Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

МИКРОЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАССА ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

ПЕТР Р. ПОПИВАНОВ, ГЕОРГИ СТ. ПОПОВ

Рассматриваются псевдодифференциальные операторы с вещественными характеристиками постоянной кратности и эллиптическим субглавным символом. Доказана теорема о микролокальной гипоэллиптичности. Для весьма широкого класса операторов с трехкратными характеристиками получены окончательные результаты, т. е. найдены необходимые и достаточные условия для микролокальной гипоэллиптичности и локальной разрешимости.

В этой работе изучаются микролокальные свойства псевдодифференциальных операторов с вещественными характеристиками тождественной кратности $m \geqq 2$. В предположении, что субглавный символ эллиптичен хотя бы в одной характеристической точке главного символа, доказаны теоремы о микролокальной гипоэллиптичности и о распространении особенностей. В случае $m=3$ найдены точные, необходимые и достаточные условия для гипоэллиптичности и локальной разрешимости рассматриваемых операторов. Эта статья является продолжением работ [4; 9; 10; 12; 14]. Микролокальная факторизация, неоднородные канонические преобразования и соответствующее видоизменение методов Егорова из [4] и Трева — Кардозо из [1] является основным аппаратом в этой работе. Ниже мы пользуемся стандартной терминологией из теории псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье из [7], [12]. Часть результатов этой статьи были опубликованы без доказательства в [10].

Мы будем изучать скалярный псевдодифференциальный оператор вида

$$P(x, D)=P_m(x, D)+\sum_{j=1}^{\infty} P_{m-j}(x, D), \tag{0.1}$$

где соответствующие символы $p_{m-j}(x, \xi)$ — положительно однородные степени $m-j$ относительно ξ, т. е. $\operatorname{ord}_\xi p_{m-j}=m-j$, $j \in Z_+$. В дальнейшем будем предполагать, что

$$p_m(x, \xi)=(p(x, \xi))^m, \ m \geqq 2, \ m \in Z_+, \tag{0.2}$$

где — $p(x, \xi)$ — вещественный символ главного типа, т.е.

$$p(x, \xi)=0, \ (x, \xi) \in T^*(X) \diagdown \{0\} \implies \operatorname{grad}_{x,\xi} p(x, \xi) \neq 0.$$

Заметим, что в процессе наших рассуждений достаточно предположить, что представление (0.2) выполнено в некоторой окрестности точки (x^0, ξ^0), $|\xi^0|=1$, $p(x^0, \xi^0)=0$, $\operatorname{grad}_{x,\xi} p(x^0, \xi^0) \neq 0$. Напомним определение субглавного символа

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 6, 1980, с. 169—183.

$$p'_{m-1}(x, \xi) = p_{m-1}(x, \xi) + \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 p_m}{\partial x_j \partial \xi_j}(x, \xi).$$

Заметим, что p'_{m-1} является инвариантом относительно однородных канонических преобразований в тех точках (x, ξ), в которых $p_m(x, \xi) = 0$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что

$$\text{(A)} \qquad \operatorname{Re} p'_{m-1}(x^0, \xi^0) \neq 0.$$

Обозначим через Σ множество всех характеристических точек (x, ξ), расположенных в некоторой конической окрестности Γ точки $\varrho^0 = (x^0, \xi^0)$. Очевидно, Σ — гладкое многообразие и $\operatorname{codim} \Sigma = 1$. Гамильтоновое векторное поле вещественной функции $p(x, \xi)$ определяется стандартным образом

$$H_p = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right).$$

Многообразие Σ расслаивается на интегральные траектории поля H_p. Эти кривые будем называть нулевыми бихарактеристиками символа p. Нулевую бихарактеристику, проходящую через ϱ_0, обозначим через $\gamma(t)$, $\gamma(0) = \varrho_0$. Пусть $\Sigma_0 = \Sigma \cap \{\xi; |\xi| = 1\}$ и предположим, что N — следующее гладкое векторное поле на Σ_0

$$N = |\operatorname{grad}_{x,\xi} p|^{-2} \left(\langle \operatorname{grad}_x p, \frac{\partial}{\partial x} \rangle + \langle \operatorname{grad}_\xi p, \frac{\partial}{\partial \xi} \rangle \right).$$

Рассмотрим теперь нижеприводимый многочлен переменной z:

$$I(P)(z) = z^m + \sum_{l=0}^{m-2} \frac{z^l}{l!} (N^l p'_{m-1})(\varrho) \tau^{m-1-l}, \tag{0.3}$$

где $\varrho \in \Sigma_0$ и $\tau \geq 0$.

Пусть $z^{(\nu)}(\tau, \varrho)$, $\varrho \in \Sigma_0$, будут его корни $(1 \leq \nu \leq m)$. Если зафиксируем значение $\varrho \in \Sigma_0$, то легко сообразить, что любой корень $z^{(\nu)}(\tau, \varrho$ допускает разложение в ряде Пюизе следующего вида:

$$z^{(\nu)}(\tau, \varrho) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^{(\nu)}(\varrho) \tau^{1-j/m}, \quad \tau \geq C. \tag{0.4}$$

Кроме того, пусть в точке ϱ_0 имеет место требование

(B). Существует окрестность $\Gamma_1 \ni \varrho_0$, $\Gamma_1 \subset \Sigma_0$ и такая, что неравенство

$$|\operatorname{Im} \mu_j^{(\nu)}(\varrho)|^{(m-1)/(m-j)} \leq C |\operatorname{Im} \mu_1^{(\nu)}(\varrho)| \tag{0.5}$$

выполнено для любой точки $\varrho = (x, \xi) \in \Gamma_1 \cap \Sigma_0$, $C = \text{const}$, и для любых $j, \nu, 0 \leq j \leq m-1$, $0 \leq \nu \leq m$.

Заметим, что в случае $m = 3$ неравенство (0.5) переходит в

$$|\operatorname{Im} Np'_2(\varrho)|^2 \leq C |\operatorname{Im} p'_2(\varrho)|, \quad \varrho \in \Gamma_1 \cap \Sigma_0.$$

Легко заметить, что при переходе к L^2-сопряженному оператору оператора P^* имеет место равенство $I(P^*)(z) = \overline{I(P)(\bar{z})}$ ([11]). Следовательно, условия (A), (B) одновременно выполнены для операторов P и P^*.

Теперь мы сформулируем основные результаты этой работы.

Теорема 1. *Предположим, что для псевдодифференциального оператора вида* (0.1) *выполнены оба условия* (A) *и* (B). *Пусть функция* $\operatorname{Im} p'_{m-1}$ *не меняет знака в окрестности* $\Gamma_2 \ni \varrho_0$, $\Gamma_2 \subset \Sigma_0$, *и имеет в точке* ϱ_0

нуль конечного порядка k вдоль нулевой бихарактеристики $\gamma(t)$. Тогда

$$\varrho_0 \notin WF_s(Pu) \iff \varrho_0 \notin WF_{s-m+r}(u), \tag{0.6}$$

где $r=2-(m+k)/(m(k+1))$.

Следствие 1. *Операторы P и P^*, рассматриваемые в теореме 1, одновременно микролокально гипоэллиптичны.*

Мы уже упомянули в введении, что наши результаты имеют законченный характер в случае трехкратных характеристик. Поэтому мы предложим все результаты в этом направлении в виде отдельных теорем.

Теорема 2. *Пусть для оператора* (0.1) *в случае* $q=3$ *выполнены условия* (A) *и* (B). *Предположим, что функция* $\operatorname{Im} p'_{m-1}$ *не меняет знака в окрестности* $\Gamma \ni \varrho^0$, $\Gamma \subset \Sigma_0$ *и имеет вдоль нулевой бихарактеристики* $\gamma(t)$ *нуль конечного порядка k в точке ϱ^0. Тогда*

$$\varrho^0 \notin WF_s(Pu) \implies \varrho^0 \notin WF_{s-3+(5k+3)/3(k+1)}(u).$$

Отбрасывание ограничения (B) приводит к негипоэллиптичности и локальной неразрешимости изучаемых операторов P и P^*. Этот факт доказывается в теореме 3. Для этой цели сформулируем следующее требование:

(B′) Существует окрестность $U \ni \varrho^0$ и такая, что неравенство

$$|\operatorname{Im} Np'_{m-1}(\varrho)|^2 \leq C\ |\operatorname{Im} p'_{m-1}(\varrho)|$$

выполнено для любой точки $\varrho \in U \cap \gamma(t)$.

Теорема 3. *Рассмотрим дифференциальный оператор P, $m=3$, для которого* $\operatorname{grad}_\xi p(\varrho^0) \neq 0$ *и имеет место условие* (A). *Предположим, что функция* $\operatorname{Im} p'_{m-1}(\varrho)$ *имеет нуль конечного четного порядка в точке ϱ^0 вдоль $\gamma(t)$. Тогда оператор P локально неразрешим в окрестности точки ϱ^0 в классе распределений $D'(X)$, если требование* (B′) *не выполнено в точке ϱ^0.*

Из теоремы 3 немедленно следует, что в предположениях теоремы 3 операторы P, P^* негипоэллиптичны в окрестности точки ϱ^0. Вполне естественно возникает вопрос о поведении оператора P в том случае, когда $\operatorname{Im} p'_{m-1}(\varrho)$ не сохраняет знака в множестве Σ_0. Тогда можно показать, что вообще говоря, нет никакой теоремы о гладкости или о разрешимости. Поэтому указанные операторы не составляют особого интереса.

Теорема 4. *Предположим, что для дифференциального оператора P, $m=3$, выполнены условия (A) и* $\operatorname{grad}_\xi p(\varrho^0) \neq 0$. *Пусть функция* $\operatorname{Im} p'_{m-1}$ *имеет нуль конечного нечетного порядка k вдоль $\gamma(t)$ в точке ϱ^0 и, кроме того,*

$$\operatorname{Im} H_p^k(p'_{m-1})(\varrho^0) > 0. \tag{0.7}$$

Тогда оператор P локально неразрешим в точке x_0.

Наконец приводим простые примеры, иллюстрирующие все теоремы этой статьи.

Пример 1. Рассмотрим оператор

$$P=D_1^3+(a_1+ix_1^k a_2)D_2^2+(b_1+ix_1^l b_2)D_1D_2+c(x)D_1^2+L_1(x, D),$$

где $\operatorname{ord}_\xi L_1=1$, $a_1, a_2, b_1, b_2=\text{const}$, $a_1 a_2 b_2 \neq 0$, а функция $c(x)$ произвольная Пусть k четное. Тогда

$$P \text{ локально разрешим} \iff P \text{ гипоэллиптичен} \iff k \leq 2l.$$

Пусть k нечетное. Тогда, если $a_2>0$, то оператор P локально неразрешим в нуле.

Пример 2. Оператор $P=x^3Q_3(x, D)+D_1^2+D_2^2+iD_1^2$, где символ $Q_3(x, \xi)$ реальный, эллиптический, а $\operatorname{ord}_\xi Q_3=3$, гипоэллиптичен с потерей гладкости на 13/9 единиц по сравнению с эллиптическими операторами.

1. Микролокальная факторизация и каноническое преобразование оператора. Наметим сначала схему доказательства теоремы 1. Сперва мы разложим оператор $P(x, D)$ вида (0.1) в произведении псевдодифференциальных операторов первого порядка в некоторой окрестности точки ϱ_0. Любой из этих сомножителей мы оценим методами, развитыми в работах [4; 6]. Таким образом, потеря гладкости оператора (0.1) будет суммой потерей гладкости соответствующих множителей.

Предположим, что V — некоторая окрестность точки ϱ_0. Обозначим через $\varphi(t, \varrho)$, $\varrho\in V$ однопараметрическую группу диффеоморфизмов векторного поля N. Так как поле N трансверсально к Σ и $\dim(\Sigma_0\cap V)=n-2$, то мы заключаем, что множество $\Gamma_0=\{\varphi(t, \varrho);\ \varrho\in\Sigma_0\cap V,\ t\in(-\varepsilon, \varepsilon)\}$ является $n-1$-мерным гладким подмногообразием $T^*X\setminus 0$ для некоторого $\varepsilon>0$. Кроме того, многообразие Γ_0 трансверсально коническому лучу $\{(x, s\xi);\ s>0\}$ для любой точки $(x, \xi)\in\Gamma_0$ ($\varepsilon>0$ достаточно мало!). Определим теперь следующую коническую окрестность множества V: $\Gamma=\{(x, s\xi);\ (x, \xi)\in\Gamma_0,\ s>0\}$. Легко сообразить, что отображение $R^+\times\Gamma_0\ni(s, (x, \xi))\to(x, s\xi)\in\Gamma$ — гладкий диффеоморфизм. Обрнтное отображение этого диффеоморфизма обозначим через (τ, χ_1): $\Gamma\to R^+\times\Gamma_0$. Предположим, что χ_2 — проекция множества Γ_0 вдоль интегральных кривых поля φ, т. е. $\chi_2(\varphi(t, \varrho))=\varrho$, $\varrho\in\Sigma_0\cap V$, и $\chi=\chi_2\chi_1$.

Как общепринято, $L^s(\Gamma)$ — множество всех псевдодифференциальных операторов $a(x, D)$, для которых $a(x, D)\psi(x, D)\in L^s(X)$, если только $\psi(x, D)\in L^0(X)$ и $WF(\psi)\subset\Gamma$; $L^{-\infty}(\Gamma)=\cap L^s(\Gamma)$ $s\in Z$.

Эти предварительные замечания позволяют нам сформулировать следующую лемму о факторизации (доказательство см. [11; 12]).

Лемма 1. *Предположим, что для оператора P вида* (0.1) *выполнено условие* (A). *Тогда существует коническая окрестность W точки ϱ^0 и псевдодифференциальные операторы $S_j^{(\nu)}(x, D)\in L^{1-j/m}(W)$ с однородными символами $S_j^{(\nu)}(x, \xi)$, $\operatorname{ord}_\xi S_j^{(\nu)}(x, \xi)=1-j/m$, $j\in Z_+$ такие, что*

$$P(x, D)=\prod_{\nu=1}^{m}[p(x, D)+\sum_{j=1}^{\infty}S_j^{(\nu)}(x, D)]\ (\operatorname{mod} L^{-\infty}(\Gamma)). \tag{1.1}$$

Кроме того, первые $m-1$ члена $\mu_j^{(\nu)}(\varrho)$, $1\le j$, $\nu\le m$ в разложении Пюизе (0.4) *гладкие в $W\cap\Sigma_0$, и для них имеют место нижепроводимые равенства*

$$S_j^{(\nu)}(\varrho)=\tau(\varrho)^{1-j/m}\mu_j^{(\nu)}(\chi(\varrho)), \tag{1.2}$$

$$S_1^{(\nu)}(\varrho)=\varepsilon_\nu S_1^{(1)}(\varrho), \tag{1.2'}$$

где ε_ν — корни уравнения $z^m=1$ *для всех $\varrho\in W$, $1\le\nu\le m$, $1\le j\le m-1$.*

Лемма 1 сводит изучение псевдодифференциального оператора (0.1) к исследованию соответствующих сомножителей первого порядка. Как и в случае классических операторов главного типа, мы постараемся упростить старший символ оператора при помощи канонического преобразования. После однородного канонического преобразования и применения подготовитеьной теоремы Мальгранжа мы можем рассмотреть следующий оператор в окрестности точки ϱ^0:

$$P(x, D)=D_1+\sum_{j=1}^{\infty} S_j(x, D'), \tag{1.3}$$

где $S_j \in L^{1-j/m}(W)$, $D'=(D_2, \ldots, D_n)$, если $\operatorname{grad}_\xi p(\varrho^0) \neq 0$, и

$$P(x, D)=x_1+\sum_{j=1}^{\infty} S_j(x', D), \tag{1.4}$$

где $S_j \in L^{-j/m}(W)$, $x'=(x_2, \ldots, x_n)$, если $\operatorname{grad}_x p(\varrho^0) \neq 0$.

Теперь применим неоднородное каноническое преобразование с целью упростить вещественную часть старшего символа оператора P.

Лемма 2. *Пусть $\varrho_0 \in \Sigma$ и оператор P задан формулой* (1.3). *Тогда можно найти коническую окрестность $W_1 \ni \varrho_0$ и каноническую трансформацию $\varkappa=(y, \eta): W_1 \to T^*(R^n)\setminus 0$, такие, что*

$$\eta_1(x, \xi)=\xi_1+\sum_{j=1}^{m-1} \operatorname{Re} S_j(x, \xi') \tag{1.5}$$

и

$$y(x, \xi)=x+\sum_{j=1}^{m-1} g_j(x, \xi'), \quad \eta(x, \xi)=\xi+\sum_{j=1}^{m-1} h_j(x, \xi'), \tag{1.6}$$

где функции g_j, h_j гладкие в W_1 и $\operatorname{ord}_\xi g_j=-j/m$, $\operatorname{ord}_\xi h_j=1-j/m$.

Доказательство. В процессе доказательства мы построим симплектические координаты (y, η), т. е. $\{\eta_i, \eta_j\}=\{y_i, y_j\}=0$, $\{y_i, \eta_j\}=\delta_{ij}$ ($\{f, g\}$ означает скобку Пуассона функции f и g). Сперва мы найдем функции η_j, $1 \leq j \leq n$. Положим $h_j^{(1)}(x, \xi')=\operatorname{Re} S_j(x, \xi')$ и, следовательно, $\eta_1(x, \xi)=\xi_1+\sum_{j=1}^{m-1} \operatorname{Re} S_j(x, \xi')$. Остальные функции $\eta_2(x, \xi), \ldots, \eta_n(x, \xi)$ мы найдем индуктивным образом. Итак, предположим, что мы уже построили функции $\eta_1, \ldots, \eta_{k-1}$, $k \leq n$, таким образом, чтобы

$$\{\eta_j, \eta_l\}=0 \text{ в } W_1. \tag{1.7}$$

Мы ищем такую функцию $\eta_k(x, \xi)$, что $\{\eta_s, \eta_k\}=0$, $0 \leq s \leq k$ в W_1, т. е.

$$\begin{aligned} 0&=\Big\{\xi_s+\sum_{i=1}^{m-1} h_j^{(s)}(x, \xi'),\ \xi_k+\sum_{j=1}^{m-1} h_j^{(k)}(x, \xi')\Big\} \\ &=\sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x_s} h_j^{(k)}-\sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial}{\partial x_k} h_j^{(s)}+\sum_{j_1, j_2=1}^{m-1}\{h_{j_1}^{(s)}, h_{j_2}^{(k)}\}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Приравнивая члены в равенстве (1.8), имеющие одинаковые степени однородности, мы заключаем, что

$$\frac{\partial}{\partial x_s} h_j^{(k)}(x, \xi)=f_{j,s}(x, \xi') \quad s=1, \ldots, k-1, \tag{1.9}$$

где функция $f_{j,s}(x, \xi')=\frac{\partial}{\partial x_k} h_j^{(s)}(x, \xi')-\sum_{j_1+j_2=j}\{h_{j_1}^{(s)}, h_{j_2}^{(k)}\}$

однородная степени $1-j/m$ относительно ξ. Пользуясь теоремой Дарбу [13], мы заключаем, что переопределенная система (1.9) относительно функции $h_j^{(k)}$ разрешима тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial}{\partial x_l} f_{j,s}=\frac{\partial}{\partial x_s} f_{j,l} \tag{1.10}$$

в некоторой окрестности точки ϱ_0. Тогда функция $h_j^{(k)}(x, \xi)=\sum_{s=1}^{k-1}\int_0^{x_s} f_{j,s}(0,\ldots, t, x_{s+1},\ldots, x_n, \xi')\,dt$ — однородное решение системы (1.9).

Неизвестные функции $h_j^{(k)}$ определим индуктивным образом относительно j. Если $j=1$, равенства (1.10) переходят в $\partial x_1{}^{(s)}/\partial x_l-\partial x_1{}^{(l)}/\partial x_s=0, 1\leqq s, l\leqq k-1$. Действительно, старший однородный член в выражении $\{\eta_s, \eta_l\}$ в точности равняется $\partial h_1^{(s)}/\partial x_l-\partial h_1^{(l)}/\partial x_s$. Из (1.7) следует, что условия Дарбу выполнены для $j=1$, и мы умеем найти функцию $h_1^{(k)}$. Предположим теперь, что мы построили функции $h_j^{(k)}$, $j<q$. Пользуясь этим фактором, мы найдем функцию $h_q^{(k)}$, $q<m$. Простой выкладкой получаем

$$\frac{\partial f_{q,s}}{\partial x_l}-\frac{\partial f_{q,l}}{\partial x_s}=\frac{\partial^2 h_q^{(s)}}{\partial x_l\,\partial x_k}-\sum_{j_1+j_2=q}\frac{\partial}{\partial x_l}\{h_{j_1}^{(s)}, h_{j_2}^{(k)}\}-\frac{\partial^2 h_q^{(l)}}{\partial x_l\partial x_k}+\sum_{j_1+j_2=q}\frac{\partial}{\partial x_s}\{h_{j_1}^{(l)}, h_{j_2}^{(k)}\}.$$

Пусть $s>l$. Из равенства (1.7) находим

$$\frac{\partial h_q^{(s)}}{\partial x_l}=\frac{\partial h_q^{(l)}}{\partial x_s}-\sum_{j_1+j_2=q}\{h_{j_1}^{(l)}, h_{j_2}^{(s)}\}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial f_{q,s}}{\partial x_s}-\frac{\partial f_{q,l}}{\partial x_s}=-\sum_{j_1+j_2=q}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\{h_{j_1}^{(l)}, h_{j_2}^{(s)}\}+\frac{\partial}{\partial x_l}\{h_{j_1}^{(s)}, h_{j_2}^{(k)}\}-\frac{\partial}{\partial x_s}\{h_{j_1}^{(l)}, h_{j_2}^{(k)}\}\right). \tag{1.11}$$

Заметим, что если $j_1+j_2=q$, то $j_1<q$, $j_2<q$, т. к. $j_1\geqq 1$ и $j_2\geqq 1$. Таким образом мы можем применить равенство (1.9) для $j=j_1$ и $j=j_2$. Отсюда получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\{h_{j_1}^{(s)}, h_{j_2}^{(k)}\}=\left\{\frac{\partial h_{j_1}^{(s)}}{\partial x_l}, h_{j_2}^{(k)}\right\}+\left\{h_{j_1}^{(s)}, \frac{\partial}{\partial x_l}h_{j_2}^{(k)}\right\}, \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\{h_{j_1}^{(l)}, h_{j_2}^{(s)}\}=\left\{\frac{\partial h_{j_1}^{(k)}}{\partial x_l}, h_{j_2}^{(s)}\right\}+\left\{h_{j_1}^{(l)}, \frac{\partial h_{j_2}^{(k)}}{\partial x_s}\right\} \tag{1.13}$$

$$-\sum_{\alpha_1+\alpha_2=j_1}\{\{h_{\alpha_1}^{(k)}, h_{\alpha_2}^{(l)}\}, h_{j_2}^{(s)}\}-\sum_{\alpha_1+\alpha_2=j_2}\{h_{j_2}^{(l)}, \{h_{\alpha_1}^{(k)}, h_{\alpha_2}^{(s)}\}\},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\{h_{j_1}^{(l)}, h_{j_2}^{(k)}\}=\left\{\frac{\partial h_{j_1}^{(s)}}{\partial x_l}, h_{j_2}^{(k)}\right\}+\left\{h_{j_1}^{(l)}, \frac{\partial h_{j_2}^{(k)}}{\partial x_s}\right\}-\sum_{\alpha_1+\alpha_2=i_1}\{\{h_{\alpha_1}^{(s)}, h_{\alpha_2}^{(l)}\}, h_{j_2}^{(k)}\}. \tag{1.14}$$

Подставляя выражения (1.12), (1.14) в (1.11), находим, что

$$\frac{\partial f_{q,s}}{\partial x_l}-\frac{\partial f_{q,l}}{\partial x_s}=-\sum_{\alpha+\beta+\gamma=q}(\{\{h_\alpha^{(k)}, h_\beta^{(l)}\}, h_\gamma^{(s)}\}+\{\{h_\beta^{(l)}, h_\gamma^{(s)}\}, h_\alpha^{(k)}\}+\{\{h_\gamma^{(s)}, h_\alpha^{(k)}\} h_\beta^{(l)}\}=0,$$

в силу тождества Якоби [13]. Следовательно, равенства (1.10) имеют место для всех $1\leqq s, l\leqq k-1$ и $j=q$. Опять применяя теорему Дарбу, мы строим функцию $h_q^{(k)}$. Так как индукция закончена, мы уже нашли требуемую функцию η_k.

Аналогичными рассуждениями можно найти функции $y_j(x, \xi)$ такие, что $\{y_s, y_l\}=0$, $\{\eta_s, y_l\}=\delta_{s,l}$ в некоторой конической окрестности точки ϱ_0. Этим все доказано.

З а м е ч а н и е. Читатель без труда проверит, что для оператора типа (1.4) всегда существует такая каноническая трансформация $\varkappa$ вида (1.6), что $y_1(x, \xi)=x_1+\sum_{j=1}^{m-1}\operatorname{Re} S_j(x', \xi)$.

Осуществляя каноническое преобразование $\varkappa$ оператора P с помощью неоднородных интегральных операторов Фурье [12], мы получаем оператор следующего вида:

$$P = D_1 + i\,\Sigma_{j=k}^{\infty} a_j(x, D'_k), \tag{1.15}$$

где $a_j(x, \xi) = \operatorname{Im} S_j(\varkappa^{-1}(x, \xi))$, $j < m$ в конической окрестности точки ϱ_0. Так как главный символ оператора сохраняется по модулю S_0^1 при однородной канонической трансформации и при трансформации вида (1.6), то условие (B) переходит в

$$|a_j(x, \xi)|^{(m-1)/(m-j)} \leq C\,|a_1(x, \xi)|,\ j < m. \tag{1.16}$$

Мы докажем теорему 1 при помощи микролокальной априорной оценки для оператора вида (1.15). Как известно из [12], $WF_s(u)$ сохраняется при трансформации вида (1.6). Поэтому мы сосредоточим свои усилия на изучении оператора (1.15) в конической окрестности точки $\varrho^0 = (0, 0, \xi'^0)$. Для этой цели мы воспользуемся следующей леммой:

Лемма 3. *Рассмотрим оператор* $P = D_1 + a(x, D)$, *где* $a \in L^{1-1/m}(X)$ — *оператор с правильным носителем. Пусть* Γ — *открытое коническое подмножество* $T^*X \setminus 0$ *с ограниченной базой. Предположим, что существуют константы* M, ν, $C > 0$ *и функция* $\varepsilon(\lambda)_{\lambda\to\infty} \to 0$, *такие, что*

$$\int |\psi|^2 dy \tag{1.17}$$

$$\leq \lambda^{2(\delta-1)} c \int \Big|\sum_{|\alpha+\beta| \leq M} P_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \lambda\xi)\, y^\beta D^\alpha \psi(y) (\alpha!\,\beta!)^{-1} \lambda^{(1-\delta)(|\alpha|-|\beta|)}\Big|^2 dy$$

$$+\,\varepsilon(\lambda) \sum_{|\alpha+\beta| \leq \nu} \lambda^{(1-2\delta)|\alpha|} \int |y^\beta D^\alpha \psi|^2 dy$$

для любой точки $(x, \xi) \in \Gamma$, $|\xi| = 1$. *Кроме того, пусть* $\frac{1}{k+1}(k + 1/m) \leq \delta < \frac{1}{k+2}(k+1+1/m)$. *Тогда имеет место априорная оценка*

$$\|Au\|_s \leq C_{As}\,(\|PAu\|_{s-1+\delta} + \|Au\|_{s'}),\ u \in C_0^\infty(K),\ s' < s, \tag{1.18}$$

для любого оператора $A \in L^0(X)$, $WF(A) \subset \Gamma$ *с компактным носителем.*

Замечание. Для операторов вида $P = x_1 + a(x, D)$, $a \in L^{-1/m}(X)$ имеет место предположение, аналогичное лемме 3.

Из этой леммы немедленно выводится соотношение $\varrho^0 \notin WF(Pu) \Longrightarrow \varrho^0 \notin WF_{s+1-\delta}(u)$ на основании леммы Фридрихса.

Доказательство этой леммы не содержит ничего нового по сравнению с теоремой 1″ из [15]. Поэтому мы не приводим детали, а отсылаем читателя к работе [15].

2. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим операторы $p^0(x, D) + \Sigma_{j=1}^{\infty} S_j^{\nu}(x, D)$, где $1 \leq \nu \leq m$. Из формулы (1.2) видно, что символы $S_1^{(\nu)}(x, \xi) = \varepsilon_\nu S_1^{(1)}(x, \xi)$, где $\varepsilon_\nu^m = 1$ и, кроме того, $S_1^{(1)}(x_0, \xi_0) \neq 0$. Не ограничивая общности, можно предположить, что $\operatorname{Im} S_1^{(i)}(x, \xi) \neq 0$ в подходящей конической окрестности $\Gamma \ni \varrho_0$ для всех $\nu = 1, \gamma \ldots, m-1$ в случае, когда m — нечетное число, и для $\nu = 1, \ldots, m-2$ в случае четного m. Тогда

$$\Big|p^0(x, \xi) + \sum_{j=1}^{m-1} S_j^{(\nu)}(x, \xi)\Big| \geq c\,|\xi|^{1-1/m},\ c > 0,$$

для $(x, \xi) \in \Gamma$ и для всех вышеуказанных значений ν. Как доказано в работе [6], оператор $Q = p(x, D) + \Sigma_{j=1}^{\infty} S_j^{(\nu)}(x, D)$ имеет двусторонний микролокальный параметрикс класса $L^{-l+1/m}_{1-1/m,\,1/m}$ и, следовательно, микролокально гипоэллиптичен: $WF_s(Qu)=WF_{s+1-1/m}(u)$. Следовательно, мы обязаны сосредоточить свое внимание на изучении остальных факторов. Их изучение проводится методами и техникой, разработанными Егоровым в [4]. Поэтому наше доказательство в этом пункте будет более сжато. Детали рассмотрены только в тех случаях, когда возникают более или менее существенные отличия от выкладок Егорова.

Итак, обозначим через $p(x,\xi)$ следующий символ:

$$p(x,\xi)=i\xi_1+\sum_{j=1}^{m-1}a_j(x,\xi')=i\xi_1+q(x,\xi'). \tag{2.1}$$

Из условий теоремы следует, что $a_1(x,\xi')\geq 0$ и функция $a_1(x_1,x_0,\xi_0')$ имеет нуль конечного порядка k в точке $x_1=0$. Последовательно обозначим

$$Q_\lambda(y,\eta)=\lambda^{\delta-1}\sum_{|\alpha+\beta|<k}q^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\lambda\xi)(\alpha!\,\beta!)^{-1}y^\beta\eta^\alpha\lambda^{-(1-\delta)(|\beta|-|\alpha|)}+c\lambda^{\delta-1}, \tag{2.2}$$

$$P_\lambda(y,\eta)=i\eta_1+Q_\lambda(y,\eta), \tag{2.3}$$

$$R_\lambda\psi=\sum_{|\alpha+\beta|\leq N}\|y^\beta D^\alpha\psi\|_0\lambda^{(1-2\delta)|\alpha|}, \tag{2.4}$$

где $c>0$ и $\delta=1-\frac{1}{k+1}\left(1-\frac{1}{m}\right)$.

Сформулируем основное предложение этого параграфа:

Лемма 4. Пусть $\varrho_0\in\Sigma$. *Тогда существует такая коническая окрестность* Γ *точки* ϱ_0, *что для оператора с символом* (2.1), *удовлетворяющего условию* (1.16), *выполнена следующая априорная оценка:*

$$\|\psi\|_0\leq C(\|P_\lambda(y,D)\psi\|_0+\|R_\lambda\psi\|_0\lambda^{-\varepsilon}),\ (x,\xi)\in\Gamma,\ \psi\in C_0^\infty(R_n). \tag{2.5}$$

Утверждение теоремы 1 является очевидным следствием лемм 3 и 4.

Доказательство леммы 3. Рассмотрим квадратическую форму

$$I_{s,t}=\operatorname{Re}\int_{y_1<\tau}\varphi_s(y'\lambda^\varrho)\varphi_t(D'\lambda^{-\varrho})P_\lambda\psi\cdot\overline{\psi_{st}(y)}\,dy, \tag{2.6}$$

где $\psi_{st}(y)=\varphi_s(y'\lambda^\varrho)\varphi_t(D'\lambda^{-\varrho})\psi(y)$, а ϱ — некоторое число из интервала $(0,1)$. В формуле (2.6) функции $\varphi_s(y')$ образуют стандартное разбиение единицы

$$\varphi_j(x')=\theta(x'-g_j)\ \Big[\sum_{l=1}^{\infty}\theta(x'-g_l)^2\Big]^{1/2}.$$

Здесь функция $\theta(x')\in C_0^\infty(R^{n-1})$, $\theta(x')\geq 0$, $\theta(x')=0$, если $|x^j|\geq 3/4$ для какого-нибудь $j=2,\dots,n$, $\theta(x')=1$, если $|x^j|\leq 1/2$ для всех $j=2,\dots,n$ и, наконец, $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ — множество точек с целочисленными координатами в R^{n-1}. Очевидно, $\Sigma_{s,t}|I_{s,t}|\leq c\|\psi\|_0\|P_\lambda\psi\|_0$. В процессе доказательства мы найдем оценку снизу для $I_{s,t}$. Для этой цели образуем сумму

$$I_{s,t}=\operatorname{Re}\int_{y_1<\tau}\partial_{y_1}\psi_{s,t}(y)\overline{\psi_{st}(y)}dy$$

$$+\operatorname{Re}\int_{y_1<\tau}\varphi_s(y'\lambda^\varrho)\varphi_t(D'\lambda^{-\varrho})Q_\lambda\psi\cdot\overline{\psi_{st}(y)}\,dy=\frac{1}{2}\int_{y_1=\tau}|\psi_{st}(y)|^2dy+I'_{s,t}.$$

Таким образом все трудности возникают при оценке снизу для $I'_{s,t}$. В интеграле $I'_{s,t}$ мы переставим $\varphi_s(y'\lambda^\varrho)$ и $\varphi_t(D'\lambda^{-\varrho})$ с оператором Q_λ. Выкладки, близкие к соответствующим вычислениям Егорова из [4], показывают, что

$$I'_{s,t}=\operatorname{Re}\int_{y^1<\tau}\varphi_s(y'\lambda^{\varrho})Q_\lambda(y,D')\varphi_t(D'\lambda^{-\varrho})\psi(y)\overline{\psi_{st}(y)}\,dy$$

(2.7)
$$+\operatorname{Re}\frac{\lambda^{-\varrho}}{i}\int_{y^1<\tau}\sum_{l=2}^{n}\varphi_s(y'\lambda^{\varrho})Q_{\lambda(l)}(y,D')\varphi_t^{(l)}(D'\lambda^{-\varrho})\psi(y)\overline{\psi_{st}(y)}\,dy+a_{st}.$$

где $\Sigma_{s,t}|a_{st}|\leqq c\lambda^{-\varepsilon_1}R_\lambda\psi$. В неравенстве (2.7) ε_1 — любое число из интервала $(0,1/2)$, а $\varrho=3\delta/2-1+\varepsilon_1$. Очевидно, $\varepsilon_1<\varrho<1/2+\varepsilon_1$. Предположим, что $\eta'^t\in\operatorname{supp}\varphi_t(\eta'\lambda^{-\varrho})$ и $y'_s\in\operatorname{supp}\varphi'_s(y'\lambda^{\varrho})$. Мы заморозим оператор Q_λ в точке (y'_s,η'^t), пользуясь обстоятельством, что $|\eta'-\eta'^t|\leqq c\lambda^{\varrho}$ для $\eta'\in\operatorname{supp}\varphi_t(\eta'\lambda^{-\varrho})$ и $|y'-y'_s|\leqq c\lambda^{-\varrho}$ для $y'\in\operatorname{supp}\varphi_s(y'\lambda^{\varrho})$. Пусть $0<\varepsilon_2<1-\delta+1/m$. После некоторых вычислений находим, что

$$I'=\operatorname{Re}\int_{y^1<\tau}\{Q_\lambda(y^1,y'_s,\eta'^t)+\sum_{l=2}^{n}Q_\lambda^{(l)}(y',y'_s,\eta'^t)(D_l-\eta'^t_l)$$

(2.8)
$$+\sum_{l=2}^{n}Q_{\lambda(l)}(y^1,y'_s,\eta'^t)(y^l-y^l_s)\}\,|\psi_{st}(y)|^2\,dy$$

$$+\operatorname{Re}\frac{\lambda^{-\varrho}}{i}\sum_{l=2}^{n}\int_{y^1<\tau}Q_{\lambda(l)}(y^1,y'_s,\eta'^t)\varphi_s(y'\lambda^{\varrho})\varphi_t^{(l)}(D'\lambda^{-\varrho})\psi(y)\overline{\psi_{st}(y)}\,dy$$

$$+\operatorname{Re}\frac{\lambda^{\varrho}}{i}\sum_{l=2}^{n}\int_{y^1<\tau}Q_\lambda^{(l)}(y^1,y'_s,\eta'^t)\varphi_{s(l)}(y'\lambda^{\varrho})\varphi_t(D'\lambda^{-\varrho})\psi(y)\overline{\psi_{st}(y)}\,dy+a_{st}.$$

Мы оценим снизу все интегралы из (2.8). Для этой цели воспользуемся следующими неравенствами:

(2.9) $\lambda^{2-3\delta+1/m}|\operatorname{grad}_y Q_\lambda(y,\eta)|^2\leqq CQ_\lambda(y,\eta)+\lambda^{\delta+1/m}O(|y\lambda^{-1+\delta}|^{k+1}+|\eta\lambda^{-\delta}|^{k+1})$,

(2.10) $\lambda^{\delta+1/m}|\operatorname{grad}_\xi Q_\lambda(y,\eta)|^2\leqq CQ_\lambda(y,\eta)+\lambda^{\delta+1/m}O(|y\lambda^{-1+\delta}|^{k+1}+|\eta\lambda^{-\delta}|^{k+1})$.

Действительно,

$$Q_\lambda(y,\eta)=\lambda^{-1+\delta}q(x+y\lambda^{-1+\delta},\lambda(\xi+\eta\lambda^{-\delta}))+c\lambda^{-1+\delta}$$
$$+\lambda^{\delta-1/m}O(|y\lambda^{-1+\delta}|^{k+1}+|\eta\lambda^{-\delta}|^{k+1}).$$

Напомним, что $q(x,\xi)=\Sigma_{j=1}^{m-1}a_j(x,\xi')$. Пользуясь неравенством Гельдера и условием (1.16), находим, что

$$|q(x+y\lambda^{-1+\delta},\lambda(\xi+\eta\lambda^{-\delta}))|\leqq\varepsilon|a_j(x+y\lambda^{-1+\delta},\lambda(\xi+\eta\lambda^{-\delta}))|^{(m-1)/(m-j)}+c^j_\varepsilon$$
$$\leqq\varepsilon a_1(x+y\lambda^{-1+\delta},\lambda(\xi+\eta\lambda^{-\delta}))+c^j_\varepsilon.$$

Следовательно,

$$q(x+y\lambda^{-1+\delta},\lambda(\xi+\eta\lambda^{-\delta}))\geqq\frac{1}{2}a_1(x+y\lambda^{-1+\delta},\lambda(\xi+\eta\lambda^{-\delta}))-c_\varepsilon.$$

Поскольку мы располагаем с выбором c в (2.2), то пусть $c>c_\varepsilon$. Тогда

(2.11)
$$Q_\lambda(y,\eta)\geqq\frac{1}{2}\lambda^{-1+\delta}a_1(x+y\lambda^{-1+\delta},\lambda(\xi+\eta\lambda^{-\delta}))$$
$$-\lambda^{\delta-1/m}O(|y\lambda^{-1+\delta}|^{k+1}+|\eta\lambda^{-\delta}|^{k+1}).$$

Хорошо известное неравенство для градиента неотрицательной функции показывает, что

$$\left|\frac{\partial Q_\lambda}{\partial y_j}\right|^2 \leq \lambda^{-4+4\delta}\left|\frac{\partial q}{\partial x_j}\right|^2 + \lambda^{-2+4\delta}O(|y\lambda^{-1+\delta}|^{k+1}+|\eta\lambda^{-\delta}|^{k+1})$$
$$\leq \lambda^{-2+3\delta-1/m}Q_\lambda(y,\eta)+\lambda^{-2+4\delta}O(|y\lambda^{-1+\delta}|^{k+1}+|\eta\lambda^{-\delta}|^{k+1}).$$

Аналогично выводится и оценка (2.10).

Как следствие из неравенств (2.10) и (2.11) получаем, что

$$I'_{s,t}\geq 1/2\int_{y^1<\tau} Q_\lambda(y^1,y'_s,\eta'^t)\,|\psi_{st}|^2dy+a_{s,t},$$

где $\Sigma_{s,t}|a_{s,t}|\leq\lambda^{-\varepsilon_3}R_\lambda\psi$. Из (2.11) немедленно следует, что для выполнения неравенства (2.5) существенный вклад дают только те точки, для которых

$$|y'|+|\eta'|\lambda^{1-2\delta}<\lambda^{\varepsilon_3},\ \varepsilon_3>0 \tag{2.12}$$

(т. к. в противном случае имеет место оценка $\|\psi\|\leq c\lambda^{-\varepsilon}\|R_\lambda\psi\|$). В тех точках (y,η'), в которых выполнено неравенство (2.12), из (2.11) получаем

$$Q_\lambda(y,\eta')\geq 1/2a_1(x+\lambda^{-1+\delta}y,\lambda(\xi+\eta\lambda^{-\delta}))-c\lambda^{\varepsilon_4},$$

где $0<\varepsilon_3<(1-\delta)/(k+1)$ и $\varepsilon_4=\varepsilon_3(k+1)+\delta-1<0$. Напомним, что

$$a_1(x+\lambda^{-1+\delta}y,\lambda(\xi+\lambda^{-\delta}\eta))=S_1(\varkappa^{-1}(x+\lambda^{-1+\delta}y,\lambda(\xi+\lambda^{-\delta}\eta)).$$

Заметим, что в силу леммы 2 обратное преобразование $\varkappa^{-1}$ допускает представление $\varkappa^{-1}(x,\xi)=(x,\xi)+(\varkappa_1(x,\xi),\varkappa_2(x,\xi))$, где $\varkappa_1,\varkappa_2$ — векторнозначные символы порядка $-1/m$, $1-1/m$ соответственно. Следовательно, раскладывая по формуле Тейлора, получаем

$$a_1(x,\xi)=S_1(x,\xi)+R(x,\xi),\ R\in S^{1-1/m}(X)\ \text{и}$$

$$a_1(x+\lambda^{-1+\delta}y,(\xi+\lambda\eta^{-\delta})\lambda)=\lambda^{1-1/m}\sum_{|\alpha+\beta|\leq k}S_{1(\beta)}^{(\alpha)}(x,\lambda\xi)\,y^\beta\eta'^\alpha\frac{1}{\alpha!\,\beta!}\lambda^{-(1-\delta)|\beta|-|\alpha|\delta}$$
$$+\sum_{|\alpha+\beta|\leq k-1}R_{(\beta)}^{(\alpha)}(x,\lambda\xi)\,y^{(\beta)}(\eta)'^{t(\alpha)}\frac{1}{\alpha!\,\beta!}\lambda^{-(1-\delta)(|\beta|-|\alpha|)}$$
$$+\lambda^{1-1/m}O(|y\lambda^{-1+\delta}|^{k+1}+|\eta\lambda^{-\delta}|^{k+1})+\lambda^{1-2/m}O(|y\lambda^{-1+\delta}|^k+|\eta\lambda^{-\delta}|^k).$$

Заметим, что если (2.12), то выполняются оценки

$$\lambda^{\delta-1/m}O(|y\lambda^{-1+\delta}|^{k+1}+|\eta\lambda^{-\delta}|^{k+1})\leq c\lambda^{\varepsilon_5}, \tag{2.13}$$
$$\lambda^{\delta-2/m}O(|y\lambda^{-1+\delta}|^k+|\eta\lambda^{-\delta}|^k)\leq c\lambda^{\varepsilon_6}. \tag{2.14}$$

В неравенствах (2.13) и (2.14) $\varepsilon_5=\varepsilon_4<0$, $\varepsilon_6=-1/m+k\varepsilon_3$ и предположено $0<\varepsilon_3<1/mk$. Условие $0<\varepsilon_3<1/mk$ показывает, что $\varepsilon_6<0$.

Обозначим через $\widetilde{Q}_\lambda$ следующую функцию:

$$\widetilde{Q}_\lambda(y,\eta)=\lambda^\delta\sum_{|\alpha+\beta|\leq k}S_{1(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)\,y^\beta(\eta')^\alpha\frac{1}{\alpha!\,\beta!}\lambda^{-(1-\delta)|\beta|-\delta|\alpha|} \tag{2.15}$$
$$+\lambda^{-1+\delta}\sum_{|\alpha+\beta|\leq k-1}R_{(\beta)}^{(\alpha)}(x,\lambda\xi)\,y^\beta(\eta')^\alpha\frac{1}{\alpha!\,\beta!}\lambda^{-(1-\delta)(|\beta|-|\alpha|)}+c\lambda^{\varepsilon_7}.$$

Выбирая подходящим образом $\varepsilon_7<0$ и C в (2.15), получаем

$$\widetilde{Q}_\lambda(y^1,y',\eta)\geq 0,$$
$$I_{st}^2\geq C\int\widetilde{Q}_\lambda(y^1,y'_s,\eta'^t)\,|\psi_{st}(y)|^2dy+a_{st}.$$

Следовательно, выполнено неравенство

$$\sum_{s,t} \max_{\tau} \int_{y^1=\tau} |\psi_{st}(y)|^2 dy' + \sum_{s,t} \int_{y^1<\tau} \widetilde{Q}_\lambda(y^1, y'_s, \eta'^t) |\psi_{st}|^2 dy \leq C \|f\| \|\psi\| + c\lambda^{-s} R_\lambda.$$

Кроме того,

$$\left(\frac{d}{dy_1}\right)^k \widetilde{Q}_\lambda(y^1, y', \eta') = \left(\frac{d}{dx_1}\right)^k S_1(x, \xi').$$

Доказательство леммы 4 заканчивается при помощи леммы 3.3 из [4].

В конце этого параграфа мы покажем, что доказательство теоремы 1 в случае, когда $\operatorname{grad}_x p(\varrho^0) \neq 0$, сводится к только что рассмотренному случаю $\operatorname{grad}_\xi p(\varrho^0) \neq 0$. Действительно, как показано в пункте § 1, мы обязаны изучить микролокальную форму

$$x_1 + \sum_{j=1}^{m-1} a_j(x', \xi) \equiv x_1 + q(x', \xi), \ \operatorname{ord}_\xi a_j = -j/m. \tag{2.16}$$

Наша цель доказать, что существует коническая окрестность $\Gamma \ni \varrho^0$, такая, что для оператора с символом (2.16) выполнена следующая априорная оценка:

$$\begin{aligned} \|\psi\|_0 \leq C_{\lambda^\delta}(\| y^1 \psi_\lambda^{-1+\delta} + \sum_{|\alpha+\beta|\leq k} q^{(\alpha)}_{(\beta)}(x', \lambda\xi) \frac{1}{\alpha!\beta!} y'^\beta D^\alpha_y \psi \lambda^{(1-\delta)(|\alpha|-|\beta|)} \frac{1}{\alpha!\beta!} \|_0) \\ + \varepsilon(\lambda) \sum_{|\alpha+\beta|\leq N} \lambda^{|\alpha|(1-2\delta)} \| y'^\beta D^\alpha_y \psi \|_0, \ \varepsilon(\lambda) \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

В неравенстве (2.17) сделаем подстановку $\psi(y) = \int \psi_1(\eta_1, y_2, \ldots, y_n) e^{iy_1\eta_1} d\eta_1$. Таким образом (2.17) эквивалентно следующей оценке:

$$\begin{aligned} \|\psi_1\|_0 \leq C\lambda^{\delta-1} \| -D_1\psi_1\lambda^\delta + \sum_{|\alpha+\beta|\leq k} q^{(\alpha)}_{(\beta)}(x, \lambda\xi) y'^\beta y^{1\alpha_1} D^{\alpha'}_{y'} \psi_1 \lambda^{1+(|\alpha|-|\beta|)(1-\delta)}/\alpha!\beta! \|_0 \\ + \varepsilon(\lambda) \sum_{|\alpha+\beta|\leq N} \lambda^{|\alpha|(1-2\delta)} \| y'^\beta y'^{\alpha_1} D^{\alpha'}_{y'} \psi_1 \|_0, \ \psi_1 \in C_0^\infty(R^n). \end{aligned}$$

В последнем неравенстве подставим $\psi_1(y) \to \psi_1(y_1, \lambda^{1-2\delta}, y')$. Таким образом получаем

$$\begin{aligned} \|\psi_1\|_0 \leq C\lambda^{\delta-1} \| -D_1\psi\lambda^{1-\delta} + \sum_{|\alpha+\beta|\leq k} \lambda q^{(\alpha)}_{(\beta)}(x', \lambda\xi) y'^\beta \lambda^{\alpha_1(2\delta-1)} D^{\alpha'}_{y'} \psi_1 \frac{1}{\alpha!\beta!} \lambda^{(1-\delta)(|\alpha|-|\beta|)} \|_0 \\ + \varepsilon(\lambda) \sum_{|\alpha+\beta|\leq N} \lambda^{(1-2\delta)|\alpha'|} \| y'^\beta y^{1\alpha_1} D^{\alpha'}_{y'} \psi_1 \|, \end{aligned}$$

т. е. в точности неравенство (2.5). Этим образом теорема 1 доказана полностью.

3. Необходимые условия для локальной разрешимости. Сперва мы докажем теорему 3. Для этой цели напомним необходимое условие Хёрмандера для локальной разрешимости линейного дифференциального оператора P. Итак, если оператор P разрешим в классе $D'(X)$, то существует окрестность $\omega \ni 0$, натуральное число $M>0$ и константа $C>0$ такие, что для любой пары функции $f, v \in C_0^\infty(\omega)$ выполнено неравенство

$$\left| \int f v dx \right| \leq C \sum_{|\alpha|\leq M} sup |D^\alpha f(x)| \sum_{|\alpha|\leq M} sup D^\alpha(P^* v)|. \tag{3.1}$$

Теорему 3 докажем, показывая, что для любой окрестности $\omega \ni 0$ и для любых $M \in Z_+$, $C>0$ существуют функции $f, v \in C_0^\infty(\omega)$, для которых неравенство (3.1) заведомо нарушается. Мы хотим обратить внимание на то, что условие (B') теоремы 3 не выполнено только вдоль одной бихарактеристики $\gamma(t)$. Наша основная цель — построить гладкое приближенное решение u_N уравнения $P^*u=0$. Лемма 1 и равенство $I^{P^*}(z)=\overline{I^P}(z)$ показывают, что можно найти такие псевдодифференциальные операторы $P^{(\nu)}(x, D)=p(x, D)+\Sigma_{j=1}^{\infty} S_j^{(\nu)}(x, D)$, $S_j^{(\nu)}\in L^{1-j/m}$, что

$$\varrho^0 \notin WF(P-P_3P_2P_1) \tag{3.2}$$

и выполнены равенства (1.2) и (1.2′). Не ограничивая общности, будем предполагать, что $p(x, D)=D_t$. Легко заметить, что

$$\mu_1^{(\nu)}(\varrho)=\varepsilon_\nu\sqrt[3]{p_2'(\varrho)},\ \mu_2^{(1)}(\varrho)=Np_2'(\varrho)(\sqrt[3]{p_2'(\varrho)})^{-1},\ \varrho\in\Sigma_0,$$

где $\varepsilon_\nu^3=1$, $\nu=1, 2, 3$ и $\sqrt[3]{p_{m-1}'(\varrho)}$ — гладкий кубический корень функции $p_2'(\varrho)$ в окрестности ϱ^0, для которого $\operatorname{Im}\sqrt[3]{p_2'(\varrho^0)}=0$. Тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\mu_1^{(1)}(\varrho)&=1/3\,|\operatorname{Re}p_2'\varrho)|^{-2/3}\operatorname{Im}p_2'(\varrho)+O(|\operatorname{Im}p_2'(\varrho)|^2),\\ \operatorname{Im}\mu_2^{(1)}(\varrho)&=\frac{\operatorname{Im}Np_2'(\varrho)\ (\operatorname{Re}\ p_2'(\varrho))^{-2/3}}{|p_2'(\varrho)|^{2/3}}+O(|\operatorname{Im}p_2'(\varrho)|^2).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Условия теоремы 3 показывают, что

$$\begin{aligned}&\operatorname{Im}\ S_1^{(1)}(t, 0, \xi^0)=-t^ka_0+O(t^{k+1}),\\ &\operatorname{Im}\ S_2^{(1)}(t, 0, \xi^0)=t^lb_0+O(t^{l+1}),\ l<k/2.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Так как k четное, то $l<k/2 \to l<(k-1)/2$. Поскольку P — дифференциальный оператор, то мы располагаем с выбором знаков a_0 и b_0. Предположим, что $a_0>0$ и $b_0>0$, и обозначим $p=k/2$. Тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}S_1^{(1)}(t, x, \xi^0)&=\operatorname{Im}S_1^{(1)}(t, 0, \xi^0)+\Sigma_{j=2}^n\sum_{s=0}^{p}x_jt^s\operatorname{Im}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^sS_1^{(1)}(0, 0, \xi^0)\\ &\quad+\Sigma_{j=2}^n x_jt^pq_j(t, x)+\sum_{|\alpha|=2}x^\alpha q_\alpha(t, x)\\ &=-t^ka_0+\sum_{j=2}^n\sum_{s=0}^{p-1}x_jt^sa_{j,s}+O(|x|t^p)+O(|x|^2).\end{aligned}$$

Мы докажем, что $a_{j,s}=0$ для $j=2,\ldots, n$ и $s=0,\ldots, p-1$. Допустим противное, т. е. $a_{j,s}\neq0$ для некоторых j и s. Не ограничивая общности, имеем, что $a_{j,s'}=0$ для $s'<s$. Теперь рассмотрим гладкую вещественную функцию $r(t, x_j)=\operatorname{Im}S_1^{(1)}(t, 0,\ldots, 0, x_j, 0\ldots, \xi^0)$. Условие теоремы 3 учит нас, что $r(t, x_j)\leq0$ в некоторой окрестности точки $(0, 0)$. Мы установим, что предположение $a_{j,s}\neq0$ приводит к противоречию с неравенством $r(t, x_j)\leq0$. Итак, мы ищем локальный экстремум функции $r(t, x_j)$, т. е. $\frac{\partial r}{\partial t}=0$. Нетрудно заметить, что точка $t_x=\left(\frac{e}{k}\frac{a_{js}}{a_0}x_j\right)^{1/(k-l)}+O(|x_j|^{1/(k-l)+\varepsilon})$, $\varepsilon>0$, $x_ja_{j,l}>0$, является решением уравнения $\partial r/\partial t=0$. Подставляя значение t_x в $r(t, x)$, мы видим, что

$$r(t_x, x_j)=|a_{j,s}|\left|\frac{e}{k}\frac{a_{j,s}}{a_0}\right|^{l/k-l}\frac{k-l}{k}|x_j|^{k/(k-l)}+O(|x_j|^{k/(k-l)+\varepsilon}).$$

Очевидно, $r(t_x, x_j)>0$ для всех достаточно малых x_j, $x_j\, a_{j,l}>0$ и, кроме того, $t_x \to 0$, если $x_j \to 0$. Следовательно, в некоторой окрестности точки $(0, 0)$ все константы $a_{j,s}=0$. Итак,

$$\mathrm{Im}\, S_1^{(1)}(t, x, \xi^0) = -a_0 t^k + O(|x|t^p) + O(|x|^2). \tag{3.5}$$

Асимптотическое решение уравнения $P^*u=0$ мы ищем в следующем виде: $u_N = e^{i\varrho\Phi} \sum_{j=0}^N \varrho^{-j/3} u_j(t, x)$, где $\Phi(t, x) = <x, \xi_0> + \varrho^{-1/3}\Phi_1(t, x) + \varrho^{-2/3}\Phi_2(t, x)$. Если потребуем $P^{(1)}u_N = O(\varrho^{-N/3})$, то тогда $P^*u_N = O(\varrho^{-N/3+2})$. Как показано в [8], функции Φ_j удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} = -S_1^{(1)}(t, x, \xi^0),$$
$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial t} = -S_2^{(1)}(t, x, \xi^0) - \sum_{j=2}^n \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial S_1^{(1)}}{\partial\xi_j}(t, x, \xi^0). \tag{3.6}$$

Пусть $\Phi_1(0, x) = i|x|^2$, $\Phi_2(0, x)=0$. Из (3.6) имеем, что

$$\Phi_1(t, x) = -\int_0^t S_1^{(1)}(\tau, x, \xi^0)d\tau + i|x|^2,\quad \Phi_2(t, x) = -\int_0^t S_2^{(1)}(\tau, x, \xi^0)d\tau$$
$$-\sum_{j=2}^n \int_0^t \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_j}\,\frac{\partial S_1^{(1)}}{\partial\xi_j}\,d\tau.$$

Простые выкладки и (3.4), (3.5) показывают, что

$$\mathrm{Im}\,\Phi_1(t, x) = a_0\frac{t^{k+1}}{k+1} + |x|^2 + O(t^{p+1}|x|) + O(t|x|^2) + O(t^{k+2}),$$
$$\mathrm{Im}\,\Phi_2(t, x) = -b_0\frac{t^{l+1}}{l+1} + O(t^{l+2}) + O(|x|t).$$

Обозначим теперь $h(t, \varrho) = \frac{t^{k+1}}{k+1}a_0\varrho^{2/3} - \frac{t^{l+1}}{l+1}b_0\varrho^{1/3}$. Тогда

$$\varrho\,\mathrm{Im}\,\Phi(t, x) = h(t, \varrho) + |x|^2\varrho^{2/3} + [O(t^{k+1}) + O(t^{p+1}|x|) + O(t|x|^2)]\varrho^{2/3}$$
$$+[O(t^{l+2}) + O(|x|t)]\varrho^{1/3}. \tag{3.7}$$

Мы докажем, что функция $\mathrm{Im}\,\Phi(t, x)$ имеет локальный минимум в любой окрестности нуля (при ϱ фиксированном). Для этой цели найдем стационарные точки функции $\mathrm{Im}\,\Phi(t, x)$. Итак,

$$\partial_t\,\mathrm{Im}\,\Phi = [(t^k a_0 - t^l b_0\varrho^{-1/3}) + O(t^{k+1}) + O(|x^2|) + O(t^p|x|]\varrho^{-1/3}$$
$$+[O(t^{l+1}) + O(|x|)]\varrho^{-2/3},$$
$$\partial_{x_j}\mathrm{Im}\,\Phi = [2x_j + O(t^{k+2}) + O(t^{p+1}) + O(t|x|)]\varrho^{-1/3} + O(t)\varrho^{-2/3}.$$

Из уравнения $\partial_{x_j}\mathrm{Im}\,\Phi = 0$ получаем $x_j = O(t^{p+1}) + O(t)\varrho^{-1/3}$. Подставляя последний результат в $\partial_t\,\mathrm{Im}\,\Phi=0$, находим

$$t_\varrho = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^{1/(k-l)}\varrho^{-1/(k-l)3} + O(\varrho^{-2/(k-l)3}),$$
$$x_\varrho = O(\varrho^{-(p+1)/(3k-l)}).$$

Легко сообразить, что

$$\varrho\,\mathrm{Im}\,\Phi(t_\varrho, x_\varrho) = -\left(\frac{b_0}{a_0}\right)^{(l+1)/(k-l)}\frac{k-l}{(k+1)(l+1)}\,b_0\varrho^{(k-2l-1)/3(k-l)}(1 + O(\varrho^{-1/(3(k-l)}))),$$

где $k-2l-1>0$, т. к. $l<(k-1)/2$. Из-за геометрических соображений (или вычислением гесиана) ясно, что $\operatorname{Im}\Phi$ имеет в точке (t_ϱ, x_ϱ) локальный минимум. Положим $g(t, x)=g_0(\varrho^\varepsilon t)g_1(x)$, где $\varepsilon=1/3(k-l))$ и $V_\varrho=gU_N$; g_0, g_1 — финитные функции, носители которых определим позже. Тогда

$$P^*V_\varrho(t, x)=gP^*(U_N)+\mathscr{L}_g(U_N)=ge^{i\varrho\Phi}\varrho^{-N/3+2}R_N(t, x)+\mathscr{L}_g(U_N).$$

В последнем равенстве $\mathscr{L}_g=[P^*, g(t, x)]$. Мы предположим, что $\operatorname{supp} g_0 \subset[1/2, 1/3]$, откуда следует, что $\operatorname{supp}_t g\subset[\varrho^{-\varepsilon}/2, 3\varrho^{-\varepsilon}/2]$. Кроме того, пусть $g_0=1$ в интервале $[1/2+\eta, 3/2-\eta]$. Тогда $\partial g/\partial t\neq 0 \Longrightarrow t\in[(1/2+\eta)\varrho^{-\varepsilon}, (3/2+\eta)\varrho^{-\varepsilon}]$. Функцию $g_1\in C_0^\infty(R^{n-1})$ выбираем таким образом, чтобы $g_1=1$ для $|x|<\delta$, откуда следует, что если $\operatorname{grad}_{t,x} g\neq 0$, то либо $t\notin[(1/2+\eta)\varrho^{-\varepsilon}, (3/2-\eta)\varrho^{-\varepsilon}]$, либо $|x|>\delta$. Из тождества (3.7) заключаем, что $\varrho\operatorname{Im}\Phi\geq\varrho^{2/3}(\delta^2+O(t))$ для любой точки $(x, t)\in\operatorname{supp}(\operatorname{grad}_x g)$. Таким образом $\varrho\operatorname{Im}\Phi\geqq C_1\varrho^{2/3}$ для $(t, x)\in \operatorname{supp}(\operatorname{grad}_x g)$, $\varrho\geqq c_2$. В случае, когда $(t, x)\in\operatorname{supp}\partial g/\partial t$, выполнено неравенство

$$\varrho\operatorname{Im}\Phi\geqq c_3\varrho^{(k-2l-1)/(3(k-l))}.$$

Теперь доказываем оценки

$$|D^\alpha(ge^{i\varrho\Phi}R(t, x, \varrho)\varrho^{-N/3+2}|\leqq c_4e^{-\operatorname{Im}\Phi}\varrho^{-N/3+|\alpha|+2}$$
$$\leqq C_4\varrho^{-N/3+|\alpha|+2}e^{-h(t_\varrho,\varrho)}\leqq c_4\varrho^{-N/3+|\alpha|+2}\exp(c_0\varrho^{(k-2l-1)/(3(k-l))}),$$

где $c_0=b_0(b_0/a_0)^{(l+1)/k-l)}(k-l)/(k+1)(l+1)$ и

$$|D^\alpha\mathscr{L}(U)\leqq\varrho^{|\alpha|+2}\exp(-C_3\varrho^{(k-2l-1)/(3(k-l))})\exp c_0\varrho^{(k-2l-1)/(3(k-l))}),$$

поскольку $\operatorname{supp}\mathscr{L}_g\subset\operatorname{supp}(\operatorname{grad}_{t,x} g)$. Итак,

$$\sum_{|\alpha|\leqq M}|D^\alpha P^*V_\varrho|\leqq C\varrho^{-N/3+M+2}.\exp(C_0\varrho^{(k-2l-1)/(3(k-l))}).$$

Пусть $F\in C_0^\infty(R^n)$, $F(t, x)\geqq 0$, $\iint F(t, x)dt\,dx=1$. Обозначим $f_\varrho(t, x)=F(\varrho(t-t_\varrho)\varrho x)\overline{e^{i\varrho\Phi}}$. Без труда видно, что

$$|\iint f_\varrho v_\varrho dt\,dx|_{\varrho\to\infty}\geqq C\varrho^{-n}\exp(2C_0\varrho^{(k-2l-1)/(3(k-l))}).$$

Таким образом пара (f_ϱ, v_ϱ) нарушает неравенство Хёрмандера при $\varrho\to\infty$, поскольку

$$\sup\sum_{|\alpha|\leqq M}|D^\alpha P^*V_\varrho|\sup\sum_{|\alpha|\leqq M}D^\alpha|f_\varrho|\leqq c\varrho^{-N/3+2M+2}\exp(2c_0\varrho^{(k-2l-1)/(3(k-l))}).$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4, случай $k-l\leqq 2l$, доказывается стандартно, пользуясь решением

$$U_N=\exp(i\varrho\langle x, \xi\rangle+i\varrho^{2/3}\Phi_1+i\varrho^{1/3}\Phi_2)\sum_{j=0}^N\Phi(t, x)\varrho^{-j/3}.$$

Случай $k-l>2l$ доказывается в точности, как теорема 3.

4. Некоторые дополнения и замечания. Как читатель уже заметил, пока мы ограничились доказательством микролокальных субэллиптических оценок и локальной неразрешимости изучаемого класса операторов. Мы решили изложить соответствующие результаты о распространении особенностей и гипоэллиптичности в случае бесконечного касания ($k=\infty$) в другой работе. Основные причины две: во-первых — недостаток места, и во-вторых — обстоятельство, что применяемые методы весьма существенно отличаются друг от друга. В дальнейшем, как нам кажется, возникает вопрос о том, является ли потеря гладкости $2-(m+k)/m(k+1)$ из теоремы 1 точной. Другими словами, нельзя ли ее улучшить. В общем случае нам неизвестен ответ на этот вопрос. В специальной ситуации, когда множество $\Lambda=\{x, \xi)\in\Sigma;\ \operatorname{Im} p'_{m-1}(x, \xi)=0\}$ — гладкое подмногообразие, трансверсальное к бихарактеристике $\gamma(t)$ в точке ϱ^0, и функция $\operatorname{Im} p'_{m-1}$ имеет нуль порядка k на Λ, ответ положителен. Следовательно, нам удалось получить окончательные результаты только в предположении, что $\operatorname{Im} p'_{m-1}$ имеет нуль конечного порядка вдоль некоторого гладкого многообразия Λ.

Все вопросы, которые мы только что затронули, разработаны Г. Поповым и будут опубликованы с подробными доказательствами во второй части этой статьи. Она уже готова к печати.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Cardoso - F. Treves. A necessary condition of local solvability for pseudo-differential equations with double characteristics. *Ann. Inst. Fourier*, **24**, 1974, 225—292.
2. J. Duistermaat, L. Hörmander. Fourier integral operators, II. *Acta Math.*, **128**, 1972, 183—269.
3. Ю. В. Егоров. Канонические преобразования и псевдодифференциальные уравнения. *Труды Моск. мат. об-ва*, **24**, 1971, 3—28.
4. Ю. В. Егоров. Субэллиптические операторы. *Успехи мат. наук*, **30**, 1975, № 2, 57—114.
5. L. Hörmander. Linear partial differential operators. Berlin, 1963.
6. L. Hörmander. Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations. *A. M. S. Proc. Symp. Pure Math.*, **10**, 1967, 138—183
7. L. Hörmander. Fourier integral operators, I. *Acta Math.*, **127**, 1971, 79—183.
8. V. Petkov. Propagation of singularities for pseudo-differential operators. Berlin, 1977.
9. П. Попиванов. Субэллиптические оценки для псевдодифференциальных операторов с двукратными характеристиками. *Сердика*, **1**, 1975, 356—372.
10. П. Попиванов, Г. Попов. Микролокальные свойства одного класса псевдодифференциальных уравнений неглавного типа. *Доклады БАН*, **31**, 1978, 1531—1535.
11. G. Popov. Hypoelliptic operators with multiple characteristics. *Math. Nachr.* (to appear).
12. В. Н. Туловский. Распространение особенностей операторов с характеристиками постоянной кратности. *Труды Моск. мат. об-ва*, **39**, 1979, 113—134.
13. С. Стернберг. Лекции по дифференциальной геометрии. Москва, 1970.
14. A. Menicoff. On hypoelliptic operators with double characteristics. *Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat.*, **4**, 1977, 698—724.
15. Ю. В. Егоров. Псевдодифференциальные операторы главного типа. *Мат. сб.*, **73**, 1967, 356—374.

Единый центр математики и механики
1090 София п. я. 373

Поступила 19. 2. 1979