрезке Δ функций.

Теорема 1. *Существует ограниченная на отрезке Δ функция f такая, что*

$$\limsup_{n\to\infty} R_n(f)_r n/\ln n>0.$$

Это утверждение показывает, что в классе всех ограниченных функций (тем более в классе F_Δ) рациональные функции и алгебраические полиномы, несмотря на эффекты для функций $\delta(x)$ и $\operatorname{sgn} x$, имеют одинаковые возможности как аппараты приближения в хаусдорфовой метрике.

Естественно искать классы функций, которые приближаются рациональными функциями относительно хаусдорфова расстояния лучше по порядку, чем алгебраическими полиномами. В. А. Попов [6] показал, что

$$\sup\{R_n(f)_r : V_0^1 f\leq 1\}=O(n^{-1}), \tag{3}$$

где $V_0^1 f$ — вариация функции f на отрезке Δ, и эта оценка неулучшаема. В статье [7] нами получено следующее обобщение оценок (2), (3): для любой ограниченной на отрезке Δ функции f имеет место

$$R_n(f)_r\leq C_1 \ln(e+n\tau(f;\ 1/n)_L)/n, \quad n=1,\ 2,\ \ldots, \tag{4}$$

где $C_1>0$, $\tau(f;\ \delta)_L=\int_0^1\omega(f;\ x;\ \delta)dx$, $\omega(f;\ x;\ \delta)=\sup\{|f(x')-f(x'')|:\ x',\ x''\in[x-\delta/2,\ x+\delta/2]\cap[0,\ 1]\}$ (см. [8—11]). Обозначим (см. [12; 13]) $\varkappa(f;\ n)=\sup\{\Sigma_{\nu=1}^n |f(x_i)-f(x_{i-1})|:\ 0\leq x_0\leq x_1\leq\ldots\leq x_n\leq 1\}$. Отметим, что (см. [11])

$$n\tau(f;\ 1/n)_L\leq 6\varkappa(f;\ n)\leq 6V_0^1 f,\quad \varkappa(f;\ n)\leq 2n\|f\|_\Delta;\ \|f\|_\Delta=\sup\{|f(x)|:x\in\Delta\}. \tag{5}$$

Тогда из (4), (5) следует, что для любой ограниченной на отрезке Δ функции f справедлива оценка

$$R_n(f)_r\leq C_2\ln(e+\varkappa(f;\ n))/n, \tag{6}$$

где $C_2>0$ — абсолютная константа.

Покажем, что оценки (4), (6) неулучшаемы в классе всех функций с неограниченной вариацией.

Теорема 2. а) *для любой функции $\tau(\delta)$, $\delta\geq 0$ такой, что $\tau(\delta)=\tau(g;\delta)_L$ при $\delta\geq 0$, где g ограниченная на отрезке $\Delta=[0,\ 1]$ функция с неограниченной вариацией ($\tau(\delta)/\delta\to\infty$ при $\delta\to 0$), существует ограниченная на Δ функция f такая, что $\tau(f;\ \delta)\leq\tau(\delta)$ при $\delta\geq 0$ и*

$$\limsup_{n\to\infty} R_n(f)_r n/\ln(e+n\tau(1/n))>0;$$

б) *для любой функции* $\varkappa(n)$, $n=1, 2, \ldots$ *такой, что* $\varkappa(n)=\varkappa(g; n)$ *при* $n=1, 2, \ldots$, *где* g — *ограниченная на отрезке* Δ *функция с неограниченной вариацией* ($\varkappa(n)\to\infty$ *при* $n\to\infty$), *существует ограниченная на* Δ *функция* f *такая, что* $\varkappa(f; n)\leq\varkappa(n)$ *при* $n=1, 2, \ldots$ *и*

$$\limsup_{n\to\infty} R_n(f)_r n/\ln(e+\varkappa(n))>0.$$

Из теоремы 2 при $\varkappa(n)=n$ следует утверждение теоремы 1.

Задачу о рациональной аппроксимации „индивидуальной" функции с ограниченной вариацией относительно хаусдорфова расстояние будем рассматривать в другой статье. Справедливо следующее утверждение: *если* $V_0^1 f<\infty$, *то* $R_n(f)_r=o(n^{-1})$ (сравните с (3)), *и эта оценка точна по порядку в классе всех функций с ограниченной вариацией.* Из последней оценки, пользуясь известным соотношением [14] между хаусдорфовой и интегральной метриками, следует, что если $V_0^1 f<\infty$, то $R_n(f)_L=o(n^{-1})$, где $R_n(f)_L$ — наилучшее приближение функции f элементами множества R_n относительно интегральной метрики. Все результаты анонсированы в [15].

Доказательство теоремы 2, которое основано на использовании альтернанса, предпошлем нескольких вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Существуют абсолютные константы* C_1, $t_1>0$ *такие, что для любого действительного числа* $t\geq t_1$ *существуют рациональная функция* s_k *порядка* $k=k(t)=[C_1\ln t]$ *и точки* $\{x_i\}_{i=0}^k$, $1/2=x_0<x_1<\ldots<x_k=1$ *такие, что* $|\operatorname{sgn} x-s_k(x)|>t^{-1/4}$ *при* $x\in\{x_i\}_{i=0}^k\cup\{-x_i\}_{i=0}^k$. *При этом в последовательных точках* $-x_k, -x_{k-1}, \ldots, -x_0, x_0, \ldots, x_k$ *функция* $\operatorname{sgn} x-s_k(x)$ *принимает значения с чередующимися знаками.*

Доказательство. А. П. Буланов [16] доказал, что для любого натурального числа k и любого $\delta\in(0, 1)$ имеет место неравенство

$$|\operatorname{sgn} x-s_k(x)|>\exp(-\pi^2 k/2\ln(1/\delta))$$

при $x\in\{\delta^{i/k}\}_{i=0}^{0}\cup\{-\delta^{i/k}\}_{i=0}^k$, где $s_k(x)=(p_k(x)-p_k(-x))/(p_k(x)+p_k(-x))$, $p_k(x)=\prod_{\nu=1}^k(\delta^{(2\nu-1)/2k}+x)$, при этом функция $\operatorname{sgn} x-s_k(x)$ принимает свои значения в точках $-1, -\delta^{1/k}, \ldots, -\delta^{(k-1)/k}, -\delta, \delta, \ldots, \delta^{1/k}, 1$ с чередующимися знаками. Из последнего, полагая $\delta=1/2$, $C_1=\ln 2/2\pi^2$, $t_1=e^{1/c_1}$, $k=[C_1\ln t]$ $(t\geq t_1)$, получаем утверждение леммы.

Лемма 2. *Для любого натурального числа* m *существует алгебраический полином* p_l *степени* $l=100.m$ *и точки* $\{a_\nu\}_{\nu=0}^{l-2m}$, $0=a_0<a_1<\ldots,<a_{l-2m}=1$, *со свойствами:*

а) $p_l(a_\nu)=(-1)^\nu$, $\nu=0, 1, \ldots, l-2m$,

б) p_l *монотонен на каждом отезке* $[a_{\nu-1}, a_\nu]$, $\nu=1, 2, \ldots, l-2m$,

в) $\|p_l\|_{[0,1]}=1$ *и* $\|p_l'\|_{[0,1]}\leq C_2 m$, *где* $C_2>0$ — *абсолютная константа,* $C_2=200\operatorname{cotg}(\pi/100)$,

г) *если через* $\{b_\nu\}_{\nu=1}^{l-2m}$ *обозначим действительные корни многочлена* p_l *на отрезке* $[0, 1]$, *то* $0=a_0<b_1<a_1<b_2<a_2<\ldots<b_{l-2m}<a_{l-2m}=1$.

Доказательство. Полином p_l со свойствами а) — г) построим на основе полинома Чебышева $T_l(x)=\cos(l\arccos x)$. Полином T_l' имеет корни $\eta_\nu=\cos(\nu\pi/l)$, $\nu=1, 2, \ldots, l-1$. Рассмотрим полином $p_l(x)=(-1)^m T_l(2\eta_m x-\eta_m)$ и положим $a_\nu=\eta_{l-m-\nu}/2\eta_m+1/2$, $\nu=0, 1, \ldots, l-2m$. Тогда имеем $p_l(a_\nu)=(-1)^m T_l(\eta_{l-m-\nu})=(-1)^{l-\nu}=(-1)^\nu$, так как $l=100.m$. Учитывая, что $a_0=$

$\eta_{l-m}/2\eta_m+1/2=0$ и $a_{l-2m}=\eta_m/2\eta_m+1/2=1$, то условие а) выполнено. Условия б) и г) следуют непосредственно из свойств полинома Чебышева. Для установления свойства в) рассмотрим $p_l'(x)=(-1)^m 2\eta_m T'(2\eta_m x-\eta_m)$. Пользуясь неравенством С. Н. Бернштейна, получаем $\|p_l'\|_{[0,1]}\leq 2\eta_m\|T_l'\|_{[-\eta_m,\eta_m]}\leq 2l\eta_m/\sqrt{1-\eta_m}=200\operatorname{cotg}(\pi/100)m=C_2 m$. Тем самым лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Сначала докажем, что часть а) теоремы следует из части б). Действительно, пусть $\tau(\delta)=\tau(g;\delta)_L$ при $\delta\geq 0$, где g — некоторая ограниченная на отрезке $\Delta=[0,1]$ функция с неограниченной вариацией. Тогда $\tau(\delta)/\delta\to\infty$ при $\delta\to 0$ [10]. Нетрудно доказать, что τ является функцией типа модуля непрерывности [10]: $0\leq\tau(0)=\tau(+0)\leq\tau(\varepsilon)\leq\tau(\varepsilon+\delta)\leq\tau(\varepsilon)+\tau(\delta)$, ε, $\delta\geq 0$. С другой стороны [17], существует выпуклый вверх модуль непрерывности $\tilde\tau$ такой, что $\tau(\delta)\leq\tilde\tau(\delta)\leq 2\tau(\delta)$ при $\delta\geq 0$. Положим $\varkappa(n)=n\tilde\tau(1/n)/24$. Так как функция $\tilde\tau$ выпукла вверх на $[0,\infty)$ и $\tilde\tau(\delta)/\delta\to\infty$ при $\delta\to 0$, то функция $x\tilde\tau(1/x)$ монотонно возрастает и выпукла вверх на $[1,\infty)$ и $x\tilde\tau(1/x)\to\infty$ при $x\to\infty$. Тогда, очевидно, существует ограниченная на отрезке Δ функция h с неограниченной вариацией такая, что $\varkappa(n)=\varkappa(h;n)$, $n=1,2,\ldots$ Если справедлива часть б) теоремы 2, то существует ограниченная на Δ функция f такая, что $\varkappa(f;n)\leq\varkappa(n)$ при $n=1,2,\ldots$ и

$$\limsup_{n\to\infty} R_n(f)_r n/\ln(e+\varkappa(n))>0.$$

Ввиду (5) получаем $\tau(f;1/n)_L\leq 6n^{-1}\varkappa(n)=\tilde\tau(1/n)/4\leq\tau(1/n)/2$ и, следовательно, $\tau(f;\delta)_L\leq\tau(\delta)$ при $\delta\geq 0$. С другой стороны,

$$R_n(f)_r n/\ln(e+\varkappa(n))=R_n(f)_r n/\ln(e+n\tilde\tau(1/n)/24)\leq R_n(f)_r n/\ln(e+n\tau(1/n)/24)$$

и, следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} R_n(f)_r n/\ln(e+n\tau(1/n))>0$$

Тем самым доказано, что часть а) теоремы 2 следует из части б).

Перейдем к доказательству теоремы 2, б). В дальнейшем будем пользоваться и модулем изменения $\nu(f;n)$, введенным З. А. Чантурием [13]:

$$\nu(f;n)=\sup\{\sum_{i=1}^{n}|f(x_{2i-2})-f(x_{2i-1})|:0\leq x_1\leq x_2\leq\ldots\leq x_{2n-1}\leq 1\}.$$

Характеристики $\varkappa(f;n)$ и $\nu(f;n)$ близки между собой и связаны зависимостью

$$\varkappa(f;n)\leq\nu(f;n)\leq 2\varkappa(f;n). \tag{7}$$

Очевидно, $0\leq\nu(f;n)\leq\nu(f;n+1)\leq V_0^1 f$, $\nu(f;k.n)\leq k\nu(f;n)$, $\nu(f;n)\leq 2n\|f\|_\Delta$. Этими свойствами обладает и $\varkappa(f;n)$. Основное различие между характеристиками $\varkappa(f;n)$ и $\nu(f;n)$ заключается в том, что $\nu(f;n)$ выпукла вверх функция [3], а $\varkappa(f;n)$ необязательно выпукла вверх.

Пусть $\varkappa(n)=\varkappa(g;n)$, $n=1,2,\ldots$, где g — произвольная, ограниченная на отрезке $\Delta=[0,1]$ функция с неограниченной вариацией. Тогда $\varkappa(n)\to\infty$ при $n\to\infty$. Функцию f, о существовании которой утверждается в теореме 2, б), строим следующим образом:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} f_{n_i}(x), \tag{8}$$

где $f_{n_i}(x)=n_i^{-1}\varkappa^{1/2}(n_i)\operatorname{sgn}(p_{l_i}(x))$, $l_i=100m_i$, $m_i=[n_i/k_i]$, $k_i=[c_1\ln\varkappa(n_i)]$, C_1 — константа из леммы 1, p_{l_i} — полином из леммы 2, а последовательность натуральных чисел $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, $n_1<n_2<\ldots$, выбрана так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $\varkappa(n_1)\geq t_1$,
2) $n_i/[C_1\ln\varkappa(n_i)]\geq 1$, $i=1, 2, \ldots$,
3) $[C_1\ln\varkappa(n_1)]\geq 2$,
4) $R_{n_i}(\sum_{j=1}^{i-1} f_{n_j})_r<1/n_i$, $i=2, 3, \ldots$,
5) $C_1\ln\varkappa(n_i)/C_2n_i>2/n_i$, $i=1, 2, \ldots$,
6) $196\sum_{j=1}^{i-1}[n_j/[C_1\ln\varkappa(n_j)]]\leq[n_i/[C_1\ln\varkappa(n_i)]]$, $i=2, 3, \ldots$
7) $\sum_{j=i+1}^{\infty}\varkappa^{1/2}(n_j)/n_j<1/n_i$, $i=1, 2, \ldots$,
8) $\varkappa^{1/4}(n_i)/n_i>C_1\ln\varkappa(n_i)/4C_2n_i$, $i=1, 2, \ldots$,
9) $\ln\varkappa(n_i)/8C_2n_i>2/n_i$, $i=1, 2, \ldots$,
10) $194[n_i/[C_1\ln\varkappa(n_i)]].[C_1\ln\varkappa(n_i)]\geq 102n_i+1$, $i=1, 2, \ldots$,
11) $$196\sum_{j=1}^{i}[n_j/[C_1\ln\varkappa(n_j)]]\varkappa^{1/2}(n_j)/n_j+2n_i\sum_{j=i+1}^{\infty}\varkappa^{1/2}(n_j)/n_j\leq\varkappa(n_i)/2,\quad i=1, 2, \ldots,$$
12) $2\sum_{j=1}^{\infty}\varkappa^{1/2}(n_j)/n_j\leq\varkappa(1)/2$,
13) $98\sum_{j=1}^{i}[n_j/[C_1\ln\varkappa(n_j)]]\leq n_i$ $i=1, 2, \ldots$,
14) $$\varkappa(n_i)/2+2(n_{i+1}-n_i)\sum_{j=i+1}^{\infty}\varkappa^{1/2}(n_j)/n_j\leq\varkappa(n_{i+1})/2,\quad i=0, 1, \ldots,\quad n_0=1,$$

где t_1 и C_1 — константы из леммы 1, C_2 — константа из леммы 2.

Так как $\varkappa(n)\to\infty$ при $n\to\infty$ и $\varkappa(n)=\varkappa(g;\,n)\leq 2n\,\|f\|_{\Delta}$, то ясно, что существует последовательность натуральных чисел $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, для которой имеют место 1) —14).

Сначала докажем, что $\varkappa(f;\,n)\leq\varkappa(n)$ при $n=1, 2, \ldots$ Из определения функции f, (8), следует, что

$$\varkappa(f;\,n_i)\leq\sum_{j=1}^{i}V_0^1 f_{n_j}+n_i 2\Big\|\sum_{j=i+1}^{\infty}f_{n_j}\Big\|_{\Delta}$$

$$\leq\sum_{j=1}^{i}98m_j2\varkappa^{1/2}(n_j)/n_j+2n_i\sum_{j=i+1}^{\infty}\varkappa^{1/2}(n_j)/n_j$$

и, согласно 11), получаем

$$\varkappa(f;\, n_i)\leq\varkappa(n_i)/2, \quad i=1,\, 2, \dots \tag{9}$$

Положим $n_0=1$. Тогда, согласно 12), имеем

$$\varkappa(f;\, n_0)\leq 2\,\|f\|_\Delta\leq 2\sum_{j=1}^{\infty}\|f_{n_j}\|_\Delta \tag{10}$$

$$\leq 2\sum_{j=1}^{\infty}\varkappa^{1/2}(n_j)/n_j\leq\varkappa(1)/2=\varkappa(n_0)/2.$$

Пусть n — произвольное натуральное число и $n_i\leq n<n_{i+1}$, $i\geq 0$. Тогда $n=n_i+\lambda(n_{i+1}-n_i)$, где $0\leq\lambda<1$. Так как, согласно 13), имеем $\Sigma_{j=1}^{i}98m_j\leq n_i$, то из (8)—(10) следует, что

$$\varkappa(f;\, n)\leq\varkappa(f;\, n_i)+\lambda(n_{i+1}-n_i)2\sum_{j=i+1}^{\infty}\|f_{n_j}\|_\Delta \tag{11}$$

$$\leq\varkappa(n_i)/2+\lambda(n_{i+1}-n_i)2\sum_{j=i+1}^{\infty}\varkappa^{1/2}(n_j)/n_j.$$

Учитывая (7), (11), 14) и факт, что функция $\nu(g;\, n)$ выпукла вверх, получаем

$$\varkappa(f;\, n)\leq\varkappa(n_i)/2+\lambda(n_{i+1}-n_i)2\sum_{j=i+1}^{\infty}\varkappa^{1/2}(n_j)/n_j$$

$$\leq(1-\lambda)\varkappa(n_i)/2+\lambda(\varkappa(n_i)/2+2(n_{i+1}-n_i)\sum_{j=i+1}^{\infty}\varkappa^{1/2}(n_j)/n_j)$$

$$\leq 2^{-1}((1-\lambda)\varkappa(n_i)+\lambda\varkappa(n_{i+1}))\leq 2^{-1}((1-\lambda)\nu(g;\, n_i)+\lambda\nu(g;\, n_{i+1}))$$

$$\leq 2^{-1}\nu(g;\, (1-\lambda)n_i+\lambda n_{i+1})=2^{-1}\nu(g;\, n)\leq\varkappa(n),$$

т. е. $\varkappa(f;\, n)\leq\varkappa(n)$, $n=1,\, 2, \dots$

Осталось доказать, что существует абсолютная константа $C>0$ такая, что

$$R_{n_i}(f)_r>C\ln\varkappa(n_i)/n_i, \quad i=1,\, 2, \dots \tag{12}$$

Неравенство (12) получим, используя альтернанс.

Функции f_{n_i} сопоставим рациональную функцию $u_{\varrho_i}(x)=n_i^{-1}\varkappa^{1/2}(n_i)s_{k_i}(p_{l_i}(x))$ порядка $\varrho_i\leq 100\,n_i$, где s_{k_i} — рациональная функция порядка $k_i=[C_1\ln\varkappa(n_i)]$ из леммы 1, а p_{l_i} — полином степени $l_i=100\,m_i$, $m_i=[n_i/k_i]$, из леммы 2.

Обозначим через $\{a_\nu^{(i)}\}_{\nu=0}^{l_i-2m_i}$ и $\{b_\nu^{(i)}\}_{\nu=1}^{l_i-2m_i}$ точки, о существовании которых в связи с полиномом p_{l_i} утверждается в лемме 2. Рассмотрим произвольный отрезок $[a_{\nu-1}^{(i)},\, a_\nu^{(i)}]$, $1\leq\nu\leq l_i-2m_i$. Пусть $p_{l_i}(a_{\nu-1}^{(i)})=-1$, $p_{l_i}(a_\nu^{(i)})=1$. Тогда полином p_{l_i} монотонно возрастает на отрезке $[a_{\nu-1}^{(i)},\, a_\nu^{(i)}]$. Обозначим через $y_\nu^{(i)}$, $z_\nu^{(i)}\in[a_{\nu-1}^{(i)},\, a_\nu^{(i)}]$ точки, для которых $p_{l_i}(y_\nu^{(i)})=-1/2$, $p_{l_i}(z_\nu^{(i)})=1/2$. Тогда имеем $a_{\nu-1}^{(i)}<y_\nu^{(i)}<b_\nu^{(i)}<z_\nu^{(i)}<a_\nu^{(i)}$. Если p_{l_i} убывает на $[a_{\nu-1}^{(i)},\, a_\nu^{(i)}]$, положим

$p_{l_i}(y_\nu^{(i)})=1/2$, $p_{l_i}(z_\nu^{(i)})=-1/2$. Так как $\|p'_{l_i}\|_\Delta\leqq C_2m_i$, согласно лемме 2, то, учитывая 3), получаем

$$\min\{y_\nu^{(i)}-a_{\nu-1}^{(i)},\ b_\nu^{(i)}-y_\nu^{(i)},\ z_\nu^{(i)}-b_\nu^{(i)},\ a_\nu^{(i)}-z_\nu^{(i)}\}\geqq 1/2C_2m_i \tag{13}$$
$$\geqq[C_1\ln\varkappa(n_i)]/2C_2n_i\geqq C_1\ln\varkappa(n_i)/4C_2n_i.$$

Из леммы 2 следует, что существуют точки $\{x_{\nu,j}^{(i)}\}_{j=0}^{2k_i+1}$,

$$a_{\nu-1}^{(i)}=x_{\nu,0}^{(i)}<x_{\nu,1}^{(i)}<\ldots<x_{\nu,k_i}^{(i)}=y_\nu^{(i)},\ z_\nu^{(i)}=x_{\nu,k_i+1}^{(i)}<\ldots<x_{\nu,2k_i+1}^{(i)}=a_\nu^{(i)}$$

такие, что

$$|f_{n_i}(x_{\nu,j}^{(i)})-u_{\varrho_i}(x_{\nu,j}^{(i)})|>n_i^{-1}\varkappa^{1/4}(n_i)\quad\text{для}\quad i=0,1,\ldots,2k_i+1 \tag{14}$$

и в последовательных точках $x_{\nu,0}^{(i)}, x_{\nu,1}^{(i)},\ldots,x_{\nu,2k_i+1}^{(i)}$ функция $f_{n_i}(x)-u_{\varrho_i}(x)$ принимает свои значения с чередующимися знаками.

Из условия 4) следует, что существует рациональная функция $v_{n_i}\in R_{n_i}$ такая, что

$$r(F_i, v_{n_i})<1/n_i, \tag{15}$$

где $F_i=\sum_{j=1}^{i-1}f_{n_j}$. Функция F_i ступенчатая и имеет не больше $\sum_{j=1}^{i-1}98m_j$ точек разрыва. Из (13) и 5) следует, что $a_\nu^{(i)}-a_{\nu-1}^{(i)}\geqq C_1\ln\varkappa(n_i)/C_2n_i>2/n_i$ для $\nu=1,2,\ldots,l_i-2m_i$. Следовательно, существует не больше $2\sum_{j=1}^{i-1}98m_j\leqq m_i$, учитывая 6), сегментов $[a_{\nu-1}^{(i)}, a_\nu^{(i)}]$, $1\leqq\nu\leqq 98m_i$, которые имеют непустое пересечение с окрестностями радиуса $1/n_i$ точек разрыва функции F_i. Обозначим через Ω_i множество индексов этих отрезков. Число элементов множества Ω_i не больше m_i. Тогда из (15) и определения хаусдорфова расстояния следует, что для любого $x\in\cup\{[a_{\nu-1}^{(i)}, a_\nu^{(i)}]: 1\leqq\nu\leqq 98m_i,\ \nu\notin\Omega_i\}$ имеем

$$|F_i(x)-v_{n_i}(x)|<1/n_i. \tag{16}$$

Покажем, что для любой рациональной функции $q\in R_{n_i}$ имеет место неравенство

$$r(f, g)>\min\{C_1\ln\varkappa(n_i)/4C_2n_i,\ \varkappa^{1/4}(n_i)/n_i\}-2/n_i. \tag{17}$$

Действительно, допустим противное, а именно, что для некоторой рациональной функции $q^*\in R_{n_i}$ имеем

$$r(f, q^*)\leqq\min\{C_1\ln\varkappa(n_i)/4C_2n_i,\ \varkappa^{1/4}(n_i)/n_i\}-2/n_i. \tag{18}$$

Тогда из (18), учитывая (13), определение хаусдорфова расстояния и 7), получаем, что для любого $x\in\cup\{[a_{\nu-1}^{(i)}, y_\nu^{(i)}]\cup[z_\nu^{(i)}, a_\nu^{(i)}]: 1\leqq\nu\leqq 98m_i,\ \nu\notin\Omega_i\}$ имеем

$$\Big|\sum_{j=1}^{i}f_{n_j}(x)-q^*(x)\Big|\leqq r(f, q^*)+\Big\|\sum_{j=i+1}^{\infty}f_{n_j}\Big\|_\Delta \tag{19}$$
$$\leqq\min\{C_1\ln\varkappa(n_i)/4C_2n_i,\ \varkappa^{1/4}(n_i)/n_i\}-2/n_i$$
$$+\sum_{j=i+1}^{\infty}\varkappa^{1/2}(n_j)/n_j<\varkappa^{1/4}(n_i)/n_i-1/n_i.$$

Из (16) и (19) следует, что для любого $x \in \cup\{[a_{\nu-1}^{(i)}, y_\nu^{(i)}] \cup [z_\nu^{(i)}, a_\nu^{(i)}] : 1 \leqq \nu \leqq 98m_i,\ \nu \notin \Omega_i\}$ имеем

$$(20)\qquad |f_{n_i}(x) - q^*(x) + v_{n_i}(x)| \leqq \sum_{j=1}^{i} |f_{n_j}(x) - q^*(x)| + |F_i(x) - v_{n_i}(x)| < \varkappa^{1/4}(n_i)/n_i.$$

Рассмотрим рациональную функцию $W = u_{\varrho_i} - q^* + v_{n_i}$, $W \in R_{102m_i}$. Из (14) и (20) получаем, что для любого $x \in \{x_{\nu,j}^{(i)} : 1 \leqq \nu \leqq 98m_i,\ \nu \notin \Omega_i,\ j = 0, 1, \ldots 2k_i + 1\}$ выполнены неравенства $|W(x)| \geqq |f_{n_i}(x) - u_{\varrho_i}(x)| - |f_{n_i}(x) - q^*(x) + v_{n_i}(x)| > 0$. Так как функция $f_{n_i}(x) - u_{\varrho_i}(x)$ принимает значения в последовательных точках $x_{\nu,0}^{(i)}, x_{\nu,1}^{(i)}, \ldots, x_{\nu,2k_i+1}^{(i)}$ с чередующимися знаками, то W имеет не меньше $2k_i(98m_i - m_i) = 194k_i[n_i/k_i] \geqq 102m_i + 1$, учитывая 10), нулей. Это невозможно, так как $W \not\equiv 0$ и $W \in R_{102m_i}$. Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства (17) для любой рациональной функции $q \in R_{n_i}$, которое, учитывая 8), влечет за собой неравенство (12). Тем самым теорема 2 доказана.

Замечание. Нетрудно построить непрерывную функцию f, для которой имело бы место утверждение теоремы 2. Для этого нужно изменить функции f_{n_i} (см. (8)) на достаточно узких окрестностях своих точек разрыва.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бл. Сендов. Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в Хаусдорфовой метрике. *Успехи мат. наук*, **24**, 1969, №5, 141—178.
2. Бл. Сендов. Апроксимиране на функции с алгебрични полиноми по отношение на една метрика от хаусдорфовски тип. *Годишник Соф. унив., Физ.-мат. фак.*, **55**, 1962. 1—39.
3. Т. П. Боянов. О порядке наилучшего приближения алгебраическими многочленами относительно расстояния хаусдорфовского типа. *Доклады БАН*, **23**, 1970, 635—638.
4. А. А. Гончар. Оценки роста рациональных функций и некоторые их приложения. *Мат. сб.*, **72**, 1967, 489—503.
5. D. J. Newman. Rational approximation to $|x|$. *Michigan Math. J.*, **11**, 1964, 11—14.
6. V. A. Popov. Uniform rational approximation of the class V_r and its applications. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **29**, 1977, 119—129.
7. П. П. Петрушев. Наилучшие рациональные приближения в хаусдорфовой метрике. *Сердика*, **6**, 1980, 29—41.
8. Бл. Сендов. Аппроксимация относительно хаусдорфова расстояния. Диссертация. Москва, 1967.
9. П. П. Коровкин. Опыт аксиоматического построения некоторых вопросов теории приближений. *Уч. зап. Калинин. гос. инст.*, **69**, 1969, 91—109.
10. Е. П. Долженко, Е. А. Севастьянов. О приближениях функций в хаусдорфовой метрике посредством кусочно-монотонных (в частности рациональных) функций. *Мат. сб.*, **101**, 1976, 508—541.
11. A. Andreev, V. A. Popov, Bl. Sendov. Jackson's type theorems for onesided polynomial and spline approximation. *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **30**, 1977, 1533—1536.
12. V. A. Popov. On the connection between rational and spline approximation. *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **27**, 1974, 623—626.
13. З. А. Чантурия. Модуль изменения функции и его применения в теории рядов Фурье. *Доклады АН СССР*, **214**, 1974, 63—66.
14. Бл. Сендов, В. А. Попов. Об аппроссимации сплайн-функциями. *Доклады БАН*, **23** 1970, 755—758.
15. П. П. Петрушев. Рациональные приближения в хаусдорфовой метрике. *Доклады БАН*, **31**, 1977, 155—158.
16. А. П. Буланов. Асимптотика для наилучших уклонений функции sign x от рациональных функций. *Мат. сб.*, **96**, 1975, 171—188.
17. А. В. Ефимов. Линейные методы приближения непрерывных периодических функций, *Мат. сб.*, **54**, 1971, 51—90.

Единый центр математики и механики
1090 София п. я. 373

Поступила 14. 7. 1978