Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ПРОЕКТИВНЫЕ ОБЪЕКТЫ В КАТЕГОРИИ p-КОЛЕЦ

ПЕТКО РАДНЕВ

Ассоциативное кольцо R с единицей называется p-кольцом, если существует такое простое число p, что $a^p=a$ и $pa=0$ для любого элемента a из кольца R. Известно, что отношение $\leq$, где $a\leq b$ тогда и только тогда, когда $ab=a^2$, является частичным порядком на носителе p-кольца. Доказывается, что p-кольцо R проективно тогда и только тогда, когда для любого $a\in R$ существуют два конечные подмножества $S(a)\subseteq\{c\in R \mid c\geq a\}$ и $T(a)\subseteq\{c\in R \mid c\leq a\}$ такие, что если $a\leq b$, то $S(a)\cap T(b)\neq\varnothing$.

Пусть R — ассоциативное и коммутативное полупервичное кольцо. Абиан [1] доказал, что отношение $\leq$, где $a\leq b$ тогда и только тогда, когда $ab=a^2$, является частичным порядком на множестве R. Полученное таким способом частично упорядоченное множество будем обозначать через $R(\leq)$.

Ассоциативное кольцо R с единицей называется p-кольцом, если существует такое простое число p, что $a^p=a$ и $pa=0$ для любого элемента a из кольца R. Если $p=2$, то R оказывается булевым кольцом. Так как по известной теореме Джекобсона (см., например [2, стр. 74, теорема 3.1.2],) p-кольцо коммутативно и, очевидно, полупервично, то на носителе p-кольца можно задать частичный порядок.

Хейнс [3] описывает инъективные объекты в категории p-колец в терминах частичного порядка $\leq_1$, где $a\leq_1 b$ тогда и только тогда, когда $a^{p-1}b=a$. В [4] приводятся две характеризации инъективных объектов в категории p-колец. Одна из них — в терминах частичного порядка, введенного Абианом, а другая — в кольцевых терминах. В настоящей заметке описываются проективные p-кольца в терминах частичного порядка Абиана. Точнее, имеет место

Теорема. *p-кольцо R проективно в категории p-колец тогда и только тогда, когда для любого $a\in R$ существуют два конечные подмножества $S(a)\subseteq\{c\in R \mid c\geq a\}$ и $T(a)\subseteq\{c\in R \mid c\leq a\}$ такие, что если $a\leq b$, то $S(a)\cap T(b)\neq\varnothing$.*

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, приведем некоторые факты о p-кольцах. Пусть R — p-кольцо. Каждый элемент $a\in R$ записывается единственным образом в виде

$$(1)\qquad a=a_1+2a_2+\dots+(p-1)a_{p-1},$$

где a_i $(i=1, 2,\dots, p-1)$ — попарно ортогональные идемпотенты [5], [6]. Запись (1) элемента a будем называть канонической, а элемент a_i — i-й

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 6, 1980, с. 184—186.

компонентой элемента a. Если K — ассоциативное кольцо, то множество $B(K)$ всех его центральных идемпотентов относительно умножения в K и сложения $a \oplus b = a + b - 2ab$ является булевым кольцом (см., например, [7, стр. 45, предложение 11]). Известно, что $B(K)(\leq)$ является булевой алгеброй [7, стр. 45]. Для булева кольца идемпотентов p-кольца R имеем

$$B(R) = \{a \in R \mid a_2 = \ldots = a_{p-1} = 0\}. \tag{2}$$

Лемма 1 [4]. *Пусть R — p-кольцо и $a = a_1 + 2a_2 + \ldots + (p-1)a_{p-1}$, $b = b_2 + 2b_2 + \ldots + (p-1)a_{p-1}$ — канонические записи элементов a, $b \in R$. В таком случае $a \leq b$ тогда и только тогда, когда $a_i \leq b_i$ для каждого $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$.*

Лемма 2 [8]. *Категория p-колец эквивалентна категории булевых колец (булевых алгебр), при этом функтор, осуществляющий эту эквивалентность, ставит в соответствие p-кольца R булево кольцо $B(R)$ (булева алгебра $B(R)(\leq)$).*

Лемма 3 (см., например, [9]). *Булева алгебра B проективна в категории булевых алгебр тогда и только тогда, когда для любого $a \in B$ существуют два конечные подмножества $S(a) \subseteq \{c \in B \mid c \geqq a\}$ и $T(a) \subseteq \{c \in B \mid c \leq a\}$ такие, что если $a \leq b$, то $S(a) \cap T(b) \neq \varnothing$.*

Доказательство теоремы. Пусть p-кольцо R проективно в категории p-колец и $a = a_1 + 2a_2 + \ldots + (p-1)a_{p-1}$ — каноническая запись элемента $a \in R$. Ввиду леммы 2, булева алгебра $B(R)(\leq)$ проективна в категории булевых алгебр и по лемме 3 существуют конечные подмножества $S(a_i) \subseteq \{u \in B(R) \mid u \geq a_i\}$ и $T(a_i) \subseteq \{u \in B(R) \mid u \leq a_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$. Положим

$$S(a) = \{x \in R \mid x = \Sigma i x_i;\ x_i \in S(a_i),\ x_i x_k = 0 \text{ при } i \neq k\},$$

$$T(a) = \{y \in R \mid y = \Sigma i y_i;\ y_i \in T(a_i),\ y_i y_k = 0 \text{ при } i \neq k\}.$$

Из определения $S(a)$ и конечности $S(a_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$ следует, что $S(a)$ является конечным подмножеством в R. Аналогично, $T(a)$ — конечное подмножество в R. Более того, из леммы 1 следует, что $S(a) \subseteq \{c \in R \mid c \geqq a\}$ и $T(a) \subseteq \{c \in R \mid c \leq a\}$.

Пусть $b = b_1 + 2b_2 + \ldots + (p-1)b_{p-1}$ — каноническая запись элемента $b \in R$ и $a \leq b$. По лемме 1 $a_i \leq b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$. По лемме 3 $S(a_i) \cap T(b_i) \neq \varnothing$ $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$. Пусть $c_i \in S(a_i) \cap T(b_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$. Из $c_i \in T(b_i)$ следует $c_i \leq b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$. Так как $b_k b_i = 0$ при $i \neq k$, то и $c_k c_i = 0$. Действительно, $c_i \leq b_i$ означает $c_i b_i = c_i^2 = c_i$, которое дает $c_k c_i = c_k b_k c_i b_i = c_k c_i b_k b_i = 0$. Следовательно, $c = c_1 + 2c_2 + \ldots + (p-1)c_{p-1}$ является канонической записью элемента c. Из определения $S(a)$, $T(b)$ и $c_i \in S(a_i) \cap T(b_i)$, учитывая лемму 1, получаем $c \in S(a) \cap T(b)$.

Достаточность. Пусть u, $v \in B(R)$ и $u \leq v$. Существуют конечные подмножества $S(u) \subseteq \{x \in R \mid x \geqq u\}$ и $T(v) \subseteq \{x \in R \mid x \leq v\}$ такие, что $S(u) \cap S(v) \neq \varnothing$. Легко видеть, что $T(v) \subseteq B(R)$. Действительно, пусть $x \in T(v)$ и $x = x_1 + 2x_2 + \ldots + (p-1)x_{p-1}$. По (2) $v = v_1 + 2.0 + \ldots + (p-1).0$ и из леммы 1 следует, что $x_i \leq 0$, т. е. $x_i = 0$ $(i = 2, 3, \ldots, p-1)$. По (2) $x \in B(R)$. Пусть $y \in R$ и $y \in S(u) \cap T(v)$. Тогда $y \in B(R)$ и, следовательно, $[S(u) \cap B(R)] \cap [T(v) \cap B(R)] \neq \varnothing$. По лемме 3 булева алгебра $B(R)(\leq)$ проективна в категории булевых алгебр. Ввиду леммы 2 и p-кольцо R проективно в категории p-колец.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Abian. Direct product decomposition of commutative semisimple rings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **24**, 1970, 502—507.
2. И. Херстейн. Некоммутативные кольца. Москва, 1972.
3. D. C. Haines. Injective objects in the category of p-rings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **42**, 1974, 57—60.
4. П. Раднев. Инъективные объекты в категории p-колец. *Вестник Моск. ун-та*, № 5, 1976, 49—55.
5. A. L. Foster. p-rings and their Boolean vector representation. *Acta Math.*, **84**, 1951, 231—261.
6. J. L. Zemmer. Some remarks on p-rings and their Boolean geometry. *Pacif. J. Math.*, **6**, 1956, 193—208.
7. Й. Ламбек. Кольца и модули. Москва, 1971.
8. R. W. Stringal. The categories of p-rings are equivalent. *Proc. Amer. Math., Soc.*, **29**, 1971, 229—235.
9. R. Freese, J. B. Nation. Projective lattices. *Pacif. J. Math.*, **75**, 1978, 93—106.

Пловдивский университет, Математический факультет
4000 Пловдив

Поступила 22. 2. 1979