Serdica

Bulgariacae mathematicae
publicationes

Сердика

Българско математическо
списание

INVARIANZ VON PUNKTPROZESSEN BEI ZUFÄLLIGEN BEWEGUNGEN II

JOHANNES KERSTAN, KARL-HEINZ FICHTNER

Es seien P ein Punktprozeß und R ein substochastischer Kern ohne stationäre Verteilungsgesetze auf einem vollständigen, separablen metrischen Raum. Genügt P gewissen Endlichkeitsbedingungen, so kann man einen neuen Punktprozeß P_R ableiten, indem man alle Punkte unabhängig voneinander gemäß R verschiebt (Vgl. [2] oder [5]). Für den Fall, daß die Halbgruppe $(R^n)_{n\geqq 1}$ der Faltungspotenzen von R eine gewisse Mischungseigenschaft besitzt, wurde in [2] (s. auch [7]) die Struktur der verschiebungsinvarianten Punktprozesse ($P_R=P$) mit endlicher Intensität ermittelt. Es treten dabei nur Mischungen verschiebungsinvarianter Poissonscher Punktprozesse auf. Ist diese Mischungseigenschaft nicht erfüllt, so liegen die Verhältnisse wesentlich komplizierter. Es gibt im allgemeinen mehr Punktprozesse, die bezüglich R verschiebungsinvariant, kurz R-invariant, sind. Das zeigt auch das einfache Beispiel der Translation $T(T(x, A)=\delta_{x+1}(A))$ auf den ganzen Zahlen. T-invariant sind alle stationären Punktprozesse.

Das erste Anliegen dieser Arbeit ist es, eine Methode zu demonstrieren, mit der man auch — ohne daß die Mischungseigenschaft erfüllt ist — zu Ergebnissen gelangen kann. Diese Methode ist begründet auf der Entwicklung geeigneter Äquivalenzbegriffe für substochastische Kerne oder, wir beschränken uns der Einfachheit halber auf Punktprozesse auf der Menge der ganzen Zahlen Γ, substochastische Matrizen auf Γ. Ein solcher Äquivalenzbegriff soll folgendes leisten:

Sind zwei substochastische Matrizen R und $\bar{R}$ äquivalent und ist P ein R-invarianter Punktprozeß endlicher Intensität, dann soll genau ein $\bar{R}$-invarianter Punktprozeß $\bar{P}$ existieren, so daß die Folge $(P_{\bar{R}^n})_{n\geqq 1}$ schwach gegen $\bar{P}$ konvergiert. R-invariante Punktprozesse endlicher Intensität sollen also durch sukzessive Verschiebung gemäß $\bar{R}$ in $\bar{R}$-invariante Punktprozesse überführbar sein und umgekehrt. Damit ist die Gültigkeit gleichartiger Struktursätze für die Mengen der verschiebungsinvarianten Punktprozesse gesichert.

Außer für die Struktur der invarianten Punktprozesse interessiert man sich gewöhnlich auch für Punktprozesse, die bei sukzessiver Verschiebung schwach gegen einen invarianten Punktprozeß konvergieren, d. h., die fastinvariant sind. Da man, je nach der eigenen Zielstellung, bestimmte Äquivalenzklassen in der Menge der substochastischen Matrizen möglichst groß halten will, um aus den Untersuchungen an einer einzigen Matrix Aussagen über möglichst viele andere substochastische Matrizen ableiten zu können, ist es nicht immer am günstigsten, den Äquivalenzbegriff so anzulegen, daß jeder R-fastinvariante Punktprozeß auch $\bar{R}$-fastinvariant ist und umgekehrt. Die Einschränkung auf die Betrachtung bestimmter Klassen von Punktprozessen kann beispielsweise durch technische Möglichkeiten, Fastinvarianz nachweisen zu können, diktiert sein. Darin ist auch begründet, warum man sich bei Invarianzuntersuchungen oft auf Punktprozesse endlicher Intensität einschränkt. Günstig ist es z. B., von einem Punktprozeß zu wissen, daß sein Intensitätsmaß durch ein R-superstationäres Maß beschränkt ist. Um nachzuweisen, daß ein solcher Punktprozeß R-fastinvariant ist, genügt es nämlich zu zeigen, daß die Folge $(P_{R^n})_{n\geq 1}$ schwach konvergiert. Die Invarianz des Limes ist dann durch den Stetigkeitssatz aus [5] automatisch gesichert. Dieser Gedanke liegt den im 2. Abschnitt dieser Arbeit untersuchten Äquivalenzbegriffen zugrunde. In den folgenden Abschnitten wird dann die Klasse aller zur Translation T äquivalenten substochastischen Matrizen ermittelt. Dabei kommen wir zum zweiten Anliegen dieser Arbeit — nämlich zu zeigen, daß die große Vielfalt in der Menge der invarianten Punktprozesse nicht eine Eigenart determinierter Verschiebungen, wie der Translation, ist. Es erweist sich nämlich, daß die Klasse der zu T äquivalenten Matrizen sehr groß ist und insbesondere auch stochastische Matrizen enthält, die eine echt zufällige Bewegung der Punkte beschreiben.

1. Grundbegriffe und Bezeichnungen. Es bezeichne Γ die Menge der ganzen Zahlen und N die Menge der natürlichen Zahlen. M' sei die Menge aller auf endlichen Teilmengen von Γ endlichen Maße.

Ein Maß μ_1 auf Γ ist durch $\mu_2 \in M'$ beschränkt, wenn gilt: $\mu_1(x) \leq \mu_2(x)$; $\forall x \in \Gamma$. Eine Folge $(\mu_n)_{n\in N}$ von Maßen aus M' konvergiert gegen ein Maß μ auf Γ, wenn für alle $x \in \Gamma$ $\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(x)$ ist. M sei die Menge aller ganzzahligen Maße aus M' und $[M, \mathfrak{M}]$ der meßbare Raum der Punktfolgen auf Γ. Entsprechend [5] verstehen wir unter einem Punktprozeß oder einer zufälligen Punktfolge (z. Pf.) ein Verteilungsgesetz P auf $[M, \mathfrak{M}]$.

Λ_p bezeichnet das Intensitätsmaß von P und für alle Folgen $x_1, \ldots, x_m$ ist $P^{x_1, \ldots, x_m}$ das Verteilungsgesetz auf N^m, das die Anzahl der Punkte an den Orten $x_1, \ldots, x_m$ beschreibt. Für eine Folge z. Pf. $(P_n)_{n\in N}$ schreiben wir $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} P$ wenn für alle Folgen paarweise verschiedener Elemente $x_1, \ldots, x_m$ aus Γ die Konvergenz der Variationsabstände

$$\| P_n^{x_1, \ldots, x_m} - P^{x_1, \ldots, x_m} \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

statt hat, d. h. die Folge $(P_n)_{n\in N}$ schwach gegen P konvergiert. Sei $R = ((R(x\ y)))_{x, y\in\Gamma}$ eine substochastische Matrix über Γ und $R^n = ((R^n(x, y)))_{x, y\in\Gamma}$ ihr n-faches Produkt. Für alle $\mu \in M'$ bezeichnet $\mu * R$, das durch

$$\mu * R(y) = \sum_{x\in\Gamma} \mu(x) R(x, y); \qquad \forall y \in \Gamma$$

definierte Maß auf Γ. μ heißt R-invariant, wenn $\mu = \mu * R$ ist und R-superinvariant, wenn $\mu * R$ durch μ beschränkt wird. μ ist R-beschränkt, wenn ein R-superinvariantes Maß existiert, das μ beschränkt.

Ein R-beschränktes Maß μ wird R-fastinvariant genannt, wenn ein R-invariantes Maß ${}_R[\mu]$ existiert, so daß die Folge $(\mu * R^n)_{n\in N}$ gegen ${}_R[\mu]$ konvergiert. Zwei R-fastinvariante Maße heißen R-äquivalent, wenn gilt: ${}_R[\mu_1] = {}_R[\mu_2]$.

Ist das Intensitätsmaß einer z. Pf. P R-beschränkt, so kann man für alle $n \in N$ aus P eine neue z. Pf. P_{R^n} ableiten, indem man alle Punkte unabhängig voneinander gemäß R^n verschiebt (s. [2], [5]). Gilt dabei $P_R = P$, so heißt P R-invariant. R-fastinvariant ist hingegen P, wenn die Folge z. Pf. $(P_{R^n})_{n\in N}$ schwach gegen eine R-invariante z. Pf. ${}_R[P]$ konvergiert. Da bei dieser Definition der R-Fastinvarianz einer z. Pf. die R-Beschränktheit des Intensitätsmaßes enthalten ist, können wir aus dem Stetigkeitssatz in [5] schließen, daß die z. Pf. P genau dann R-fastinvariant ist, wenn ihr Intensitätsmaß R-beschränkt ist und die Folge $(P_{R^n})_{n\in N}$ schwach konvergiert (s. auch [3]). Zwei R-fastinvariante z. Pf. P_1 und P_2 heißen R-äquivalent, wenn gilt: ${}_R[P_1]={}_R[P_2]$.

Sei jetzt P eine z. Pf. auf Γ, so daß gilt:

$$\sup_{x\leq y} \Lambda_p(x)<\infty; \qquad \forall y\in\Gamma$$

P heißt endlich stationär, wenn für alle Auswahlen $x, x_1, \ldots, x_m \in \Gamma$ gilt: $P^{x_1,\ldots,x_m}=P^{x_1+x,\ldots,x_m+x}$. Endlich faststationär nennen wir P, wenn eine endlich stationäre z. Pf. P existiert, so daß die Konvergenz

$$\| P^{x_1-n,\ldots,x_m-n}-P^{x_1,\ldots,x_m}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

für alle Auswahlen $x_1, \ldots, x_m$ paarweise verschiedener Elemente von Γ statt hat.

2. Verwandtschaft substochastischer Matrizen. In diesem Abschnitt führen wir drei Äquivalenzbegriffe für substochastische Matrizen ein und diskutieren einige ihrer wesentlichen Eigenschaften.

Definition. *Es seien R_1 und R_2 zwei substochastische Matrizen über Γ. R_1 und R_2 heißen verwandt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(V_1) Die Menge der R_1-fastinvarianten z. Pf. ist gleich der Menge der R_2-fastinvarianten z. Pf..

(V_2) Zwei R_1-äquivalente z. Pf. sind auch R_2-äquivalent und umgekehrt.

R_1 und R_2 heißen schwach verwandt, wenn gilt:

(V'_1) Die Menge der R_1-fastinvarianten Maße ist gleich der Menge der R_2-fastinvarianten Maße.

(V'_2) Zwei R_1-äquivalente Maße sind auch R_2-äquivalent und umgekehrt.

Wir stellen zunächst eine Reihe elementarer Folgerungen aus dieser Definition zusammen.

Da zwei Poissonsche z. Pf. genau dann R-fastinvariant bzw. R-äquivalent sind, wenn ihre Intensitätsmaße R-fastinvariant bzw. R-äquivalent sind, erhalten wir:

2.1. *Sind zwei substochastische Matrizen verwandt, so sind sie auch schwach verwandt.*

Weiter folgt sofort aus der Definition:

2.2. *Sind die substochastischen Matrizen R_1 und R_2 schwach verwandt, dann existiert zu jedem R_1-invarianten Maß μ_1 genau ein R_2-invariantes Maß μ_2, so daß die Folge $(\mu_1 * R_2^n)_{n\in N}$ gegen μ_2 konvergiert. μ_2 ist zugleich charakterisiert, als dasjenige R_2-invariante Maß, für das die Folge $(\mu_2 * R_1^n)_{n\in N}$ gegen μ_1 konvergiert.*

Und schießlich erhalten wir noch die folgende Beziehung.

2.3. *Sind die substochastischen Matrizen R_1 und R_2 verwandt, so existiert zu jeder R_1-invarianten z. Pf. P^1 genau eine R_2-invariante z. Pf. P^2, so daß die Folge $(P^1_{R_2^n})_{n\in N}$ schwach gegen P^2 konvergiert. P^2 ist zugleich als diejenige R_2-invariante z. Pf. charakterisiert, für die die Folge $(P^2_{R_1^n})_{n\in N}$ schwach gegen P^1 konvergiert.*

Dabei konvergieren auch die Folgen der Intensitätsmaße $(\Lambda_{P^1_{R_2^n}})_{n \in N}$ bzw. $(\Lambda_{P^2_{R_2^n}})_{n \in N}$ gegen Λ_{P^2} bzw. Λ_{P^1}.

Die Behauptung in 2.3. über die Konvergenz der Intensitätsmaße folgt nun nicht unmittelbar aus der Definition der Verwandtschaft, sie bedarf eines Beweises:

Da P^1 R^1-invariant und stets $\Lambda_{P^1_{R_1^n}} = \Lambda_{P^1} * R_1^n$ ist, muß Λ_{P^1} ein R_1-invariantes Maß sein. Nach 2.1. und 2.2. existiert dann ein R_2-invariantes Maß μ_2, so daß gilt:

(1) $$\mu_2(x) = \lim_{n\to\infty} \Lambda_{P^1} * R_2^n(x); \qquad \forall x \in \Gamma.$$

Auf die gleiche Weise können wir auf die Existenz eines R_1-invarianten Maßes μ_1 schließen, für das gilt:

(2) $$\mu_1(x) = \lim_{n\to\infty} \Lambda_{P^2} * R_1^n(x); \qquad \forall x \in \Gamma.$$

Mit (1) und (2) gelten dabei auch die Beziehungen

(3) $$\Lambda_{P^1}(x) = \lim_{n\to N} \mu_2 * R_1^n(x); \qquad \forall x \in \Gamma,$$

und

(4) $$\Lambda_{P^2}(x) = \lim_{n\to\infty} \mu_1 * R_2^n(x); \qquad \forall x \in \Gamma.$$

Konvergiert eine Folge $(P^n)_{n \in N}$ von z. Pf. schwach gegen eine z. Pf. P, dann muß stets

$$\Lambda_P(x) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \Lambda_{P^n}(x); \qquad \forall x \in \Gamma$$

sein. Angewandt auf unseren Fall erhalten wir $\mu_2(x) \geq \Lambda_{P^2}(x)$; $\forall x \in \Gamma$, $\mu_1(x) \geq \Lambda_{P^1}(x)$; $\forall x \in \Gamma$. Das wiederum zieht wegen (1), (2), (3) und (4) nach sich, daß μ_2 durch Λ_{P^2} und μ_1 durch Λ_{P^1} beschränkt wird. Insgesamt ergibt sich damit $\mu_2 = \Lambda_{P^2}$ und $\mu_1 = \Lambda_{P^1}$. Die Behauptung in 2.3. über die Konvergenz der Intensitätsmaße ist damit bewiesen.

Schließlich erhalten wir noch:

2.4. *Sind R_1 uud R_2 schwach verwandt, so ist die Menge der R_1-beschränkten Maße gleich der Menge der R_2-beschränkten Maße.*

Beweis. Es ist zu zeigen, daß jedes R_1-superinvariante Maß durch ein R_2-superinvariantes Maß beschänkt wird und umgekehrt. Aus Symmetriegründen genügt es, nur den ersten Teil dieser Aussage zu beweisen. Sei dazu μ ein R_1-superinvariantes Maß. μ ist dann auch R_1-fastinvariant und muß wegen der schwachen Verwandtschaft von R_1 und R_2 auch R_2-fastinvariant sein. Insbesondere muß μ damit auch R_2-beschränkt sein. 1.4. ist bewiesen.

Nach 2.3. gestattet es die Verwandtschaft zweier substochastischer Matrizen R_1 und R_2, aus der Kenntnis der R_1-invarianten z. Pf. die Kenntnis der R_2-invarianten z. Pf. abzuleiten, d. h., sie beinhaltet die Gültigkeit äquivalenter Struktursätze über die Menge der invarianten z. Pf.. Daß die Mengen der fastinvarianten z. Pf. zusammenfallen, also auch gleichartige Konvergenzsätze gelten, beinhaltet bereits die Bedingung (V_1). Nach 1.2. besagt die schwache Verwandtschaft das Gleiche für Maße auf Γ. Überhaupt scheint der Begriff der schwachen Verwandtschaft nur auf Maße orientiert zu sein.

Die Bemerkung vor 2.1. über Fastinvarianz und Äquivalenz bei Poissonschen Punktprozessen zeigt jedoch, daß das nicht der Fall ist. Bei der Bildung des Begriffs „verwandt" schränkt man sich auf die Betrachtung von z. Pf. mit beschränktem Intensitätsmaß ein. Beim Begriff „schwach verwandt" wird eine weitere Einschränkung auf Poissonsche z. Pf. vorgenommen.

Ein Äquivalenzbegriff für substochastische Matrizen, der auf Maßen aufbaut, erscheint leichter überprüfbar zu sein, als wenn der Begriff auf z. Pf. aufbaut. Das ist schon in der weit größeren Vielfalt der z. Pf. begründet. Andererseits sind wir aber an Aussagen über z. Pf. interessiert. Es gilt also einen Äquivalenzbegriff zu suchen, der auf Maßen aufbaut und hinreichend für die Verwandtschaft ist. Der Begriff „schwach verwandt" leistet das nicht. Wie spätere Beispiele zeigen, ist er wirklich echt schwächer als der Begriff „verwandt".

Definition. *Es seien R_1 und R_2 substochastische Matrizen über Γ. R_1 und R_2 sind analytisch verwandt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(A_1) *Die Menge der R_1-beschränkten Maße ist gleich der Menge der R_2-beschränkten Maße.*

(A_2) *Für alle R_1-beschränkten Maße μ, alle $y \in \Gamma$ und alle i, $j \in \{1, 2\}$ gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\in N} \sum_{x\in\Gamma} \mu(x) \,|\, R_i^{m+n}(x, y) - (R_j^m \cdot R_i^n)(x, y) \,| = 0.$$

Wir erhalten folgende Beziehung:

Theorem 1. *Es seien R_1 und R_2 substochastische Matrizen über Γ. Sind R_1 und R_2 analytisch verwandt, so sind sie auch verwandt.*

Beweis. Es sei P eine R_1-fastinvariante z. Pf..

Λ_P und $\Lambda_{R_1[P]}$ sind dann R_1-beschränkt und nach (A_1) auch R_2-beschränkt. D. h., für alle $n \in N$ existieren die verschobenen z. Pf. $P_{R_2^n}$ und $(({}_{R_1}[P])_{R_2^n})_{n\in N}$.

Wir zeigen zunächst, daß die Folge $(({}_{R_1}[P])_{R_2^n})_{n\in N}$ schwach gegen eine R_2-invariante z. Pf. $\bar{P}$ konvergiert.

Dazu genügt es nachzuweisen, daß für alle Auswahlen $y_1, \ldots, y_s$ paarweise verschiedener ganzer Zahlen die Konvergenz

$$\sup_{m\in N} \| ({}_{R_1}[P])^{y_1, \ldots, y_s}_{R_2^{m+n}} - ({}_{R_1}[P])^{y_1, \ldots, y_s}_{R_2^n} \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

statt hat. Letzteres folgt jedoch sofort aus der R_1-Invarianz von ${}_{R_1}[P]$, der Bedingung (A_2) und der folgenden Abschätzung:

$$\| ({}_{R_1}[P])^{y_1, \ldots, y_s}_{R_2^{m+n}} - ({}_{R_1}[P])^{y_1, \ldots, y_s}_{R_1^m \cdot R_2^n} \|$$

$$\leq 2 \sum_{i=1}^{s} \sum_{x\in\Gamma} \Lambda_{R_1[P]}(x) \,|\, R_2^{m+n}(x, y_i) - (R_1^m \cdot R_2^n)(x, y_i) \,|.$$

Wir zeigen nun, daß auch die Folge $(P_{R_2^n})_{n\in N}$ schwach gegen $\bar{P}$ konvergiert. Dazu benutzen wir folgende Abschätzung:

$$(5)\qquad \| P^{y_1,\ldots,y_s}_{R_2^{m+n}} - \bar{P}^{y_1,\ldots,y_s} \| \leq \| P^{y_1,\ldots,y_s}_{R_2^{m+n}} - P^{y_1,\ldots,y_s}_{(R_1^m \cdot R_2^n)} \|$$

$$+ \| P^{y_1,\ldots,y_s}_{R_1^m \cdot R_2^n} - ({}_{R_1}[P])^{y_1,\ldots,y_s}_{R_2^n} \| + \| ({}_{R_1}[P])^{y_1,\ldots,y_s}_{R_2^n} - \bar{P}^{y_1,\ldots,y_s} \| .$$

Da Λ_p R_1-beschränkt ist, existiert nun ein R_1-superinvariantes Maß μ_1, so daß für alle $m \in N$ das Maß $\Lambda_{p_{R_1^m}}$ durch μ_1 beschränkt wird. Auf Grund der Bedingung (A_1) existiert dann ein R_2-superinvariantes Maß μ_2, das μ_1 und damit auch für alle $m \in N$ das Maß $\Lambda_{p_{R_1^m}}$ beschränkt. Nach dem Stetigkeitssatz aus [5] konvergiert deshalb die Folge $((P_{R_1^m})_{R_2^n})_{m \in N}$ für jedes $n \in N$ schwach gegen $({}_{R_1}[P])_{R_2^n}$, d. h. es gilt für alle $n \in N$

$$\lim_{m\to\infty} \| P^{y_1,\ldots,y_s}_{R_1^m R_2^n} - ({}_{R_1}[P])^{y_1,\ldots,y_s}_{R_2^n} \| = 0.$$

(6) Aus (5) folgt deshalb für alle $n \in N$

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \| P^{y_1,\ldots,y_s}_{R_2^m} - \bar{P}^{y_1,\ldots,y_s} \| \leq \sup_{m \in N} \| P^{y_1,\ldots,y_s}_{R_2^{m+n}} - P^{y_1,\ldots,y_s}_{R_1^m R_2^n} \|$$

$$+ \| ({}_{R_1}[P])^{y_1,\ldots,y_s}_{R_2^n} - \bar{P}^{y_1,\ldots,y_s} \| .$$

$\bar{P}$ war der schwache Limes der Folge $(({}_{R_1}[P])_{R_2^n})_{n \in N}$. Es gilt also

$$(7)\qquad \lim_{n\to\infty} \| ({}_{R_1}[p])^{y_1,\ldots,y_s}_{R_2^n} - \bar{P}^{y_1,\ldots,y_s} \| = 0.$$

Weiter folgt die Beziehung

$$(8)\qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{m \in N} \| P^{y_1,\ldots,y_s}_{R_2^{m+n}} - P^{y_1,\ldots,y_s}_{(R_1^m \cdot R_2^n} \| = 0$$

sofort aus (A_2) und der Abschätzung

$$\| P^{y_1,\ldots,y_s}_{R_2^{m+n}} - P^{y_1,\ldots,y_s}_{(R_1^m \cdot R_2^n)} \| \leq 2 \sum_{i=1}^{s} \sum_{x \in \Gamma} \Lambda_p(x) \, | R_2^{m+n}(x, y_i) - (R_1^m \cdot R_2^n)(x, y_i) |$$

(6), (7) und (8) ergeben

$$\lim_{n\to\infty} \| P^{y_1,\ldots,y_s}_{R_2^n} - \bar{P}^{y_1,\ldots,y_s} \| = 0$$

für alle Folgen $y_1, \ldots, y_s$ paarweise verschiedener ganzer Zahlen, d. h. die Folge $(P_{R_2^n})_{n \in N}$ konvergiert ebenfalls schwach gegen die z. Pf. $\bar{P}$.

Wir haben damit insgesamt gezeigt:

a) Jede R_1-fastinvariante z. Pf. ist R_2-fastinvariant.

b) Sind zwei R_1-fastinvariante z. Pf. R_1-äquivalent, so sind sie auch R_2-äquivalent.

Aus Symmetriegründen können wir auf die gleiche Weise zeigen:

a') Jede R_2-fastinvariante z. Pf. ist R_1-fastinvariant.

b′) Sind zwei R_2-fastinvariante z. Pf. R_2-äquivalent, so sind sie auch R_1-äquivalent.
Aus a), a′), b) und b′) folgt, daß R_1 und R_2 verwandt sind. Theorem 1 ist damit bewiesen.

3. Fasttranslationen. Die stochastische Matrix $T=((T(x, y)))_{x, y \in \Gamma}$ über Γ mit $T(x, x+1)=1$; $\forall x \in \Gamma$ nennen wir Translation. Wir wollen die Menge aller substochastischen Matrizen ermitteln, die zu T verwandt sind.

Definition. *Eine substochastische Matrix $R=((R(x, y)))_{x, y \in \Gamma}$ über Γ heißt Fasttranslation, wenn folgende Bedingungen gelten:*

(T_0) *Es ist* $\Sigma_{n \in N}(1-R(-n, -n+1))<\infty$;

(T_1) *Es existieren keine R-invarianten Verteilungsgesetze.*

(T_2) *Es gibt ein R-superinvariantes Maß μ mit* $\overline{\lim}_{n\to\infty}\mu(-n)>0$;

(T_3) *Zu jedem $x \in \Gamma$ existieren nur endlich viele $y>x$, so daß $R^n(y, x)>0$ für mindestens ein $n \in N$ ist.*

Man erkennt sofort, daß die Translation T eine Fasttranslation ist. In [6] werden stochastische Matrizen R über Γ untersucht, für die $R(x, x)=1-R(x, x+1)<1$; $\forall x \in \Gamma$ ist. Sie erfüllen die Bedingungen (T_1), (T_2) und (T_3) und sind deshalb genau dann Fasttranslationen, wenn gilt: $\Sigma_{n \in N}R(-n, -n)<\infty$.

Wir zeigen nun:

3.1. *Bezüglich einer Fasttranslation sind alle $x \in \Gamma$ transiente Zustände.*

Beweis. Wir wollen annehmen, daß die Fasttranslation R einen rekurrenten Zustand $c \in \Gamma$ besitzen möge und bezeichnen mit C die Menge aller $x \in \Gamma$, für die ein $n \in N$ und ein $m \in N$ existieren mit $R^n(x, c)>0$, $R^m(c, x)>0$. Durch ${}_cR(x, y)=_{\mathrm{Def}}R(x, y)$; $\forall x, y \in C$ ist dann eine stochastische Matrix auf C gegeben und es gibt genau ein ${}_cR$-invariantes Maß $\bar{\mu}$ mit $\bar{\mu}(c)=1$. Es muß c Nullrekurrent sein, da sonst ein R-invariantes Verteilungsgesetz existieren würde, was im Widerspruch zur Bedingung (T_1) steht. C enthält mithin unendlich viele Elemente. Für jedes $x \in C$ existiert jetzt ein $n \in N$ mit $R^n(x, c)>0$. Nach (T_3) ist jedoch die Menge aller $x \geqq c$, für die ein $n \in N$ mit $R^n(x, c)>0$ existiert, endlich. Es gibt also zu jedem $n \in N$ ein $x \in C$ mit $x \leqq -n$. Wegen (T_0) können wir ein $n_0 \in N$ auswählen, so daß $R^{x-y}(y, x)>0$ für alle $y \leqq x \leqq -n_0$ ist. Deshalb muß $x \in C$ für alle $x \leqq -n_0$ sein. Durch

$$\bar{R}(x, y)=\frac{\bar{\mu}(y)}{\bar{\mu}(x)}R(y, x); \qquad \forall x, y \in C$$

ist nun wieder eine stochastische Matrix über C definiert, bezüglich der alle Zustände rekurrent sind. Bezeichnen wir mit $(\zeta_i)_{i \in N}$ eine homogene Markoffsche Kette mit dem Phasenraum C, der Übergangsmatrix $\bar{R}$ und der Anfangsverteilung δ_x mit $x \leqq -n_0$, so erhalten wir

$$\mathfrak{Z}(''\zeta_0=x,\ \zeta_1=x-1,\ \ldots,\ \zeta_n=x-n,\ \ldots'')$$

$$=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=x-n}^{x}\bar{R}(i, i-1)=\frac{1}{\bar{\mu}(x)}\lim_{n\to\infty}\Big(\bar{\mu}(x-n-1)\prod_{i=x-n}^{x}R(i-1, i)\Big).$$

Da x rekurrent bezüglich $\bar{R}$ ist, muß $\mathfrak{Z}(„\zeta_0=x,\ \zeta_1=x-1,\ \ldots,\ \zeta_n=x-n,\ \ldots'')=0$ und demzufolge auch

$$\lim_{n\to\infty}\bar{\mu}(x-n-1)\prod_{i=x-n}^{x}R(i-1, i)=0$$

sein. Das ist jedoch, wegen $x \leq -n_0$, gleichbedeutend mit $\lim_{n\to\infty} \bar{\mu}(-n) = 0$. Nach ($T_2$) existiert jetzt ein R-superinvariantes Maß μ mit $\overline{\lim}_{n\to\infty} \mu(-n) > 0$. Wir können μ in der Gestalt

$$\mu(x) = \lambda(x) + \sum_{y\in\Gamma} \theta(y) \sum_{n=0}^{\infty} R^n(y, x); \qquad \forall x \in \Gamma$$

darstellen, wobei λ ein R-invariantes Maß ist und $\theta(x) = \mu(x) - \mu * R(x)$ für alle $x \in \Gamma$ ist. Da alle $x \in C$ bezüglich R rekurrent sind, muß $\sum_{n=0}^{\infty} R^n(y, x) = 0$ oder $\sum_{n=0}^{\infty} R^n(y, x) = \infty$ für alle $x \in C$ und $y \in \Gamma$ sein. Es ist deshalb $\mu(x) = \lambda(x)$; $\forall x \in c$. Die Einschränkung von λ auf c ist nun R_c-invariant. Es gibt deshalb eine reelle Zahl a mit $\mu(x) = a\bar{\mu}(x)$; $\forall x \in C$. Wegen $\overline{\lim}_{n\to\infty} \mu(-n) > 0$ muß $a > 0$ und deshalb

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \bar{\mu}(-n) = \frac{1}{a} \overline{\lim_{n\to\infty}} \mu(-n) > 0$$

sein. Das steht jedoch im Widerspruch zu der oben abgeleiteten Beziehung $\lim_{\infty\to n} \bar{\mu}(-n) = 0$. Die Annahme, daß ein bezüglich R rekurrenter Zustand existiert, ist also falsch, 3.1. ist damit bewiesen.

Wir wollen nun untersuchen, wie die Menge der R-beschränkten Maße bei einer Fasttranslation R beschaffen ist. Dazu benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

3.2. *Es seien R eine substochastische Matrix über Γ und $E^R(y)$ für jedes $y \in \Gamma$ die Menge aller $x \in \Gamma$, für die ein $n \in N$ mit $R^n(x, y) > 0$ existiert.*

Ein Maß μ ist genau dann R-beschränkt, wenn es zu jedem $y \in \Gamma$ ein R-superinvariantes Maß μ_y gibt, so daß gilt:

$$\mu(x) \leq \mu_y(x); \qquad \forall x \in E^R(y). \tag{9}$$

B e w e i s. Ist μ ein R-beschränktes Maß, dann existiert trivialerweise zu jedem $y \in \Gamma$ ein R-superinvariantes Maß, so daß (9) gilt. Wir müssen also nur noch die Umkehrung dieser Aussage beweisen. Sei dazu M_y für jedes $y \in \Gamma$ die Menge aller R-superinvarianten Maße λ, für die $\mu(x) \leq \lambda(x)$; $\forall x \in E^R(y)$ ist. Durch

$$\mu_y(x) =_{\mathrm{Def}} \inf_{\lambda\in M_y} \lambda(x); \qquad \forall x \in \Gamma$$

ist dann ebenfalls ein Element von M_y definiert. Da für alle $x \in E^R(y)$ stets $E^R(x) \subseteq E^R(y)$ ist muß $M_y \subseteq M_x$ sein. Für alle $x \in E^R(y)$ ist deshalb μ_x durch μ_y beschränkt. Wir setzen jetzt $\lambda(x) =_{\mathrm{Def}} \mu_x(x)$; $\forall x \in \Gamma$. In λ haben wir dann ein Maß aus M', das μ beschränkt. Daß λ auch R-superinvariant ist, geht letztlich aus der folgenden Ungleichungskette hervor:

$$\lambda * R(y) = \sum_{x\in E^R(y)} \mu_x(x) R(x, y) \leq \sum_{x\in\Gamma} \mu_y(x) R(x, y) \leq \mu_y(y) = \lambda(y); \qquad \forall y \in \Gamma$$

Damit ist 3.2. bewiesen.

Wir können nun zeigen:

3.3. *Es sei R eine Fasttranslation. Ein Maß $\mu \in M'$ ist genau dann R-beschränkt, wenn gilt:* $\overline{\lim}\, \mu(-n) < \infty$.

Beweis. Wir setzen

$$K^R(y) =_{\mathrm{Def}} \lim_{n\to\infty} \prod_{i=y-n}^{y} R(i-1, i); \quad \forall y \in \Gamma.$$

Da R die Bedingung (T_0) erfüllt, ist

$$\lim_{n\to\infty} K^R(-n) = 1. \tag{10}$$

Für jedes R-superinvariante Maß λ, alle $n \in N$ und alle $y \in \Gamma$ ist nun $\lambda(y) \geqq K^R(y)\lambda(y-n)$. Hieraus folgt

$$\lambda(y) \geqq K^R(y) \overline{\lim_{n\to\infty}} \lambda(-n); \quad \forall y \in \Gamma$$

und weiter wegen (10)

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \lambda(-n) \geqq \overline{\lim_{n\to\infty}} \lambda(-n).$$

Für jedes R-superinvariante Maß λ konvergiert also die Folge $(\lambda(-n))_{n\in N}$.

Da es nach (T_2) ein R-superinvariantes Maß λ mit $\overline{\lim}_{n\to\infty} \lambda(-n) > 0$ gibt, muß es also sogar ein R-superinvariantes Maß $\bar{\lambda}$ mit $\lim_{n\to\infty} \bar{\lambda}(-n) = 1$ geben. Es existiert dann ein $n_0 \in N$ mit $\bar{\lambda}(x) \geqq 1/2$; $\forall x \leqq -n_0$. Für jedes $y \in \Gamma$ ist nun durch

$$\bar{\lambda}_y(x) =_{\mathrm{Def}} \sum_{n=0}^{\infty} R^n(y, x); \quad \forall x \in \Gamma$$

ein Maß auf Γ gegeben mit $\bar{\lambda}_y(y) \geqq 1$.

Weil nach 3.1. alle $y \in \Gamma$ bezüglich R transient sind, ist für alle $y \in \Gamma$ $\bar{\lambda}_y$ ein R-superinvariantes Maß. Wegen (T_3) können wir zu jedem $y \in \Gamma$ ein $n_y \in N$ wählen, so daß $x \leqq n_y$; $\forall x \in E^R(y)$ ist. Sei jetzt μ ein Maß aus M' für das $\overline{\lim}_{n\to\infty} \mu(-n) < \infty$ ist. Durch

$$\lambda_y(x) =_{\mathrm{Def}} \Big(2\bar{\lambda}(x) + \sum_{z=-n_0}^{n} \bar{\lambda}_z(x)\Big) \sup_{z \in E^R(y)} \mu(z); \quad \forall x \in \Gamma$$

ist dann für jedes $y \in \Gamma$ ein R-superinvariantes Maß λ_y gegeben mit $\mu(x) \leqq \lambda_y(x)$ $\forall x \in E^R(y)$. Mit Hilfe von 3.2. können wir daraus schließen, daß μ R-beschränkt ist. Wir hatten bereits gezeigt, daß für jedes R-superinvariante Maß λ die Folge $(\lambda(-n))_{n\in N}$ konvergiert. Ist deshalb μ ein R-beschränktes Maß, so muß $\overline{\lim}\, \mu(-n) < \infty$ sein. 3.3. ist damit bewiesen.

4. Verwandtschaft von Fasttranslationen. In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, ob die Fasttranslationen verwandt zur Translation sind und inwieweit die Verwandtschaft zur Translation in einer der drei Formen charakteristisch für eine Fasttranslation ist. Dazu zeigen wir zunächst:

Theorem 2. *Je zwei Fasttranslationen sind analytisch verwandt.*

Beweis. Auf Grund von 3.3. genügt es zum Beweis von Theorem 2 zu zeigen, daß für je drei Fasttranslationen R_1, R_2 und R_3, alle $y \in \Gamma$ und alle $\mu \in M'$ mit $\overline{\lim}_{n\to\infty} \mu(-n) < \infty$ die Konvergenz

$$\varepsilon_n(y) = \sup_{m \in N} \sum_{x \in \Gamma} \mu(x) \left| (R_1^m \cdot R_3^n)(x, y) - (R_2^m \cdot R_3^n)(x, y) \right| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

statt hat.

Dazu setzen wir für je zwei Fasttranslationen R_1 und R_2

$$d^{(z)}_{R_1, R_2} = \sup_{m \in N} \sum_{x \in \Gamma} \mu(x) \left| R_1^m(x, z) - R_2^m(x, z) \right| ; \qquad \forall z \in \Gamma$$

und untersuchen zunächst den Ausdruck $d_{R,T}(z)$, wobei R irgendeine Fasttranslation ist. Nach 3.3. ist μ R beschränkt. Es existiert deshalb ein R-superinvariantes Maß λ, so daß für alle $x \in \Gamma$ gilt: $\mu(x) \leq \lambda(x)$. Wir erhalten daraufhin folgende Ungleichungskette für alle $z \in \Gamma$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{x \in \Gamma} \mu(x) \left| R^m(x, z) - T^m(x, z) \right| \\
&\leq \lambda(z-m)\,(1 - R^m(z-m, z)) + \sum_{x \neq z-m} \lambda(x) R^m(x, z) \\
&\leq \lambda(z-m)\,(1 - R^m(z-m, z)) + \lambda(z) - \lambda(z-m) R^m(z-m, z) \\
&\leq \left| \lambda(z) - \lambda(z-m) \right| + 2\lambda(z-m)\,(1 - K^R(z)).
\end{aligned}$$

Da die Folge $(\lambda(-n))_{n \in N}$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} K^R(-n) = 1$ ist, muß deshalb $\lim_{n\to\infty} d_{R,T}(-n) = 0$ sein. Weil stets $d_{R_1,R_2}(z) \leq d_{R_1,T}(z) + d_{R_2,T}(z)$ ist, erhalten wir daraus für die Fasttranslationen R_1 und R_2 $\lim_{n\to\infty} d_{R_1,R_2}(-n) = 0$. Es gilt nun für alle $y \in \Gamma$ und $n \in N$

$$\varepsilon_n(y) \leq \sum_{x \in \Gamma} d_{R_1,R_2}(x) R_3^n(x, y). \tag{11}$$

Wegen 3.3. ist das Maß λ_0 mit $\lambda_0(x) = 1$; $\forall x \in \Gamma$, R_3-beschränkt. Es existiert also ein R_3-superinvariantes Maß $\bar{\lambda}$, das λ_0 beschränkt. Wir erhalten daraufhin für alle y, $z \in \Gamma$ und alle $n \in N$ aus (11)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n(y) &\leq (\sup_{x \leq z} d_{R_1,R_2}(x)) \sum_{x \leq z} \bar{\lambda}(x) R_3^n(x, y) + \sum_{x > z} d_{R_1,R_2}(x) R_3^n(x, y) \\
&\leq \bar{\lambda}(y) \cdot \sup_{x \leq z} d_{R_1,R_2}(x) + \sum_{x > z} d_{R_1,R_2}(x) R_3^n(x, y).
\end{aligned} \tag{12}$$

Nach (T_3) gibt es für jedes $y \in \Gamma$ nur endlich viele $x > y$, für die ein $n \in N$ existiert mit $R_3^n(x, y) > 0$. Wegen 3.1. ist weiter $\lim_{n\to\infty} R_3^n(x, y) = 0$; $\forall x, y \in \Gamma$. Es ist deshalb stets

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{x > z} d_{R_1,R_2}(x) R_3^n(x, y) = 0.$$

In Verbindung mit (12) folgt daraus

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \varepsilon_n(y) \leq \bar{\lambda}(y) \cdot \sup_{x \leq z} d_{R_1,R_2}(x); \qquad \forall z, y \in \Gamma.$$

Wegen $\overline{\lim}_{n\to\infty} \bar{\lambda}(-n) < \infty$ und $\lim_{n\to\infty} d_{R_1,R_2}(-n) = 0$ können wir daraus auf $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n(y) = 0$; $\forall y \in \Gamma$ schließen. Theorem 2 ist damit bewiesen.

Wir zeigen nun

Theorem 3. *Es sei R eine substochastische Matrix über Γ. Ist R schwach verwandt zu T, so erfüllt R die Bedingungen* (T_1), (T_2) *und* (T_3).

Beweis. Das Maß λ_0 mit $\lambda_0(x)=1$; $\forall x\in\Gamma$ ist T-invariant und jedes Verteilungsgesetz auf Γ ist durch λ_0 beschränkt. Weiter ist für jedes Verteilungsgesetz μ auf Γ $\mu*T^n(y)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$; $\forall y\in\Gamma$. Jedes Verteilungsgesetz auf Γ ist also T-fastinvariant und T-äquivalent dem Nullmaß. Da R und T schwach verwandt sind, muß jedes Verteilungsgesetz auf Γ auch R-fastinvariant und R-äquivalent dem Nullmaß sein. Es können also keine R-invarianten Verteilungsgesetze existieren, d. h. R erfüllt die Bedingung (T_1). Nach 2.2 existiert nun ein R-invariantes Maß μ_0, das zu λ_0 T-äquivalent ist. Wir haben also $\lim_{n\to\infty}\mu_0*T^n(y)=1$; $\forall y\in\Gamma$. Wegen $\mu_0*T^n(y)=\mu_0(y-n)$; $\forall y\in\Gamma$, $\forall n\in N$ ist Letzteres gleichbedeutend mit $\lim_{n\to\infty}\mu_0(-n)=1$. R erfüllt also auch die Bedingung (T_2).

Wir wollen jetzt annehmen, daß R die Bedingung (T_3) nicht erfüllt. Es gibt dann eine Folge $y<y_1<y_2<y_3\ldots$ von ganzen Zahlen und eine Folge $(n_i)_{i\in N}$ natürlicher Zahlen, so daß für alle $i\in N$ gilt: $R^{n_i}(y_i, y)>0$. Wir setzen $\lambda(y_i)=i/R^{n_i}(y_i, y)$; $\forall i\in N$ und $\lambda(x)=0$; $\forall x\notin\{y_i;\ i\in N\}$. Das Maß λ ist nach Konstruktion T-fastinvariant und T-äquivalent zum Nullmaß. Andererseits ist $\lambda*R^{n_i}(y)\geqq\lambda(y_i)R^{n_i}(y_i, y)=i$; $\forall i\in N$. λ ist also nicht R-fastinvariant. Damit erhalten wir einen Widerspruch dazu, daß R und T schwach verwandt sind. R muß also auch die Bedingung (T_3) erfüllen. Theorem 3 ist damit bewiesen.

Aus der Tatsache, daß eine substochastische Matrix R schwach verwandt zur Translation T ist, folgt im allgemeinen nicht, daß R die Bedingung (T_0) erfüllt und mit Theorem 3 dann eine Fasttranslation sein muß. Die Klasse der zu T schwach verwandten Matrizen ist wesentlich größer als die Klasse der Fasttranslationen. Das zeigt schon folgende einfache Klasse von Beispielen:

Es sei f eine eineindeutige Abbildung von Γ auf Γ mit:

a) $f(-n)\xrightarrow[n\to\infty]{}-\infty$;

b) Es existieren ganze Zahlen m_1 und m_2 mit

$$\{x\in\Gamma;\ x\leqq m_1\}\subseteq\{f(-n);\ n\in \mathrm{N}\}\subseteq\{x\in\Gamma;\ x\leqq m_2\}.$$

c) Für alle $m\in N$ existiert ein $n\geqq m$ mit $f(-n)\neq f(-n+1)-1$.

Wir setzen $T_f(x, y)=_{\mathrm{Def}}T(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$; $\forall x, y\in\Gamma$. Aus a) und b) kann man dann leicht ableiten, daß T_f und T schwach verwandt sind. Wegen c) erfüllt jedoch T_f nicht die Bedingung (T_0).

Im Abschnitt 5. zeigen wir nun:

Theorem 4. *Es sei R eine substochastische Matrix über Γ. Ist R verwandt zu T, so erfüllt R die Bedingung* (T_0).

Aus 2.1. und den Theoremen 1, 2, 3 und 4 erhalten wir zusammenfassend

Theorem 5. *Für eine substochastische Matrix R über Γ sind folgende Aussagen gleichwertig:*

1. *R ist eine Fasttranslation.*
2. *R ist verwandt zur Translation.*
3. *R ist analytisch verwandt zur Translation.*

Die Menge der T-fastinvarianten z. Pf. fällt nun mit der Menge der endlich faststationären z. Pf. zusammen, während eine z. Pf. genau dann T-invariant ist, wenn sie endlich stationär ist.

Als Folgerung aus 2.3. und Theorem 5 erhalten wir deshalb:

4.1. *Für eine Fasttranslation R gelten folgende Aussagen.*

1. *Eine z. Pf. ist genau dann R-fastinvariant, wenn sie endlich faststationär ist.*

2. *Durch* $V_R(P) = {}_R[P]$ *ist eine eineindeutige Abbildung* V_R *von der Menge der endlich stationären z. Pf. auf die Menge der R-invarianten z. Pf. gegeben. Dabei ist für jede R-invariante z. Pf.* $\bar{P}$

$$V_R^{-1}(\bar{P}) = {}_T[\bar{P}]$$

Weiter folgt aus Theorem 5 unter Verwendung von 2.1 und 2.2.:

4.2. Für eine Fasttranslation R gelten folgende Aussagen:

1. *Ein Maß* $\mu \in M'$ *ist genau dann R-fastinvariant, wenn die Folge* $(\mu(-n))_{n \in N}$ *konvergiert.*

2. *Zwei R-fastinvariante Maße* μ_1 *und* μ_2 *sind genau dann R-äquivalent, wenn gilt:* $\lim n \to \infty\, \mu_1(-n) = \lim n \to \infty\, \mu_2(-n)$.

3. *Es gibt genau ein R-invariantes Maß* Π_R *mit* $\lim n \to \infty\, \Pi_R(-n) = 1$.

4. *Für jedes R-fastinvariante Maß* μ *und alle* $x \in \Gamma$ *gilt:* ${}_R[\mu](x) = \Pi_R(x)$ $\lim n \to \infty\, \mu(-n)$.

5. Beweis von Theorem 4. In diesem Abschnitt sei stets R eine substochastische Matrix über Γ, die zur Translation T verwandt ist.
Wir zeigen zunächst:

5.1. *Es existiert eine Folge ganzer Zahlen* $(x_i)_{i \in N}$ *mit* $\Sigma_{i \in N}(1 - R(x_{i+1}, x_i)) < \infty$.

B e w e i s. Es sei $0 < \varepsilon < 1/4$ und $\Phi_0 = \Sigma_{x \in \Gamma}\, \delta_x$. Die z. Pf. δ_{Φ_0} ist T-invariant. Nach 2.3. muß deshalb genau eine R-invariante z. Pf. P_0 existieren, die zu δ_{Φ_0} T-äquivalent ist. Wir haben dann $\lim n \to \infty\, (P_0)^0_{T^n}(1) = 1$. Mithin muß ein $k_1 \in \Gamma$ existieren, so daß für alle $k \leq k_1$ gilt: $P_0^k(1) > 1 - \varepsilon$. Da P_0 R-invariant ist, folgt daraus für alle $n \in N$ und $k \leq k_1 \int P_0(d\Phi)\, (\delta_\Phi)^k_{R^n}(1) > 1 - \varepsilon$. Für jedes $k \leq k_1$ und $n \in N$ existiert deshalb ein $\Phi_{n,k}$ mit

$$(\delta_{\Phi_{n,k}})^k_{R^n}(1) > 1 - \varepsilon. \tag{13}$$

Es ist nun stets

$$(\delta_\Phi)^k_{R^n}(1) = \sum_{\substack{x \in \Gamma \\ \Phi(x) > 0}} \Phi(x) R^n(x, k)\, (1 - R^n(x, k))^{-1} \prod_{y \in \Gamma} (1 - R^n(y, k))^{\Phi(y)}.$$

Unter Verwendung des Lemma aus Abschnitt 6 können wir deshalb aus (13) schließen, daß ein $x_{n,k} \in \Gamma$ existiert mit $\Phi_{n,k}(x_{n,k}) = 1$ und

$$R^n(x_{n,k}, k) \geq 1 - \varepsilon. \tag{14}$$

Das Maß Φ_0 ist T-invariant. Nach 2.1. und 2.2 muß deshalb ein R-invariantes Maß μ existieren mit $\Phi_0 * R^n(y) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mu(y)$; $\forall y \in \Gamma$ und $\mu * T^n(y) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$; $\forall y \in \Gamma$. Es existiert deshalb ein $k_2 \in \Gamma$, so daß für alle $k \leq k_2$ ein n_k existiert mit

$$\sum_{x \in \Gamma} R^n(x, k) \leq 1 + \varepsilon;\ \forall n \geq n_k. \tag{15}$$

Wählen wir $k = \min\{k_1, k_2\}$, so folgt aus (14) und (15)

$$\sum_{x \neq x_{n,k}} R^n(x_{n,k}, k) < 2\varepsilon \tag{16}$$

für alle $n \geq n_k$.

Sei jetzt $\xi_0, \xi_1, \ldots$ eine homogene Markoffsche Kette mit der Anfangsverteilung $\delta_{x_{n,k}}$ und der Übergangsmatrix R.

Wir setzen $a_n = \mathfrak{Z}(''\xi_0 = x_{n,k},\ \xi_n = k,\ \xi_{n-i} \neq x_{i,k}$ für ein i mit $n_k \leq i < n'')$. Wir erhalten dann

$$a_n = \sum_{i=n_k}^{n-1} \sum_{y \neq x_i} \mathfrak{Z}(''\xi_0 = x_{n,k}, \ldots, \xi_{n-i-1} = x_{i+1,k},\ \xi_{n-i} = y'' R^i(y, k).$$

Wegen (16) folgt daraus

$$a_n \leq 2\varepsilon. \tag{17}$$

Mit (14) und (17) können wir nun auf die Gültigkeit folgender Ungleichungskette schließen:

$$\prod_{i=n_0}^{n-1} R(x_{i+1,k},\ x_{i,k})$$

$$\geq \mathfrak{Z}(''\xi_0 = x_n, \ldots, \xi_{n-n_0} = x_{n_0}'') \geq \mathfrak{Z}(,,\xi_0 = x_n, \ldots, \xi_{n-n_0} = x_{n_0},\ \xi_n = k)$$

$$\geq R^n(x_n,\ k) - a_n \geq 1 - 3\varepsilon \geq 1/4.$$

Wir haben damit gezeigt, daß eine Folge ganzer Zahlen $(x_i)_{i \in N}$ existiert mit

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{n} R(x_{i+1},\ x_i) > 0.$$

Das ist aber gleichbedeutend mit der Behauptung von 5.1.

Wir zeigen jetzt:

5.2. *Es sei $(x_i)_{i \in N}$ eine Folge ganzer Zahlen mit $\sum_{i\in N}(1 - R(x_{i+1}, x_i)) < \infty$. Dann existieren ganze Zahlen m_1 und m_2 mit*

$$\{x \in \Gamma;\ x \leq m_1\} \subseteq \{x_i;\ i \in N\} \subseteq \{x \in \Gamma;\ x \leq m_2\}.$$

Beweis. Da R und T verwandt sind, findet für alle $i \in N$ und $m \in \Gamma$ die Konvergenz $\sum_{x \geq m} R^n(x,\ x_i) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ statt. Andererseits folgt aus der Voraussetzung, daß ein $i \in N$ existiert mit $\underline{\lim}_{n\to\infty} R^n(x_{i+n},\ x_i) > 0$. Es muß deshalb gelten:

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty. \tag{18}$$

Setzen wir

$$\lambda(x_i) = \prod_{j \geq i} R(x_{j+1},\ x_j);\quad \forall i \in N$$

und $\lambda(x) = 0$; $\forall x \notin \{x_i;\ i \in N\}$, dann ist $1 \geq \lambda * R^{n+1}(y) \geq \lambda * R^n(y)$; $\forall y \in \Gamma$, $\forall n \in N$. λ ist damit R-fastinvariant und demzufolge auch T-fastinvariant. Letzteres bedeutet, daß die Folge $(\lambda(-n))_{n \in N}$ konvergent ist. Da andererseits auch $\lim_{n\to\infty} \lambda(x_n) = 1$ und $\lambda(y) = 0$; $\forall y \notin \{x_i;\ i \in N\}$ ist, können wir unter Verwendung von (18) auf die Behauptung von 5.2. schließen.

Im weiteren sei jetzt $(x_i)_{i \in N}$ eine Folge ganzer Zahlen mit

$$\sum_{i \in N} (1 - R(x_{i+1},\ x_i)) < \infty. \tag{19}$$

Da R und T verwandt sind, folgt aus 2.1. und Theorem 3, daß R die Bedingung (T_1) erfüllt. Es kann deshalb nur endlich viele $i \in N$ geben, für die ein $j \neq i$ existiert mit $x_i = x_j$. Wir können deshalb ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß stets $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ ist.

Sei nun f eine eineindeutige Abbildung von Γ auf Γ mit $f(-n)=x_n$; $\forall n \in N$. Ist g irgend eine eineindeutige Abbildung von Γ auf Γ und $\bar{R}=((\bar{R}(x, y)))_{x,y}$ eine substochastische Matrix über Γ, dann bezeichnen wir mit $\bar{R}^g$ die durch $\bar{R}^g(x, y)=\bar{R}(g^{-1}(x), \quad g^{-1}(y))$; $\forall x, y \in \Gamma$ definierte substochastische Matrix.

Offensichtlich gilt:

5.3. *Es seien g eine eineindeutige Abbildung von Γ auf Γ und R_1 und R_2 substochastische Matrizen über Γ. R_1 und R_2 sind genau dann verwandt, wenn R_1^g und R_2^g verwandt sind.*

Da R und T verwandt sind, müssen sie nach 2.1 auch schwach verwandt sein. Nach Theorem 3 erfüllt R deshalb die Bedingungen (T_1), (T_2) und (T_3).

Wegen 5.2. können wir dann leicht nachweisen, daß auch $R^{f^{-1}}$ die Bedingungen (T_1), (T_2) und (T_3) erfüllt. Da andererseits mit (19) $R^{f^{-1}}$ auch die Bedingung (T_0) erfüllt, können wir aus Theorem 1 und 2 schließen, daß $R^{f^{-1}}$ verwandt zu T ist. Letzteres ergibt nun in Verbindung mit 5.3., daß T^f und R verwandt sind. Da nach Voraussetzung R und T verwandt sind, erhalten wir damit

5.4. *T^f und T sind verwandt.*

Wir zeigen nun:

5.5. *Für alle $m \geqq 2$ existiert ein n_m, so daß für alle $n \geqq n_m$ eine Folge $k, s_1, \ldots, s_{m-1}$ ganzer Zahlen existiert mit*

$$\{-n, \; -n-1, \ldots, -n-m+1\}=\{x_k, \; x_{k+ms_1+1}, \ldots, x_{k+ms_{m-1}+m-1}\}.$$

Beweis. Wir setzen

$$\Phi_0=\sum_{i=1}^{n} i\delta_{f(i)},$$

$$\Phi_1=\sum_{k \in \Gamma} (T^f)^{k \cdot m}(\Phi_0)$$

$$\Phi_i=(T^f)^{i-1}(\Phi_1); \quad \forall i=1, \ldots, m$$

$$P=\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \delta_{\Phi_i}.$$

P ist nach Konstruktion T^f-invariant.

Wegen 5.4. muß die Folge der Verteilungsgesetze $(P^{0, -1, \ldots, -m+1}_{T^n})_{n \in N}$ konvergieren. Auf Grund von $P^{0, -1, \ldots, -m+1}_{T^n}=P^{-n, \ldots, -n-m+1}$ und der Endlichkeit der Menge aller Verteilungsgesetze π auf N^m, für die ein $n \in N$ existiert mit

$$\pi=P^{-n, \ldots, -n-m+1}$$

ist diese Konvergenz nur möglich, wenn ein $\bar{n}$ existiert mit

$$P^{-n, \ldots, -n-m+1}=P^{\bar{n}, \ldots, -\bar{n}-m+1}; \quad \forall n \geqq \bar{n}. \tag{20}$$

Wir nehmen nun an, es existiert ein $n_0 \geqq \bar{n}$, so daß $k_1, k_2 \in N$ existieren mit $0 \leq k_1 < k_2 \leq m-1$ und $f^{-1}(-n_0-k_1) \equiv f^{-1}(-n_0-k_2) \bmod m$. Wegen der speziellen Konstruktion von P ist Letzteres gleichbedeutend mit $P(_{,,}\Phi(-n_0-k_1)$

$=\Phi(-n_0-k_2)'')=1$. Unter Verwendung von (20) folgt daraus $f^{-1}(-n-k_1) \equiv f^{-1}(-n-k_2) \bmod m$; $\forall n \geq \bar{n}$. Die Menge $\{f^{-1}(-n);\ n \geq \bar{n}\}$ muß deshalb in der Vereinigung von s Äquivalenzklassen modulo m enthalten sein, wobei $s<m$ ist. Wegen $\{f^{-1}(x_i);\ i \in N\}=\{-n;\ n \in N\}$ müssen dann unendlich viele $n \in N$ mit $x_n \geq 0$ existieren. Das ergibt jedoch einen Widerspruch zu 5.2.

Wir haben damit gezeigt, daß für alle $n \geq \bar{n}$ und alle k_1, k_2 mit $0 \leq k_1 < k_2 \leq m-1$ stets gelten muß $f^{-1}(-n-k_1) \not\equiv f^{-1}(-n-k_2) \bmod m$. Da aus 5.2. folgt, daß ein $\hat{n}$ existiert mit $\{f^{-1}(-n);\ n \geq \hat{n}\} \subseteq \{x_n;\ n \geq 0\}$ können wir nun die Behauptung von 5.5. ableiten.

Wir zeigen nun:

5.6. *Es existiert ein $k \in N$ mit $|x_n - x_{n+1}| \leq k$; $\forall n \in N$.*

B e w e i s. Es sei $Q=((Q(x, y)))$, $y \in \{0, 1\}$ eine stochastische Matrix über der Menge $\{0, 1\}$ mit $Q(x, x)=3/4$; $\forall x \in \{0, 1\}$. Das Maß π mit $\pi(x)=1/2$; $\forall x \in \{0, 1\}$, ist das einzige Q-invariante Verteilungsgesetz und es gilt:

$$\pi(y)=\lim_{n\to\infty} Q^n(x, y); \quad \forall x,\ y \in \{0, 1\}. \tag{21}$$

P sei die zu Q und π gehörige T-invariante z. Pf. und $\hat{P}$ die zu P T^f-äquivalente T^f-invariante z. Pf..

(Wegen 5.4. und 2.2. existiert $\hat{P}$ und ist eindeutig bestimmt). Wir nehmen zunächst an, daß gilt:

$$\sup_{n \in N} |x_n - x_{n+m}| = \infty; \quad \forall m \geq 1. \tag{22}$$

Für alle m, n N ist

$$P^{f(k), f(k+1), \ldots, f(k+m)}_{(T^f)^n} = P^{f(k-n), \ldots, f(k+m-n)}; \quad \forall k \in \Gamma. \tag{23}$$

Da $\hat{P}$ T^f-fastinvariant sein muß und $f(-n)=x_n$; $\forall n \in N$, ist, erhalten wir wegen (22) für alle $m \in N$ und $k \in \Gamma$ die Konvergenz

$$\left\| P^{f(k), \ldots, f(k+m)}_{(T^f)^n} - \mathop{\times}_{i=0}^{m} \pi \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(Dabei bezeichnet $\mathop{\times}_{i=0}^{m} \mu_i$ das Produktmaß von Verteilungsgesetzen $\mu_0, \ldots \mu_m$).

Wir haben damit $\hat{P}^{-m, \ldots, m} = \mathop{\times}_{-m}^{m} \pi$; $\forall m \geq 1$, und deshalb auch $\hat{P}^{-m, \ldots, m}_{T^n} = \mathop{\times}_{-m}^{m} \pi$; $\forall m \geq 1$. Wegen $P^{-m, \ldots, m} \neq \mathop{\times}_{-m}^{m} \pi$; $\forall m \geq 1$ kann deshalb nicht die Konvergenz $\hat{P}_{T^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} P$ statt haben. Damit erhalten wir einen Widerspruch dazu, daß T und T^f verwandt sind. Die Annahme unter (22) ist also falsch. Wir nehmen nun an, es existiert ein $m > 1$ mit

$$\sup_{n \in N} |x_n - x_{n+s}| = \infty; \quad \forall s \text{ mit } 0 < s < m, \tag{24}$$
$$|x_n - x_{n+m}| \leq k; \quad \forall n \in N.$$

Für alle $r \geq 0$ und $0 < s < m$ ist dann $\sup_{n \in N} |x_n - x_{n+m.r+s}| = \infty$. Man kann daraus wieder unter Verwendung von (23) ableiten, daß für alle $k \in N$ und alle Folgen $s_1, \ldots, s_{m-1}$ gilt:

(25) $$\widehat{P}^{x_k,\, x_{k+m s_1+1}, \dots, x_{k+m s_{m-1}+m-1}} = \mathop{\times}_{i=1}^{m} \pi.$$

Es müßte nun die Konvergenz

(26) $$\| \widehat{P}^{0, \dots, -m+1}_{T^n} - P^{0, \dots, -m+1} \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

statt haben.

Andererseits können wir aus der T-Äquivalenz von P und $\widehat{P}$, sowie (25) und 5.5 schließen, daß die Konvergenz

$$\left\| \widehat{P}^{-n, \dots, -n-m+1} \mathop{\times}_{i=1}^{m} \pi \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

statt hat. Letzteres ist gleichbedeutend mit

$$\left\| \widehat{P}^{0, \dots, -m+1}_{T^n} - \mathop{\times}_{i=1}^{m} \pi \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Wegen $P^{0, \dots, -m+1} \neq \mathop{\times}\limits_{i=1}^{m} \pi$ haben wir damit einen Widerspruch zu (26). Unsere Annahme unter (24) ist also falsch. 5.6. ist damit bewiesen.

Die Folge $(x_i)_{i \in N}$ besitzt die Eigenschaft (19). Wir müssen zum Beweis von Theorem 4 nur noch folgende Beziehung beweisen.

5.7. *Es existiert ein $n_0 \in N$, so daß gilt: $x_{n+1} = x_n - 1$; $\forall n \geq n_0$.*

B e w e i s. Wir nehmen an, die Behauptung von 5.7. wäre falsch. Nach 5.2 existiert ein $m_1 \in N$ mit $\{-n;\ n \geq m_1\} \subseteq \{x_n;\ n \in N\}$. Auf Grund unserer Annahme und 5.6. müssen dann ein $m \geq 1$ und Folgen natürlicher Zahlen $(\widehat{n}_i)_{i \in N}$ und $(\overline{n}_i)_{i \in N}$ existieren mit

(27) $$(x_{\overline{n}_i} - x_{\overline{n}_i+1}) = m = (x_{\widehat{n}_i+1} - x_{\widehat{n}_i}); \quad \forall i \in N.$$

Wir setzen

$$\widehat{\Phi} = \sum_{i=1}^{m+1} i\delta_i,$$

$$\Phi_0 = \sum_{k \in \Gamma} T^{(m+1)k}(\widehat{\Phi}),$$

$$\Phi_i = T^i(\Phi_0); \quad \forall i = 0, \dots, m,$$

$$P = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} \delta_{\Phi_i}.$$

P ist nach Konstruktion T-invariant.

Wir erhalten deshalb aus (27) für alle $i \in N$

(28) $$P^{m,0} = P^{x_{\widehat{n}_i+1},\, x_{\widehat{n}_i}} = P^{f(-\widehat{n}_i-1),\, f(-\widehat{n}_i)} = P^{f(-1),\, f(0)}_{(Tf)_{\widehat{n}_i}}$$

und ebenso

(29) $$P^{0,m} = P^{f(-1),\, f(0)}_{(Tf)_{\overline{n}_i}}.$$

Nach Konstruktion von P ist nun $P^{m,0}(m, 0)=1/(m+1)$, $P^{0,m}(m, 0)=0$. Aus (28) und (29) können wir deshalb schließen, daß die Folge $(P_{(T^f)^n})_{n\in N}$ nicht schwach konvergiert und P demzufolge nicht T^f-fastinvariant ist. Das ist jedoch ein Widerspruch dazu, daß T und T^f verwandt sind.

5.7. ist damit bewiesen und auch gleichzeitig der Beweis von Theorem 4 abgeschlossen.

6. Eine Abschätzung. In diesem Abschnitt beweisen wir eine Abschätzung, die beim Beweis von Theorem 4 Verwendung findet.

L e m m a. *Es seien $(a_i)_{i\in N}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit $1\geq a_0\geq a_1\geq a_2\geq\cdots$ und*

$$a=\sum_{i\in N} a_i \prod_{k\neq 1}(1-a_k)$$

Ist ε eine reelle Zahl mit $0\leq\varepsilon<1/2$, dann folgen aus der Ungleichung

$$\text{(0)}\qquad a\geq 1-\varepsilon$$

die Ungleichungen

$$\text{(A)}\qquad a_0\geq 1-\varepsilon$$

$$\text{(B)}\qquad \sum_{i\geq 1} a_i\leq \ln 1/(1-\varepsilon)$$

Wir bemerken zunächst, daß jede der Ungleichungen (A) und (B) nicht Verbesserungsfähig ist, im folgenden Sinne:

6.1. *Es gibt eine Folge reeller Zahlen $(a_i)_{i\in N}$, die die Voraussetzung des Lemmas erfüllt und es gilt: $a\geq 1-\varepsilon$, $a_0=1-\varepsilon$.*

6.2. *Für jedes δ mit $0\leq\delta<\ln 1/(1-\varepsilon)$ existiert eine Folge $(a_i)_{i\in N}$, die die Voraussetzung des Lemmas erfüllt und es gilt: $a=1-\varepsilon$, $\Sigma_{i\geq 1}a_i\geq\delta$.*

B e w e i s v o n 6.1.: Man wähle $a_0=1-\varepsilon$ und $a_i=0$ für alle $i\geq 1$. Dann ist $a=a_0=1-\varepsilon$.

B e w e i s v o n 6.2.: Man wähle $a_0=1$, $a_i=1-(1-\varepsilon)1/n$; $\forall i=1,\ldots,n$, $a_i=0$; $\forall i>n$. Dann gilt $a=1-\varepsilon$, $\Sigma_{i\geq 1}a_i=n(1-(1-\varepsilon)1/n)$.
Die Behauptung von 6.2. folgt dann aus

$$\lim_{n\to\infty} n(1-(1-\varepsilon)1/n)=\ln 1/(1-\varepsilon).$$

Offensichtlich gilt nun:

6.3. *Es ist genau dann $a=0$, wenn $\Sigma_{n\in N}a_n=\infty$ oder $a_0=a_1=1$ ist.*

Wir werden deshalb im folgenden stets annehmen, daß $\Sigma_{n\in N}a_n<\infty$ ist. Für eine solche Folge setzen wir

$$F(a_0, a_1,\ldots)=_{\text{Def}}\sum_{i\in N} a_i\prod_{k\neq i}(1-a_k),\quad G(a_0, a_1,\ldots)=_{\text{Def}}\prod_{i\in N}(1-a_i).$$

Es gilt offensichtlich

1) $F(a_0,\ldots)=a_0G(a_1,\ldots)+(1-a_0)F(a_1,\ldots)$.

Weiter folgt aus $\Sigma a_i<\infty$

2) $\lim_{n\to\infty} G(a_n,\ldots)=1$

für jede solcher Folgen $(a_i)_{i\in N}$.

Schließlich erhalten wir durch sukzessive Anwendung von 1)

$$1-G(a_0,\dots)=a_0G(a_1,\dots)+1-G(a_1,\dots)$$
$$=a_0G(a_1,\dots)+\dots+a_{n-1}G(a_n,\dots)+(1-G(a_n,\dots)).$$

Geht man zum Limes über, so erhält man wegen 2)

3) $1-G(a_0,\dots)=a_0G(a_1,\dots)+a_1G(a_2,\dots)+\dots=\sum_{i\in N} a_iG(a_i,\dots).$

Offensichtlich gilt folgende Gleichung

4) $F(a_0,\ a_1,\dots)=\sum_{i\geq 1} a_i\ G(a_{i+1},\dots)\prod_{j=0}^{i-1}(1-a_j)+a_0G(a_1,\dots).$

Durch Vergleich von 3) und 4) bekommt man

5) $F(a_0,\ a_1,\dots)+G(a_0,\ a_1,\dots)\leq 1$

für alle Folgen $(a_i)_{i\in N}$ mit $\Sigma a_i<\infty$.

Nach (2) muß deshalb

6) $\lim_{n\to\infty}(F(a_n,\dots)+G(a_n,\dots))=1$

sein. Weiter hat man

$$1-F(a_0,\dots)-G(a_0,\dots)\geqq 1-F(a_1,\dots)-G(a_1,\dots).$$

Aus 1) folgt nun

α) $G(a_1,\dots)\geq F(a_0,\dots)\geqq F(a_1,\dots)$

oder

β) $F(a_1,\dots)\geq F(a_0,\dots)\geq G(a_1,\dots).$

Wir haben damit:

6.4. *Ist* $G(a_1,\dots)\geq F(a_1,\dots)$ *dann muß gelten* $F(a_0,\dots)\geq F(a_1,\dots)$.

6.5. *Ist* $G(a_1,\dots)\leq F(a_1,\dots)$ *dann muß gelten* $F(a_0,\dots)\leq F(a_1,\dots)$.

Wir zeigen nun

6.6. *Ist* $a_0\geq 1/2$, *so ist* $F(a_0,\dots)\leq a_0$.

Beweis. Angenommen es ist $a_0<F(a_0,\dots)$ dann gilt nach 1) und 5)

$$a_0<a_0G(a_1,\dots)+(1-a_0)F(a_1,\dots)\leq a_0(1-F(a_1,\dots))+(1-a_0)F(a_1,\dots)$$

und damit $0<F(a_1,\dots)(1-2a_0)$. Wegen $F(a_1,\dots)\geq 0$ muß deshalb $a_0\leq 1/2$ sein. 6.6. ist damit bewiesen.

Wir zeigen nun

6.7. *Ist* $G(a_1,\dots)>F(a_1,\dots)$ *dann ist* $a_0>1/2$.

Beweis. Angenommen es wäre $a_0\leq 1/2$. Dann ist nach 1) und 5)

$$F(a_0,\dots)=a_0G(a_1,\dots)+(1-a_0)F(a_1,\dots)$$
$$\leq\frac{1}{2}G(a_1,\dots)+\frac{1}{2}F(a_1,\dots)\leq 1/2.$$

Wegen (0) und $0\leq\varepsilon<1/2$ ist jedoch $F(a_0,\dots)>1/2$. Wir haben damit einen Widerspruch, so daß 6.7. bewiesen ist.

6.8. *Es gilt* $G(a_1,\dots)>F(a_1,\dots)$.

Beweis. Wir nehmen an, es ist $G(a_1,\dots)\leqq F(a_1,\dots)$. Aus 1) und 5) erhalten wir wie beim Beweis von 6.7., daß diesmal $a_0<1/2$ sein muß. Berücksichtigen wir 6.7., so haben wir damit

$$a_0>1/2\leftrightarrow G(a_1,\dots)>F(a_1,\dots),$$

$$a_0<1/2\leftrightarrow G(a_1,\dots)\leqq F(a_1,\dots).$$

Aus 6.5. und unserer Annahme folgt nun $F(a_1,\dots)\geqq F(a_0,\dots)>1/2$ und $a_1\leqq a_0<1/2$. Wir haben also $F(a_1,\dots)>1/2$, $a_1<1/2$. Das ergibt $G(a_2,\dots)\leqq F(a_2,\dots)$, $F(a_1,\dots)>1/2$. Aus $F(a_0,\dots)>1/2$, $G(a_1,\dots)\leqq F(a_1,\dots)$ folgt damit stets $F(a_1,\dots)>1/2$, $G(a_2,\dots)\leqq F(a_2,\dots)$. Wenn unsere Annahme richtig ist, würde also stets $F(a_n,\dots)>1/2$; $\forall n\in N$, und damit wegen 5) $G(a_n,\dots)<1/2$; $\forall n\in N$, sein. Das ist jedoch ein Widerspruch zu 2). 6.8. ist damit bewiesen.

Aus 6.7. und 6.8. folgt nun $a_0>1/2$, $G(a_1,\dots)>F(a_1,\dots)$. Mit 6.6. und a) ergibt das

8) $a_0\geqq F(a_0, a_1,\dots)$

und

9) $G(a_1,\dots)\geqq F(a_0,\dots)$

8) ergibt, daß aus (0) stets (A) folgt.

Wegen $G(a_1,\dots)\leqq\exp(-\Sigma_{i-1}a_i)$ erhalten wir aus 9) und (A) $\sum_{i-1} a_i\leqq \ln 1/F(a_0,\dots)\leqq \ln 1/(1-\varepsilon)$. Es gilt also auch (B). Das Lemma ist damit bewiesen.

LITERATUR

1. K. L. Chun. Markov chains with stationary transitions probabilities. Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1960.
2. H. Debes, A. Liemant, J. Kerstan, K. Matthes. Verallgemeinerungen eines Satzes von Dobruschin III. *Math. Nachr.*, **50**, 1971, 99—139.
3. K. -H. Fichtner. Verdünnungen zufälliger Punktfolgen. *Math. Nachr.* **64**, 1974, 33—56.
4. K. -H. Fichtner. Gleichverteilungseigenschaften substochasticher Kerne und zufällige Punktfolgen. *Math. Nachr*,. **62**, 1974, 251—260.
5. J. Kerstan, K. Matthes, J. Mecke. Unbegrenzt teilbare Punktprozesse. Berlin, 1974.
6. J. Kerstan, K. -H. Fichtner. Asymptotische Invarianz bei Halbgruppen stochastischer Kerne II. *Serdica*, **5**, 1979, 310—315.
7. K. -H. Fichtner J. Kerstan,. Invarianz von Punktprozessen bei zufälligen Bewegungen I. *Serdica*, **6**, 1980, 324—340.

Friedrich-Schiller-Universität
Sektion Mathematik
UHH, 17. 06 69 Jena

Eingegangen am 30. 3. 1978