Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ИНВАРИАНТЫ УЛЬМА — КАПЛАНСКОГО ГРУППЫ НОРМИРОВАННЫХ ЕДИНИЦ ЦЕНТРА ГРУППОВОГО КОЛЬЦА FC-p-ГРУППЫ НАД КОММУТАТИВНЫМ КОЛЬЦОМ ХАРАКТЕРИСТИКИ p

НАКО А. НАЧЕВ, ТОДОР Ж. МОЛЛОВ

Пусть G является FC-p-группой, L — коммутативное кольцо с единицей характеристики p и $f_\alpha(S)$ — α-й инвариант Ульма-Капланского группы $S(LG)$ нормированных единиц центра группового кольца LG, где α — порядковое число. Пусть $C(g)$ — централизатор элемента g в группе G, $R_n=\{g/C(g)=C(g^{p^n}),\ g\in G)\}$ и $A^p=\{a^p/a\in A\}$, $A\subset G$. Если α — порядковое число, то индуктивно вводятся L_α и G_α: $L_0=L$; $L_1=L^p=\{a^p/a\in L\}$; если $\alpha=\beta+1$, to $L_\alpha=(L_\beta)^p$, а если $\alpha-1$ не существует, то $L_\alpha=\cap_{\beta<\alpha}L_\beta$; $G_0=G$; если $\alpha=\beta+1$, то $G_\alpha=(G_\beta\cap R_1)^p$, а если $\alpha-1$ не существует, то $G_\alpha=\cap_{\beta<\alpha}G_\beta$. Пусть α — порядковое число. Если L_α или G_α бесконечны, то $f_\alpha(S)=\max(|L_\alpha|, |G_\alpha|)$ при $G_\alpha+G_{\alpha+1}$. Если $G_\alpha=G_{\alpha+1}$, то $f_\alpha(S)=0$ при $L_\alpha=L_{\alpha+1}$ и $f_\alpha(S)=\max(|L_\alpha|L_{\alpha+1}|, |G_\alpha|)$ при $L_\alpha\neq L_{\alpha+1}$, где $L_\alpha/L_{\alpha+1}$ — фактор-группа аддитивной группы L_α по ее подгруппе $L_{\alpha+1}$. Если L_α и G_α конечны, то $f_\alpha(S)=\omega_\alpha-\omega_{\alpha+1}$, где $\omega_i=(|\varepsilon(G_i)|-1)\log_p|L_i|-(|\varepsilon(G_{i+1})|-1)\log_p|L_{i+1}|$, $i=\alpha,\ \alpha+1$, а $\varepsilon(G_s)$ — множество классов сопряженных элементов в G_s. Если α бесконечно, то в выражении для $f_\alpha(S)$ на месте G_i можно поставить $C_i(i=\alpha,\ \alpha+1)$, где C — центр группы G.

Пусть LG — групповое кольцо FC-p-группы G (т. е. это — p-группа с конечными классами сопряженных элементов) над коммутативным кольцом L с единицей характеристики p. В настоящей работе вычисляются инварианты Ульма-Капланского группы $S(LG)$ нормированных единиц центра группового кольца LG. Безуспешная попытка описать эту группу сделана в [3], где, за исключением случая, когда G — абелева группа, результаты конечного и бесконечного случая ошибочны (например, когда G — группа кватернионов порядка 8, а L — поле вычетов по модулю 2). Отметим, что описание группы $S(LG)$, когда G — счетная абелева p-группа, а L — счетное совершенное поле характеристики p, дано в [1], а когда L — кольцо с единицей характеристики p и G — прямое произведение произвольного множества циклических p-групп — в [4]. Подгруппа $S(LG)$ нормированных единиц силовской p-подгруппы группы единиц кольца LG изучается в [5] и [6], когда L — поле характеристики p и G — смешанная абелева группа, соответственно с предположением о счетности и несчетности L и G. В [8] закончено изучение группы $S(LG)$, когда L — кольцо характеристики p, а G — абелева p-группа.

Основные результаты настоящей статьи опубликованы в [9].

Используются следующие обозначения и понятия:

G — FC-p-группа;

L — коммутативное кольцо с единицей характеристики p;

$\varrho(M)$ — множество классов, на которые разлагается множество $M \subseteq G$ по отношению ϱ эквивалентности, а $\varrho(a)$, где $a \in M$ — класс, содержащий a;

$\in'$ — знак пробегает;

ε — бинарное отношение сопряженности в G, т. е. $a\varepsilon b$ тогда и только тогда, когда b сопряжен с a;

$\overline{\varepsilon(a)} = \Sigma_{x \in' \varepsilon(g)} x$ — классовая сумма $\varepsilon(a)$ в групповом кольце LG;

τ — бинарное отношение в G, определенное следующим образам: $a\tau b$ тогда и только тогда, когда $a^p = b^p$;

$Z(T)$ — центр группы (кольца) T; $Z(G) = C$; $Z(LG) = Z$;

N — множество натуральных чисел;

N_0 — множество неотрицательных целых чисел;

$$AB = \{ab / a \in' A,\ b \in' B\}, \quad \text{где} \quad A,\ B \subseteq G;$$

$$A^{p^k} = \{a^{p^k} / a \in A\}, \quad A \subseteq G; \quad k \in N_0.$$

Если $x = \Sigma_{g \in G} \lambda_g g$, $\lambda_g \in L$, то supp $(x) = \{g / \lambda_g \neq 0,\ g \in G\}$;

$C(A)$ — централизатор подмножества A в группе G;

$|M|$ — мощность множества M;

ω — наименьшее бесконечное порядковое число;

$\aleph_0$ — наименьшее бесконечное кардинальное число;

$[G:H]$ — индекс подгруппы H в G;

L_α вводится индуктивно: $L_0 = L$; $L_1 = L^p = \{a^p / a \in L\}$; если $\alpha = \beta + 1$, то $L_\alpha = (L_\beta)^p$, а если $\alpha - 1$ не существует, то $L_\alpha = \cap_{\beta < \alpha} L_\beta$;

$$L(p^n) = \{a / a^{p^n} = 0,\ a \in L\},\ n \in N;\ L[p] = \{a / a^p = 1,\ a \in L\};$$

$O(g)$ — порядок элемента g;

$U(L)$ — группа единиц кольца L;

$\diagdown$ — разность двух множеств.

Для доказательства основного результата необходимы некоторые определения и вспомогательные утверждения.

Определение 1. *Пусть* $R_n = \{g / C(g) = C(g^{p^n}),\ g \in G\}$, *где* $n \in N_0$. *Элементы множества* R_1 *называются регулярными, а множества* $G \diagdown R_1$ — *иррегулярными.*

Легко видеть, что R_n — инвариантное множество для всех $n \in N_0$.

Определение 2. *Если* α — *любое порядковое число, то* G_α *определяется индуктивно*: $G_0 = G$; *если* $\alpha = \beta + 1$, *то* $G_\alpha = (G_\beta \cap R_1)^p$; *если* $\alpha - 1$ *не существует, то* $G_\alpha = \cap_{\beta < \alpha} G_\beta$.

Если G — абелева группа, то G_α совпадает с G^{p^α}, определенной в [5]. Доказывается индуктивно, что G_α — инвариантное множество.

Лемма 3. *Для каждого порядкового числа* α *имеет место* $G_\alpha \supseteq G_{\alpha+1}$.

Доказательство. Для $\alpha = 0$ утверждение очевидно. Пусть утверждение верно для всех $\beta < \alpha$. Тогда, если $\alpha = \beta + 1$, то $G_\alpha = (G_\beta \cap R_1)^p \supseteq (G_\alpha \cap R_1)^p = G_{\alpha+1}$, где включение имеет место согласно индуктивному предположению. Пусть $\alpha - 1$ не существует. Тогда из $x \in G_{\alpha+1} = (G_\alpha \cap R_1)^p = ((\cap_{\beta<\alpha} G_\beta) \cap R_1)^p$ следует, что $x = y^p$, где $y \in G_\beta \cap R_1$ для каждого $\beta < \alpha$, т. е. $x \in (G_\beta \cap R_1)^p = G_{\beta+1} \subseteq G_\beta$ для каждого $\beta < \alpha$ или $x \in G_\alpha$.

Лемма 4. *Для каждого $n \in N_0$ имеет место $G_n = R_n^{p^n}$.*

Доказательство. При $n=0$ формула очевидна. Пусть $n>0$ и $G_{n-1} = R_{n-1}^{p^{n-1}}$. Тогда $G_n = (G_{n-1} \cap R_1)^p = (R_{n-1}^{p^{n-1}} \cap R_1)^p$. Пусть $a \in (R_{n-1}^{p^{n-1}} \cap R_1)^p$. Тогда $a = x^p$ где $x \in R_{n-1}^{p^{n-1}} \cap R_1$ и $x = y^{p^{n-1}}$, $y \in R_{n-1}$, следовательно $a = y^{p^n}$. Отсюда получается $C(y) = C(y^{p^{n-1}}) = C(x) = C(x^p) = C(a) = C(y^{p^n})$, т. е. $a = y^{p^n} \in R_n^{p^n}$. Наоборот, из $a \in R_n^{p^n}$ следует $a = y^{p^n}$, где $y \in R_n$. Тогда $z = y^{p^{n-1}} \in R_{n-1}^{p^{n-1}}$, потому что $R_n \subseteq R_{n-1}$. Так как $y \in R_n$, то $C(z) = C(z^p)$, т. е. $z \in R_1$. Следовательно $a = z^p \in (R_{n-1}^{p^{n-1}} \cap R_1)^p$ и $G_n = R_n^{p^n}$.

Лемма 5. *Если $a \in G \setminus C$, то существует $n \in N$, такое, что уравнение*

$$x^{p^n} = a \tag{1}$$

не имеет решения в G.

Доказательство. Существует $g \in G \setminus C$, такой, что $a \notin C(g)$. Ввиду $1 < [G:C(g)] < \aleph_0$ существует нормальный делитель H группы G, содержащийся в $C(g)$ и имеющий также конечный индекс в G, следовательно фактор-группа G/H конечна и $aH \neq H$. Если допустим, что (1) имеет решение в G для любого $n \in N$, то уравнение $(xH)^{p^n} = aH \neq H$ будет иметь решение в конечной группе G/H для любого $n \in N$, что является противоречием.

Лемма 6. *Для любого порядкового числа α имеет место $G_\alpha \cap C = C_\alpha$.*

Доказательство. Если $\alpha = 0$, то формула очевидна. Пусть утверждение верно для всех $\beta < \alpha$. Если $\alpha - 1$ не существует, то, используя определение 2, легко установить искомую формулу. Если $\alpha = j+1$, то, используя определение G_α, $R_1 \supseteq C$ и индуктивное предположение, получится $G_\alpha \cap C = (G_j \cap R_1)^p \cap C = (G_j \cap (C \cup (R_1 \setminus C)))^p \cap C = ((G_j \cap C) \cup (G_j \cap (R_1 \setminus C)))^p \cap C = C_j^p \cup ((G_j \cap (R_1 \setminus C))^p \cap C) = C_\alpha \cup \varnothing = C_\alpha$, где в предпоследнем равенстве используется утверждение, что если $x \in R_1 \setminus C$, то $x^p \notin C$.

Следствие 7. *Для любого порядкового числа $\alpha \geq \omega$ имеет место $G_\alpha = C_\alpha$.*

Доказательство. Допустим, что существует $a \in G_\alpha \setminus C$. Согласно лемме 3 и лемме 4, для любого $n \in N$ имеет место $a \in G_n = R_n^{p^n}$. Следовательно существует $g_n \in R_n$, удовлетворяющий уравнению (1) (для всех $n \in N$), что противоречит лемме 5. Таким образом $G_\alpha \subseteq C$, откуда по лемме 6 получится $G_\alpha = C_\alpha$.

Лемма 8. *Если для некоторого $n \in N_0$ имеет место $G_n = G_{n+1}$, то $G_n = C_n$.*

Доказательство. Используя определение 2, индуктивно по $i \in N_0$ доказывается, что $G_{n+i} = G_{n+i+1}$. Допустим, что $a \in G_n \setminus C$. Из леммы 5 следует, что существует $k \in N$, такое, что уравнение $x^{p^k} = a$ не имеет решения в G. Пусть $l \geq \max(k, n)$, $l \in N$. По доказанному имеет место $G_n = G_l$. Следовательно $a \in G_l \setminus C \subseteq R_l^{p^l}$, т. е. существует $x \in R_l$, такой, что $a = x^{p^l}$, что является противоречием.

Лемма 9. *Если для $n \in N_0$ имеет место $G_n \setminus G_{n+1} \subseteq C$, то $G_k = C_k$ для каждого $k \geq n$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $G_n = C_n$. Тогда, используя определение 2, по индукции следует, что $G_k = C_k$, $k \geq n$. Допустим, что $a \in G_n \setminus C_n$. Из леммы 6 следует, что $a \notin C$. Тогда из следствия 7 вытекает, что существует натуральное $l \geq n$, такое, что $a \in G_l \setminus G_{l+1} \subseteq R_l^{p^l}$, т. е. $a = x^{p^l}$, где $x \in R_l \subseteq R_n$. Из этого включения и леммы 4 получается $b = x^{p^n} \in G_n$. Если допустим, что $b \in G_{n+1}$, то обязательно существует $y \in R_{n+1}$, такой, что $b = y^{p^{n+1}}$. Тогда из $C(x) = C(b) = C(y)$ и $C(x) = C(a)$ следует, что $C(y) = C(a) = C(y^{p^{l+1}})$, т. е. $y \in R_{l+1}$, откуда получается $a \in G_{l+1}$, что является противоречием. Следовательно $b \in G_n \setminus G_{n+1} \subseteq C$ и $a = b^{p^{l-n}} \in C$, что невозможно. Следовательно $G_n \setminus C_n = \varnothing$, откуда $G_n \subseteq C_n$ и по лемме 6 следует $G_n = C_n$.

Замечание 10. *Пусть $a, b, x, y \in G$. В таком случае*

(а) *имеет место $a \in Z(C(b)$ тогда и только тогда, когда $C(a) \supseteq C(b)$;*

(б) *если $C(x) = C(a)$, $C(y) = C(b)$ и $xy = yx$, то $ab = ba$.*

Доказательство (а) тривиально. Докажем (б). Так как $y \in C(x) = C(a)$, то y и a коммутируют, т. е. $a \in C(y) = C(b)$ или $ab = ba$.

Определение 11. *Назовем элементы a и b группы G ортогональными или пару (a, b) ортогональной, и запишем $a \perp b$, если*

$$C(a) \cap C(b) = C(ab). \tag{2}$$

В противном случае элементы (пару) назовем псевдоортогональными (псевдоортогональной).

Легко видеть, что если $a \perp b$, то $ab = ba$.

Лемма 12. *Если $a, b \in R_1$, то $a^p \perp b^p$ тогда и только тогда, когда $ab \in R_1$ и $a \perp b$.*

Доказательство. Имеют место формулы

$$C(a) = C(a^p), \quad C(b) = C(b^p). \tag{3}$$

Необходимость. Имеет место

$$C(a^p) \cap C(b^p) = C(a^p b^p). \tag{4}$$

Если положим $a^p = x$ и $b^p = y$, то следует $xy = yx$ и по замечанию 10 (в) — $ab = ba$, откуда из (3) получается, что a, b, x и y коммутируют. Если $u \in C(ab)$, то u коммутирует с ab и с $(ab)^p = a^p b^p = xy$, т. е. $u \in C(xy)$, откуда из (4) и (3) следует $u \in C(a) \cap C(b)$ или место (2), т. е. $a \perp b$. Далее, $C(ab) \subseteq C((ab)^p) = C(xy) = C(x) \cap C(y) = C(a) \cap C(b) = C(ab)$, где второе равенство выполнено ввиду (4), а последнее — ввиду $a \perp b$. Следовательно $C(ab) = C((ab)^p)$ или $ab \in R_1$.

Достаточность. Так как $ab \in R_1$ и $a \perp b$, то $C(a^p b^p) = C((ab)^p) = C(ab) = C(a) \cap C(b) = C(a^p) \cap C(b^p)$, следовательно $a^p \perp b^p$.

Лемма 13. *Если $a, b \in G_n$, $n \in N_0$ и $a \perp b$, то $ab \in G_n$.*

Доказательство. При $n = 0$ лемма верна. Пусть лемма верна для $n-1$, $n \geq 1$. Из определения 2 следует, что $a = x^p$ и $b = y^p$, где $x, y \in G_{n-1} \cap R_1$. По лемме 12 имеем, что $xy \in R_1$ и $x \perp y$. Из индуктивного предположения вытекает, что $xy \in G_{n-1}$. Так как $xy = yx$, то $ab = (xy)^p \in (G_{n-1} \cap R_1)^p = G_n$.

Следствие 14. *Имеет место $G_n C_n \subseteq G_n$.*

Лемма 15. *Если $(m, p) = 1$, то для каждого $y \in G$ имеет место $C(y^m) = C(y)$, следовательно $C(y^{-1}) = C(y)$.*

Доказательство. Пусть $O(y)=p^n$ и $x\in C(y^m)$, т. е.

$$x^{-1}y^m x = y^m. \tag{5}$$

Из $(m, p)=1$ следует, что существуют целые числа m_1 и k_1, такие, что $mm_1=1-p^n k_1$, следовательно, возводя (5) в степен m_1, получится $x^{-1}y^{mm_1}x = y^{mm_1}$ или $x^{-1}yx=y$, т. е. $x\in C(y)$, откуда $C(y)=C(y^m)$.

Следствие 16. *Пусть $(m, p)=1$. Имеет место $y^m\in R_n$ тогда и только тогда, когда $y\in R_n$.*

Доказательство. Согласно лемме 15 имеет место $C(y)=C(y^m)$ и $C(y^{p^n})=C((y^{p^n})^m)$. Тогда утверждение вытекает из следующих двух фактов: $y\in R_n$ тогда и только тогда, когда $C(y)=C(y^{p^n})$, и $y^m\in R_n$ тогда и только тогда, когда $C(y^m)=C((y^m)^{p^n})$.

Лемма 17. *Если $a\in G_n$ и $(m, p)=1$, то $a^m\in G_n$, следовательно $a^{-1}\in G_n$.*

Доказательство. При $n=0$ утверждение очевидно. Пусть лемма верна для $n-1\in N_0$. Поскольку $a\in G_n=(G_{n-1}\cap R_1)^p$, то $a=y^p$, где $y\in G_{n-1}\cap R_1$ и $a^m=(y^m)^p$. По индуктивному предположению $y^m\in G_{n-1}$. Так как по следствию 16 $y^m\in R_1$, то $a^m\in(G_{n-1}\cap R_1)^p=G_n$.

Предложение 18. *Если $|G_n|\geqq\aleph_0$ и $G_n\neq G_{n+1}$ для $n\in N_0$, то $|G_n\setminus G_{n+1}|=|G_n|$.*

Доказательство. Различаются следующие случаи.

1) Если $G_n\setminus G_{n+1}\subseteq C$, то, согласно лемме 9, имеет место $G_k=C_k$ для $k\geqq n$, следовательно $|G_n\setminus G_{n+1}|=|C_n\setminus C_{n+1}|=|C_n|=|G_n|$;

2) Пусть $G_n\setminus G_{n+1}\nsubseteq C$. Ввиду $G_n=C_n\cup(G_n\setminus C_n)$ различаются следующие подслучаи;

2.1) Пусть $|G_n|=|C_n|$ и

2.1.1) $C_n\neq C_{n+1}$. Если $x\in C_n\setminus C_{n+1}$, то по лемме 6 $x\notin G_{n+1}$, следовательно $|G_n|=|C_n|=|C_n\setminus C_{n+1}|\leqq|G_n\setminus G_{n+1}|$, т. е. $|G_n|=|G_n\setminus G_{n+1}|$.

2.1.2) Пусть $C_n=C_{n+1}$. Если $a\in G_n\setminus G_{n+1}$, то из следствия 14 получается $aC_{n+1}\subseteq G_n$. Если допустим, что $(aC_{n+1})\cap G_{n+1}\neq\emptyset$, то будет существовать $c_n\in C_n$ и $g_{n+1}\in G_{n+1}$, такие, что $ac_n=g_{n+1}$ т. е. $a=c_n^{-1}g_{n+1}$, откуда по следствию 14 получается $a\in G_{n+1}$, что является противоречием. Следовательно $(aC_{n+1})\cap G_{n+1}=\emptyset$ и $aC_{n+1}\subseteq G_n\setminus G_{n+1}$. Тогда $|G_n|=|C_n|=|aC_{n+1}|\leqq|G_n\setminus G_{n+1}|$, т. е. $|G_n\setminus G_{n+1}|=|G_n|$;

2.2) Пусть $|G_n|=|G_n\setminus C_n|$. Для любого $k\in N_0$ определим множество

$$A_k=G_k\setminus(G_{k+1}\cup C). \tag{6}$$

Очевидно $\cup_{k=n}^{\infty}A_k\subseteq G_n\setminus C$, где $n\in N_0$. Наоборот, пусть $a\in G_n\setminus C$. Тогда, по следствию 7, существует $k\geqq n$, такое, что $a\in G_k\setminus G_{k+1}$. Следовательно имеет место

$$G_n\setminus C='\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,\quad k\in N_0, \tag{7}$$

где $'\cup$ — знак раздельного объединения множества. Докажем, что

$$|A_k|\geqq|A_{k+1}|,\quad k\in N_0. \tag{8}$$

Для этой цели определим отображение $\varphi_k: A_k\cap R_1\to G_{k+1}\setminus C$ следующим образом: $\varphi_k(a_k)=a_k^p$ для любого $a_k\in A_k\cap R_1$. Определение корректно, так как

$a_k^p \in (A_k \cap R_1)^p \subseteq G_{k+1}$ и $a_k^p \notin C$. Если $a_{k+1} \in A_{k+1}$, то из (6) видно, что $a_{k+1} \in G_{k+1} \setminus C$. Следовательно, по определению 2, существует $a_k \in G_k \cap R_1$, такой, что $a_{k+1} = a_k^p$. Очевидно $a_k \notin C$. Если допустим, что $a_k \in G_{k+1}$, то $a_{k+1} = a_k^p \in G_{k+2}$, что противоречит равенству (6). Следовательно $a_k \in A_k \cap R_1$ и $A_{k+1} \subseteq \mathrm{Im}\, \varphi_k$, где $\mathrm{Im}\, \varphi_k$ — множество образов отображения φ_k. Тогда

(9) $$|A_{k+1}| \leqq |\mathrm{Im}\, \varphi_k| \leqq |A_k \cap R_1| \leqq |A_k|,$$

чем формула (8) доказана.

Докажем, что если A_k — конечное и непустое множество, то в (8) неравенство строго. Пусть A_{k+1} — непустое множество и $a_{k+1} \in A_{k+1}$. Так как $A_{k+1} \subseteq \mathrm{Im}\, \varphi_k$, то существует $a_k \in A_k \cap R_1$, такой, что $\varphi_k(a_k) = a_{k+1}$. Если $O(a_k) = p^m$, то из (6) вытекает, что $m > 1$. Из леммы 17 следует, что $b_k = a_k^{p^{m-1}+1} \in G_k$. Если допустим, что $b_k \in G_{k+1}$, то из той же леммы вытекает $b_k^{1-p^{m-1}} = a_k \in G_{k+1}$, что противоречит (6). Из последнего равенства видно, что $b_k \notin C$. Таким образом $b_k \in A_k$. Кроме того, по следствию 16, имеет место $b_k \in R_1$. Следовательно $b_k \in A_k \cap R_1$. С другой стороны, $\varphi_k(b_k) = a_{k+1}$ и $b_k \neq a_k$, следовательно, $|\mathrm{Im}\, \varphi_k| < |A_k \cap R_1|$. Тогда, согласно (9), получается, что $|A_{k+1}| < |A_k|$.

Далее, если допустим, что $|A_n| < \aleph_0$, то согласно (8) следует, что $|A_k| < \aleph_0$ и, по вышедоказанному, существует $s \in N$, такой, что $A_{s+i} = \varnothing$ для любого $i \in N_0$. Тогда из (7) получится, что $G_n \setminus C$ — конечное множество, что противоречит условию, ибо $G_n \setminus C = G_n \setminus C_n$ Следовательно $|A_n| \geqq \aleph_0$ и из условия из (7) и (8) получится $|G_n| = |G_n \setminus C| = |A_n| = |G_n \setminus (G_{n+1} \cup C)| \leqq |G_n \setminus G_{n+1}|$, т. е. $|G_n| = |G_n \setminus G_{n+1}|$. Предложение доказано.

Если $a, b \in G$, то говорят, что $a(\varepsilon\tau)b$ тогда и только тогда, когда существует $x \in G$, такой, что $a\varepsilon x$ и $x\tau b$ [7, стр. 18].

Лемма 19. *Отношение $\varepsilon\tau$ в множестве R_n — отношение эквивалентности.*

Доказательство. Докажем, что $\tau\varepsilon = \varepsilon\tau$, следовательно $\varepsilon\tau$ будет отношением эквивалентности [7, стр. 26]. Пусть $a(\tau\varepsilon)b$, где $a, b \in R_n$. Тогда существует $x \in R_n$, такой, что $a\tau x$ и $x\varepsilon b$. Пусть $b = g^{-1}xg$ для некоторого $g \in G$. Положим $y = g^{-1}ag \in R_n$, т. е. $a\varepsilon y$. Получаем $y\tau b$, откуда справедливо $a(\varepsilon\tau)b$. Наоборот, если $a(\varepsilon\tau)b$ для $a, b \in R_n$, то существует $y \in R_n$, такой, что $a\varepsilon y$ и $y\tau b$. Пусть $a = g^{-1}yg$ для некоторого $g \in R_n$. Полагая $x = g^{-1}bg$, получим $a\tau x$ и $x\varepsilon b$, т. е. $a(\tau\varepsilon)b$. Лемма доказана.

Лемма 20. *Если $a, b \in R_1$, то $|\tau(a) \cap \varepsilon(b)| \leqq 1$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда в R_1 существует класс по отношению $\varepsilon\tau$, содержащий одновременно классы $\tau(a)$ и $\varepsilon(b)$.*

Доказательство. Если допустим, что $\tau(a) \cap \varepsilon(b)$ содержит по крайней мере два различных элемента g и h, то существует $t \in G$, такой, что $g = t^{-1}ht$ и $h^p = g^p = t^{-1}h^p t$. Тогда $t \in C(h^p) = C(h)$. Следовательно $g = h$, что является противоречием.

Пусть $x \in \tau(a) \cap \varepsilon(b)$ и $x \in R_1$. Так как τ и ε рефлексивны, то $\varepsilon(x) \subseteq (\varepsilon\tau)(x)$ и $\tau(x) \subseteq (\varepsilon\tau)(x)$, т. е. класс $(\varepsilon\tau)(x)$ множества R_1 содержит $\tau(a)$ и $\varepsilon(b)$. Наоборот, если в R_1 существует класс $\varepsilon\tau(c)$, содержащий $\tau(a)$ и $\varepsilon(b)$, то $a(\tau\varepsilon)b$. Следовательно существует $x \in R_1$, такой, что $a\tau x$ и $x\varepsilon b$ т. е. $x \in \tau(a) \cap \varepsilon(b)$. Далее надо применить первую часть леммы.

Лемма 21. *Множество $\tau(R_1)$ инвариантно относительно внутренних автоморфизмов группы G.*

Доказательство. Пусть $A\in\tau(R_1)$ и a_1, $a_2\in A$. Так как R_1 — инвариантное множество, то для любого $x\in G$ выполнено $(x^{-1}a_1x)\tau(x^{-1}a_2x)$. Кроме того, если $z\in R_1$ и $z\tau(x^{-1}ax)$ для некоторого элемента $a\in A$, то $z^p=x^{-1}a^px$. Следовательно $xzx^{-1}\in A$ и $z\in x^{-1}Ax$, т. е. $x^{-1}Ax$ — полный класс по отношению τ:

Определение 22. *Определим отображение* $\exp: L(p)\to L[p]$ *следующим образом:*

$$\exp(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{p-1}}{(p-1)!},\quad x\in' L(p). \tag{10}$$

Так как $1/k!$ *принадлежит полю* $Z^{(p)}$ *вычетов по модулю* p, *то* $\exp(x)\in L[p]$.

Лемма 23. *Отображение* $\exp: L(p)\to L[p]$ *инъективно.*

Доказательство. Пусть $c=1+b=\exp(a)$, где $a\in L(p)$. Элемент a — решение уравнения

$$\exp(x)=c. \tag{11}$$

Следовательно a удовлетворяет системе

$$\sum_{s=k}^{p-1} a_{ks}x^s=b^k,\quad a_{kk}=1,\quad a_{ks}\in Z^{(p)},\quad k=1,\,2,\ldots,p-1, \tag{12}$$

где k-ое уравнение получается из первого возведением в степень k, а $Z^{(p)}$ — поле вычетов по модулю p. Однако из уравнения (11) следует система (12). Непосредственно видно, что если (11) обладает решением x, то x определяется однозначно из (12) как полином $f(b)$ элемента b с коэффициентами из $Z^{(p)}\subseteq L$. Следовательно exp — инъективное отображение.

Лемма 24. *Если* $x\in L$, *то* $exp(x)\in L_1[p]$ *тогда и только тогда, когда* $x\in L_1(p)$.

Доказательство. Пусть $\exp(x)=1+b\in L_1[p]$, т. е. $b\in L_1(p)$. Тогда справедливо (12), откуда получается, что x — полином элемента b с коэффициентами из $Z^{(p)}$. Следовательно, по сокращенной формуле Ньютона, $x\in L_1(p)$. Обратная часть очевидна.

Определение 25. *Элементы* x *и* y *из* $L(p)$ *назовем релятивными и запишем* $x\square y$, *если* $x^ny^{p-n}=0$ *для* $n=1,\,2,\ldots,p-1$.

Лемма 26. *Если* $x\square y$, *то* $\exp(x+y)=\exp(x)exp(y)$, *откуда* $\exp(nx)=(\exp(x))^n$ *для* $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots.$

Доказательство. Имеет место $\exp(x)=\Sigma_{i=0}^{p-1}x^i/i!$, $\exp(y)=\Sigma_{i=0}^{p-1}y^i/i!$ и $\exp(x+y)=\Sigma_{i=0}^{p-1}(x+y)^i/i!$. Так как $x\square y$, то $\exp(x)\exp(y)=\Sigma_{i=0}^{p-1}A_i$, где $A_i=\Sigma_{k+j=i}c_{kj}x^ky^j$, $i=0,\ 1,\ 2,\ldots,p-1$. Очевидно $A_i=\Sigma_{s=0}^{i}x^{i-s}y^s/(i-s)!\,s!=(x+y)^i/i!$, откуда следует утверждение леммы.

В следующих рассуждениях используется формула Сегала [11]

$$\overline{\varepsilon(g)^p}=\begin{cases}\overline{\varepsilon(g^p)}, & \text{если } g\in R_1;\\ 0, & \text{если } g\notin R_1;\end{cases} \tag{13}$$

Лемма 27. *Если* α — *порядковое число, то* Z_α *является* L_α-*модулем с базисом* $\overline{\varepsilon(G_\alpha)}$, *т. е.* $x\in Z_\alpha$ *тогда и только тогда, когда*

$$x=\sum_{\varepsilon(g)\in'\varepsilon(G_\alpha)}\lambda_g\overline{\varepsilon(g)},\quad \lambda_g\in L_\alpha. \tag{14}$$

Доказательство. Очевидно множество $\varepsilon(G_\alpha)$ линейно независимо над L_α. Хорошо известно, что если $x \in Z_\alpha$, то

$$x = \sum_{\varepsilon(g) \in' \varepsilon(G)} \lambda_g \overline{\varepsilon(g)}, \qquad \lambda_g \in L. \tag{15}$$

Докажем индуктивно по α, что в (15) любая классовая сумма $\overline{\varepsilon(g)}$, для которой $\lambda_g \neq 0$, принадлежит $\overline{\varepsilon(G_\alpha)}$, и что $\lambda_g \in L_\alpha$. При $\alpha = 0$ утверждение очевидно. Допустим, что утверждение верно для всех $\beta < \alpha$. Пусть $\alpha - 1$ не существует. Так как $x \in \cap_{\beta<\alpha} Z_\beta$, то $x \in Z_\beta$ для каждого $\beta < \alpha$. Согласно индуктивному предположению для любого $\overline{\varepsilon(g)}$, участвующего в записи (15) элемента x с коэффициентом $\lambda_g \neq 0$, имеет место $\overline{\varepsilon(g)} \in \overline{\varepsilon(G_\beta)}$, т. е. $g \in G_\beta$ и $\lambda_g \in L_\beta$ для всех $\beta < \alpha$. Следовательно $g \in G_\alpha$ или $\overline{\varepsilon(g)} \in \overline{\varepsilon(G_\alpha)}$ и $\lambda_g \in L_\alpha$. Пусть $\alpha = j+1$. Тогда $x \in (Z_j)_1$ или $x = y^p$, $y \in Z_j$. Пусть $y = \Sigma_{\varepsilon(h) \in' \varepsilon(G)} \mu_h \overline{\varepsilon(h)}$. Согласно индуктивному предположению, любое $\varepsilon(h) \in \varepsilon(G_j)$, т. е. $h \in G_j$ и $\mu_h \in L_j$. Тогда

$$x = \sum_{\varepsilon(h) \in' \varepsilon(G_j)} \mu_h^p \overline{\varepsilon(h)}^p = \sum_{\varepsilon(h) \in' \varepsilon(G_j \cap R_1)} \mu_h^p \overline{\varepsilon(h^p)}, \tag{16}$$

где последнее равенство следует из (13). Из последнего равенства (16) и из (15) вытекает, что для любого $\lambda_g \neq 0$, участвующего в (15), справедливо $\lambda_g = \mu_g^p \in (L_j)_1 = L_\alpha$ и $\overline{\varepsilon(g)} = \overline{\varepsilon(h^p)}$, где $h \in G_j \cap R_1$. Без ограничения общности можно предполагать, что $g = h^p \in G_\alpha$, т. е. $\overline{\varepsilon(g)} \in \overline{\varepsilon(G_\alpha)}$. Лемма доказана.

Отметим, что группа $U(Z(LG))$ единиц центра группового кольца LG совпадает с центром $Z(U(LG))$ группы единиц кольца LG, т. е.

$$U(Z(LG)) = Z(U(LG)). \tag{17}$$

Действительно, если $x \in U(Z)$, то $x \in Z(U(LG))$. Наоборот, если $x = \Sigma \lambda_i g_i \in Z(U(LG))$ и g_0 — фиксированный элемент в этой записи с $\lambda_0 \neq 0$, то сопрягая элемент x с различными представителями группы G по $C(g_0)$, получим, что все элементы из $\varepsilon(g_0)$ будут участвовать в записи x с коэффициентом λ_0. Следовательно $x \in Z$, чем (17) доказана.

Обозначим $(U(Z))_\alpha = U_\alpha(Z)$. Используя формулу (13) и лемму 27, индуктивно получим

$$U_\alpha(Z) = U(Z_\alpha). \tag{18}$$

Лемма 28. *Если α — порядковое число и U — группа единиц центра Z, то $x \in U_\alpha$ тогда и только тогда, когда для представления элемента x типа* (14) *выполнено*

$$\sum_{g \in' C_\alpha \cap \operatorname{supp}(x)} \lambda_g \in U(L_\alpha). \tag{19}$$

Доказательство. Для доказательства используется идея [4] и [2, стр. 86]. Если x принадлежит Z_α и имеет запись (14), то отображение χ, для которого $\chi(x) = \Sigma_{s\,,\,\ni \operatorname{supp}(x)} \lambda_g$, является гомоморфизмом кольца Z_α на L_α, причем $U(Z_\alpha)$ отображается на $U(L_\alpha)$, откуда следует (19).

Наоборот, пусть для представления x типа (14) выполнено (19). Будем говорить, что нецентральный элемент g имеет степень n регулярности, если

$g \in R_n \setminus R_{n+1}$, $n \in N_0$. Если n — максимальная степень регулярности элементов $\operatorname{supp}(x) \setminus C$, а p^m — максимальный порядок центральных элементов из $C_\alpha \cap \operatorname{supp}(x)$ и $r = \max(m, n)$, то по (13) имеем

$$x^{p^r} = \sum_{g \in' C_\alpha \cap \operatorname{supp}(x)} \lambda_g^{p^r} \Big(\sum_{g \in C_\alpha \cap \operatorname{supp}(x)} \lambda_g \Big)^{p^r} \in (U(L_\alpha))^{p^r},$$

т. е. $x \in U(Z_\alpha)$ и согласно (18) $x \in U_\alpha$.

Определение 29. *Множество*

$$S(LG) = \{x = \sum_{\varepsilon(g) \in' \varepsilon(G),\ \lambda_g \in L} \lambda_g \overline{\varepsilon(g)} / \sum_{g \in C \cap \operatorname{supp}(x)} \lambda_g = 1\} \tag{20}$$

является p-подгруппой U и совпадает с группой нормированных единиц центра группового кольца LG.

Из леммы 28 и определения 29 получается

$$U = U(L) \times S(LG). \tag{21}$$

Если $\bar{S}(LG)$ и $\bar{U}(L)$ — силовские p-подгруппы, соответственно центр Z и группы $U(L)$, то из (21) следует

$$\bar{S}(LG) = \bar{U}(L) \times S(LG). \tag{22}$$

Обозначим $(S(LG))_\alpha = S_\alpha(LG)$.

Из (21), (18) и леммы 28 получается, что для любого порядкового числа α имеет место

$$S_\alpha(LG) = \{x = \sum_{\varepsilon(g) \in' \varepsilon(G_\alpha)} \lambda_g \overline{\varepsilon(g)} / \sum_{g \in' C_\alpha \cap \operatorname{supp}(x)} \lambda_g = 1,\ \ \lambda_g \in L_\alpha\}. \tag{23}$$

Следствие 30. *Для любого порядкового числа $\alpha \geq \omega$ справедливо $S_\alpha(LG) = S(L_\alpha G_\alpha)$.*

Доказательство следует из (23) и следствия 7. Из (22) получается следующее утверждение.

Следствие 31. *Группа $S(LG)$ нормированных единиц центра группового кольца совпадает с его силовской p-подгруппой тогда и только тогда, когда L — кольцо без нильпотентных элементов.*

Лемма 32. *Пусть $a \in G_n \setminus G_{n+1}$, b, $c \in G_{n+1}$, $a_1 \varepsilon a$, $a_1 \perp b$ и a_1, b, $c \in Z(C(a))$. Тогда $a_1 b \neq c$.*

Доказательство. Допустим, что $a_1 b = c$. Из b, $c \in G_{n+1}$ вытекает, что существуют элементы y, $z \in G_n \cap R_1$, такие, что $b = y^p$ и $c = z^p$. Следовательно $C(y) = C(b)$ и $C(z) = C(c)$. Тогда из коммутативности элементов a_1, b и c и из замечания 10 (б) следует $yz = zy$. Так как $a_1 \perp b$, то

$$C(a_1) \cap C(b) = C(c). \tag{24}$$

Из $a_1 \varepsilon a$ имеем $a_1 = x^{-1} a x$ для некоторого $x \in G$, откуда $C(a_1) = x^{-1} C(a) x$. Тогда из $a_1 \in Z(C(a))$ и замечания 10 (а) следует, что $C(a_1) \supseteq C(a)$ и, так как сопряженные подгруппы имеют одинаковые индексы в G, то $C(a_1) = C(a)$. Из полученного равенства и из (24) приходим к $C(c) = C(a) \cap C(b) = C(a)$, где последнее равенство следует из $b \in Z(C(a))$ и из замечания 10 (а). Из вышеуказанных рассуждений получается $a_1 = cb^{-1} = (zy^{-1})^p$. Докажем, что $zy^{-1} \in G_n \cap R_1$, откуда будет видно противоречие $a \in G_{n+1}$. Действительно,

(25) $$C(zy^{-1})\subseteq C((zy^{-1})^p)=C(z^p y^{-p})=C(a_1)=C(a),$$

т. е. $C(zy^{-1})\subseteq C(a)$. Кроме того, из $C(y)=C(b)\supseteq C(a)$, где включение следует из замечания 10 (а), получается $y\in Z(C(a))$ и аналогично $z\in Z(C(a))$, т. е. $zy^{-1}\in Z(C(a))$ или $C(zy^{-1})\supseteq C(a)$. Следовательно

(26) $$C(a)=C(zy^{-1}).$$

Так как $C(a)=C(c)=C(z)$ и по лемме 15 $C(y^{-1})=C(y)\supseteq C(a)=C(z)$, то из (26) следует $C(zy^{-1})=C(z)\cap C(y^{-1})$, т. е. $y^{-1}\perp z$, и по леммам 17 и 13 получится $zy^{-1}\in G_n$. Кроме того, из (26) и коммутативности y и z вытекает $C(zy^{-1})=C(z^p y^{-p})=C((zy^{-1})^p)$, т. е. $zy^{-1}\in R_1$, чем лемма доказана.

Определение 33. *Пусть ϱ — бинарное отношение в декартовом произведении $\varepsilon(a)\times\varepsilon(b)$, определенное следующим образом: $(x, y)\varrho(x', y')$ тогда и только тогда, когда существует $g\in G$, такое, что $x'=g^{-1}xg$ и $y'=g^{-1}yg$.*

Очевидно ϱ — отношение эквивалентности в $\varepsilon(a)\times\varepsilon(b)$.

Лемма 34. *Все пары в одном классе $\varrho((x, y))$ ортогональны или псевдоортогональны.*

Доказательство. Пусть $x\perp y$ и $(x', y')\varrho(x, y)$. Тогда $x'=g^{-1}xg$ и $y'=g^{-1}yg$, где $g\in G$ и $C(x'y')=g^{-1}C(xy)g=g^{-1}(C(x)\cap C(y))g=C(x')\cap c(y')$, т. е. $x'\perp y'$.

Определение 35. *Один класс по отношению ϱ назовем ортогональным (псевдоортогональным), если в нем существует по крайнем мере одна ортогональная (псевдоортогональная) пара.*

Лемма 36. *Если A — псевдоортогональный класс декартового произведения $\varepsilon(a)\times\varepsilon(b)$ по отношению ϱ, то $\Sigma_{(a,b)\in' A}ab=0$.*

Доказательство. Используем идею доказательства леммы 4 [11]. Определим отображение $f: A\to G$, полагая $f(a, b)=ab$. Тогда $\Sigma_{(a,b)\in' A}ab=\Sigma_{g\in' f(A)}\lambda_g g$, где $\lambda_g=|f^{-1}(g)|$ и $f^{-1}(g)$ — полный прообраз g при отображении f. Покажем, что p делит λ_g. Пусть g — фиксированный элемент из $f(A)$. В $f^{-1}(g)$ вводим отношение α, полагая $(a_1, b_1)\alpha(a_2, b_2)$ тогда и только тогда, когда существует $x\in C(g)$, такой, что $a_2=x^{-1}a_1x$ и $b_2=x^{-1}b_1x$. Очевидно α — отношение эквивалентности. Следовательно $f^{-1}(g)$ разлагается на непересекающиеся классы по этому отношению. Пусть (a_1, b_1) — фиксированный элемент множества $f^{-1}(g)$ и M — полная система представителей смежных классов централизатора $C(g)$ по $C(a_1)\cap C(b_1)$. Определим отображение $\varphi: M\to\alpha((a_1, b_1))$ следующим образом: для любого $x\in M$ пусть $\varphi(x)=(x^{-1}a_1x, x^{-1}b_1x)$. Очевидно φ — биективное отображение. Следовательно $|\alpha((a_1, b_1))|=|M|=[C(g):(C(a_1)\cap C(b_1))]=p^k$, где $k\geqq 1$, так как A — псевдоортогональный класс. Тогда

$$\lambda_g=\sum_{\alpha((a_1,b_1))\in\alpha(f^{-1}(g))}|\alpha((a_1, b_1))|=sp,\quad s\in N,$$

для всех $g\in f(A)$, что и требовалась доказать.

Следствие 37. *Если $M^\perp$ — множество ортогональных классов декартового произведения $\varepsilon(a)\times\varepsilon(b)$ по отношению ϱ, то*

$$\overline{\varepsilon(a)}\,\overline{\varepsilon(b)}=\sum_{A\in' M^\perp}\ \sum_{(a_1,\, b_1)\in' A}a_1b_1.$$

Если D — подгруппа группы G конечного индекса, и отображение $\sigma_D=\sigma$, определенного таким образам, что $\sigma\overline{\varepsilon(g)}=\overline{\varepsilon(g)\cap C(D)}$, если $\varepsilon(g)\cap C(D)$

$\neq \varnothing$ и $\sigma\overline{\varepsilon(g)}=0$, если $\varepsilon(g)\cap C(D)=\varnothing$, то L — линейное продолжение отображения σ является гомоморфизмом кольца Z в $Z(LN(D))$, где $N(D)$ — нормализатор D в G и называется гомоморфизмом Брауэра, определенным для группы D (см. [10]).

Замечание. В [10] гомоморфизм σ_D Брауэра определен для конечной группы G и поля L характеристики p. Нетрудно видеть, что этот гомоморфизм имеет место и в случае, когда D — подгруппа конечного индекса FC-p-группы G и L — кольцо характеристики p, как было упомянуто и выше.

Лемма 38. *Если $g\in G$, то $C(C(g))=Z(C(g))$.*

Доказательство. Пусть $C(g)=D$. Если $x\in C(D)$, то $x^{-1}gx=g$, т. е. $x\in D$ или $x\in C(D)\cap D=Z(D)$, откуда $C(D)\subseteq Z(D)$. Обратное включение очевидно.

Лемма 39. *Если $a\in G_n\setminus G_{n+1}$, b, $c\in G_{n+1}$ и $D=C(a)$, то*

$$(\mathrm{supp}\,(\sigma\overline{\varepsilon(a)}\sigma\overline{\varepsilon(b)}))\cap \mathrm{supp}\,\sigma\overline{\varepsilon(c)}=\varnothing\,, \tag{27}$$

где $\sigma=\sigma_D$ — гомоморфизм Брауэра относительно группы D.

Доказательство. Допустим, что существует элемент x, принадлежащий левой части (27). Тогда $x=a_1b_1$, где $a_1\varepsilon a$ и $b_1\varepsilon b$. Кроме того $x=c_1$, $c_1\varepsilon c$, c_1, a_1, $b_1\in C(D)=Z(D)$, где равенство следует из леммы 38. Принимая во внимание следствие 37 и определение σ, получим $a_1\perp b_1$. Согласно лемме 32, применяемой для элементов a, a_1, b_1, c_1, следует $a_1b_1\neq c_1$, что противоречит предположению.

Пусть M — полная система представителей множества $G_n\cap R_1$ по отношению $\varepsilon\tau$.

Лемма 40. *Если a, $b\in M$ и $\varepsilon(a^p)=\varepsilon(b^p)$, то $a=b$.*

Доказательство. Из $\varepsilon(a^p)=\varepsilon(b^p)$ вытекает $a^p=x^{-1}b^px=(x^{-1}bx)^p$, где $x\in G$. Тогда $a\tau(x^{-1}bx)$ и $x^{-1}bx\varepsilon b$, следовательно $a(\tau\varepsilon)b$. Так как, согласно лемме 19, $\tau\varepsilon=\varepsilon\tau$ и a, $b\in M$, то $a=b$.

Лемма 41. *Имеет место формула $|M|=|\varepsilon(G_{n+1})|$.*

Доказательство. Определим отображение $\varphi: M\to\varepsilon(G_{n+1})$ следующим образом: для $a\in M$ положим $\varphi(a)=\varepsilon(a^p)$. Из леммы 40 следует, что если $a\neq b$, то $\varphi(a)\neq\varphi(b)$. Если $\varepsilon(u)\in\varepsilon(G_{n+1})$, то существует $b\in G_n\cap R_1$, такое, что $b^p=u$. Из определения M следует, что существует $a\in M$, такое, что $b\in(\varepsilon\tau)(a)$. Тогда существует $x\in G_n\cap R_1$, такое, что $b\varepsilon x$ и $x\tau a$, причем $\varphi(a)=\varepsilon(x^p)=\varepsilon(b^p)=\varepsilon(u)$. Таким образом φ — биективное отображение. Лемма доказана.

Пусть P — полная система представителей классов множества $G_n\setminus R_1$ по отношению ε. Ввиду (14) и леммы 20 получается, что любой элемент $x\in Z_n$ обладает однозначной канонической записью типа

$$x=\sum_{g\in' T}\alpha_g\overline{\varepsilon(g)},\qquad T=P\cup(\bigcup_{a\in' M}\tau(a)),\qquad \alpha_g\in L_n. \tag{28}$$

Лемма 42. *Элемент x кольца Z_n принадлежит $\bar{S}_n[p]$ тогда и только тогда, когда для представления x типа (28) справедливо*

$$\sum_{g\in'\tau(a)}\alpha_g\in\begin{cases}1+L_n(p), & \text{если}\quad 1\in\tau(a)\\ L_n(p), & \text{если}\quad 1\notin\tau(a)\end{cases} \tag{29}$$

для любого $a\in M$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x \in \bar{S}_n[p]$. Тогда x имеет вид (28) и $x^p = 1$. Из равенства (13) получается

$$1 = \sum_{g \in' T} \alpha_g^p (\overline{\varepsilon(g)})^p = \sum_{\substack{g \in' \bigcup \tau(a) \\ a \in' M}} \alpha_g^p \overline{\varepsilon(g^p)}. \tag{30}$$

Из свойства отношения τ и леммы 20 видно, что последнее равенство формулы (30) можно записать в виде $1 = \Sigma_{a \in' M} (\Sigma_{g \in' \tau(a)} \alpha_g^p) \overline{\varepsilon(a^p)}$ и из леммы 40 вытекает, что оно в канонической записи, откуда следует (29). Достаточность очевидна, если учесть лемму 20. Лемма доказана.

Если для некоторого порядкового числа α имеет место $L_\alpha = L_{\alpha+1}$, то L_α называется максимальным p-делимым подкольцом кольца L.

Следствие 43. *Максимальная делимая подгруппа группы $S(LG)$ совпадает с $S(L^* C^*)$, где L^* — максимальное p-делимое подкольцо кольца L и C^* — максимальная делимая подгруппа центра C группы G.*

Доказательство. Пусть α — первое порядковое число, для которого $S_\alpha(LG) = S_{\alpha+1}(LG)$. Тогда из формулы (23), следствия 7 и леммы 8 вытекает $L_\alpha = L_{\alpha+1} = L^*$ и $G_\alpha = C_\alpha = C_{\alpha+1} = C^*$. На основании той же формулы следует, что $S_\alpha(LG) = S(L^* G^*)$, а это и требовалось.

Обозначим $S_\alpha(LG)[p]$ через $S_\alpha[p]$. Если α — порядковое число, то $f_\alpha(S) = \operatorname{rank}(S_\alpha[p]/S_{\alpha+1}[p])$ называется α-м инвариантом Ульма — Капланского группы $S(LG)$ [12, стр. 182].

Теорема 44. *Пусть G — FC-p-группа, C — ее центр, L — коммутативное кольцо с единицей характеристики p, $S(LG)$ — группа нормированных единиц центра группового кольца LG и $f_\alpha(S)$ — α-ый инвариант Ульма — Капланского группы $S(LG)$, где α — порядковое число. Если $G_\alpha = G_{\alpha+1}$ и $L_\alpha = L_{\alpha+1}$, то $S_\alpha(LG) = S(L_\alpha C_\alpha)$ и, при $C_\alpha \neq 1$, разлагается в прямое произведение квазициклических групп типа p^∞, мощность множества которых равняется $\max(|L_\alpha|, |C_\alpha|)$. Если по крайней мере одно из этих условий не выполнено и L_α или G_α бесконечны, то*

$$f_\alpha(S) = \begin{cases} \max(|L_\alpha|, |G_\alpha|), & \text{если } G_\alpha \neq G_{\alpha+1}; \\ \max(|L_\alpha/L_{\alpha+1}|, |C_\alpha|), & \text{если } G_\alpha = G_{\alpha+1} \text{ и } L_\alpha \neq L_{\alpha+1}, \end{cases} \tag{31}$$

где $L_\alpha/L_{\alpha+1}$ — фактор-группа аддитивной группы L_α по ее подгруппе $L_{\alpha+1}$. Если L_α и G_α конечны, то

$$f_\alpha(S) = \omega_\alpha - \omega_{\alpha+1}, \tag{32}$$

где $\omega_i = (|\varepsilon(G_i)| - 1) \log_p |L_i| - (|\varepsilon(G_{i+1})| - 1) \log_p |L_{i+1}|$, $i = \alpha, \alpha+1$. Если $\alpha \geq \omega$, то в (31) и (32) на месте G_i можно поставить $C_i (i = \alpha, \alpha+1)$.

Доказательство. Если $\alpha \geq \omega$ или для $\alpha \in N_0$ выполнено $G_\alpha = G_{\alpha+1}$, то, из следствия 30, леммы 8, леммы 27 и (23) вытекает, что $S_\alpha(LG)$ совпадает с абелевой группой $S(L_\alpha C_\alpha)$ и теорема верна (см. [8]). Пусть $\alpha = n < \omega$ и $G_n \neq G_{n+1}$. Различаем следующие случаи.

1) Пусть G_n и L_n конечны. Обозначим через M полную систему представителей множества $G_n \cap R_1$ по отношению к $\varepsilon\tau$ и через δ — число решений системы

$$\sum_{g \in' \tau(a)} \alpha_g = \begin{cases} 1 + \beta_a, \ \beta_a \in L_n(p), & \text{если } 1 \in \tau(a); \\ \beta_a, \ \beta_a \in L_n(p), & \text{если } 1 \notin \tau(a), \end{cases} \tag{33}$$

где $a\in' M$, с неизвестными $\alpha_g\in L_n(g\in'\cup_{a\in' M}\tau(a))$ и β_a. Согласно лемме 42 имеет место

$$(34)\qquad |\bar{S}_n[p]|=\delta|L_n|^{|P|},$$

где P — полная система представителей множества $G_n\setminus R_1$ по отношению ε. Для данного $a\in M$ обозначим через δ_a число решений соответствующего уравнения в (33). Очевидно $\delta_a=|L_n|^{|\tau(a)|-1}|L_n(p)|$. Учитывая кольцевой изоморфизм $L_n/L_n(p)\cong L_{n+1}$, получим

$$(35)\qquad |L_n(p)|=|L_n|/|L_{n+1}|,$$

откуда $\delta_a=|L_n|^{|\tau(a)|}/|L_{n+1}|$. Тогда $\delta=\Pi_{a\in' M}\delta_a=|L_n|^{|\sum_{a\in' M}|\tau(a)||}/|L_{n+1}|^{|M|}=|L_n|^{|T\setminus P|}/|L_{n+1}|^{|M|}$, где для последнего равенства используется (28). Подставляя последнее выражение δ в (34), приходим к $|\bar{S}_n[p]|=|L_n|^{|T|}/|L_{n+1}|^{|M|}$. Очевидно $|T|=|\varepsilon(G_n)|$, а согласно лемме 41 — $|M|=|\varepsilon(G_{n+1})|$. Тогда получится $|\bar{S}_n[p]|=|L_n|^{|\varepsilon(G_n)|}/|L_{n+1}|^{|\varepsilon(G_{n+1})|}$. Из (22) следует, что $|S_n[p]|=|\bar{S}_n[p]|/|\bar{L}_n[p]|=|L_n|^{|\varepsilon(G_n)|-1}/|L_{n+1}|^{|\varepsilon(G_{n+1})|-1}$, так как $|L_n[p]|=|L_n(p)|=|L_n|/|L_{n+1}|$ согласно (35). Используя $f_n(S)=\log_p|S_n[p]/S_{n+1}[p]|$, получим (32).

2) Пусть G_n или L_n — бесконечное множество. Различаем следующие подслучаи:

2.1) Пусть $|L_n|\geq|G_n|$ и

2.1.1) пусть $G_n\setminus G_{n+1}$ содержит по крайней мере один иррегулярный элемент g. Согласно (13) имеет место

$$(36)\qquad \overline{\varepsilon(g)}^p=0.$$

По лемме 28 элемент $\overline{\varepsilon(g)}=u\in Z_n\setminus Z_{n+1}$. Из (36) видно, что $\lambda u\in Z_n(p)$. Поэтому можно образовать элементы типа $x_\lambda=\exp(\lambda u)$, $\lambda\in L_n$. Из определения 22 и формулы (20) вытекает, что $x_\lambda\in S_n[p]$. Если $\mu\neq\lambda$ и $\mu\in L_n$, то $\lambda u\,\square\,\mu u$, так как $(\lambda u)^n(\mu u)^{p-n}=0$ для $n=1, 2, \ldots, p-1$. Допустим, что $\exp(\lambda u)\exp^{-1}(\mu u)\in S_{n+1}[p]$. Так как $\lambda u\,\square\,(-\mu u)$, то по лемме 26 получится $\exp(\lambda-\mu)u\in S_{n+1}[p]$. По лемме 24 следует $(\lambda-\mu)u\in Z_n^p(p)\subseteq Z_{n+1}$, что является противоречием. Следовательно имеет место (31).

2.1.2) Пусть $G_n\setminus G_{n+1}$ содержит только регулярные элементы. Зафиксируем элемент $g\in G_n\setminus G_{n+1}$, где $O(g)=p^m$. Тогда $\varepsilon(g)\neq\varepsilon(g^{p^{m-1}+1})$. В противном случае будет существовать $x\in G$, такой, что $x^{-1}gx=g^{p^{m-1}+1}$, и после возведения этого равенства в степень p получится $x^{-1}g^px=g^p$, т. е. $x\in C(g^p)=C(g)$, откуда вытекает $g=g^{p^{m-1}+1}$, что противоречит порядку элемента g. Тогда $u=\overline{\varepsilon(g)-\varepsilon(g^{p^{m-1}+1})}\in Z_n\setminus Z_{n+1}$ и, используя (13), получим $u^p=0$. Далее относительно элемента u проводятся те же самые рассуждения, как в случае 2.1.1),

2.2) Пусть $|G_n|>|L_n|$. По предложению 18 имеет место $|G_n|=|G_n\setminus G_{n+1}|$. Различаем следующие подслучаи:

2.2.1) Пусть $|G_n\setminus G_{n+1}|=|G_n\setminus(G_{n+1}\cup R_1)|$. Образуем сумму $x_a=1+\varepsilon(a)$, где $a\in G_n\setminus(G_{n+1}\cup R_1)$. Из (23) и (13) следует, что $x_a\in S_n[p]$. Пусть $\varepsilon(a)\neq\varepsilon(b)\in\varepsilon(G_n\setminus(G_{n+1}\cup R_1))$. Допустим, что $x_ax_b^{-1}\in S_{n+1}[p]$. Тогда

$1+\overline{\varepsilon(a)}=(1+\overline{\varepsilon(b)})(1+\Sigma_c\gamma_c\overline{\varepsilon(c)})$, где $\varepsilon(c)\in\varepsilon(G_{n+1})$ и $\gamma_c\in L_n$. На этом равенстве действуем гомоморфизмом $\sigma=\sigma_D$ Брауэра, где $D=C(b)$. Получается

$$1+\sigma\overline{\varepsilon(a)}=(1+\sigma\overline{\varepsilon(b)})(1+\sum_{\varepsilon(c)\in'\varepsilon(G_{n+1})}\gamma_c\sigma\overline{\varepsilon(c)}, \qquad \gamma_c\in L_n. \tag{37}$$

Так как b — элемент $\sigma\overline{\varepsilon(b)}$, то $\sigma\overline{\varepsilon(b)}\neq\sigma\overline{\varepsilon(a)}$. Тогда из (37) следует, что в записи его правой части существует по крайней мере один элемент c', для которого $\gamma_{c'}\sigma\overline{\varepsilon(c')}\neq 0$. Равенство (37) можно записать в виде $\sigma\overline{\varepsilon(a)}=\sigma\overline{\varepsilon(b)}+\Sigma_c\gamma_c\sigma\overline{\varepsilon(c)}+\Sigma_c\gamma_c\sigma\overline{\varepsilon(b)}\sigma\overline{\varepsilon(c)}$ Очевидно $\sigma\overline{\varepsilon(c')}\neq\sigma\overline{\varepsilon(a)}$, $\sigma\overline{\varepsilon(b)}$ и $\sigma\overline{\varepsilon(c')}$ не совпадает с классовыми суммами из $\Sigma_c\gamma_c\sigma\overline{\varepsilon(c)}$, так как последняя имеет каноническую запись. Следовательно существует c'', такое, что $\sigma\overline{\varepsilon(c')}=\sigma\overline{\varepsilon(b)}\sigma\overline{\varepsilon(c'')}$, что противоречит лемме 39, приложенной для элементов b, c' и c'' и $D=C(b)$.

2.2.2). Пусть $|G_n\setminus G_{n+1}|=|(G_n\setminus G_{n+1})\cap R_1|$. В каждом классе A множества $(G_n\setminus G_{n+1})\cap R_1$ по отношению $\varepsilon\tau$ фиксируем по одному элементу a и образуем элементы $x_b=1+\overline{\varepsilon(a)}-\overline{\varepsilon(b)}$, где $\varepsilon(b)\in\varepsilon(A)\setminus\varepsilon(a)$. Такой элемент b существует. Например, $b=a^{p^{n-1}}$, где $O(a)=p^n$. Очевидно $x_b\in S_n[p]$. Если элемент $x_{b'}=1+\overline{\varepsilon(a')}-\overline{\varepsilon(b')}$ образован по тому же правилу, то при $(a,\varepsilon(b))\neq(a',\varepsilon(b'))$ следует, что $x_{b'}x_b^{-1}\notin S_{n+1}[p]$. В противном случае $x_{b'}=x_b(1+\Sigma_c\gamma_c\overline{\varepsilon(c)})$, где $\gamma_c\in L_{n+1}$, $\varepsilon(c)\in\varepsilon(G_{n+1})$. На полученное равенство действуем гомоморфизмом $\sigma_D=\sigma$ Брауэра, где $D=C(b)$, откуда

$$\begin{aligned}\sigma\overline{\varepsilon(a')}-\sigma\overline{\varepsilon(b')}&=\sigma\overline{\varepsilon(a)}-\sigma\overline{\varepsilon(b)}+\Sigma_c\gamma_c\sigma\overline{\varepsilon(c)}\\&+\Sigma_c\gamma_c\sigma\overline{\varepsilon(a)}\sigma\overline{\varepsilon(c)}-\Sigma_c\gamma_c\sigma\overline{\varepsilon(b)}\sigma\overline{\varepsilon(c)}.\end{aligned}\tag{38}$$

Ясно, что $\sigma\overline{\varepsilon(b)}\neq 0$. Так как $\sigma\overline{\varepsilon(b)}\neq\sigma\overline{\varepsilon(a)}$, $\sigma\overline{\varepsilon(a')}$, $\sigma\overline{\varepsilon(b')}$, то существует по крайней мере одно $c'\in G_{n+1}$, такое, что в (38) $\gamma_{c'}\sigma\overline{\varepsilon(c')}\neq 0$. Очевидно имеется элемент $c''\in\operatorname{supp}\sigma\overline{\varepsilon(c')}$, не принадлежащий носителям сумм $\sigma\overline{\varepsilon(a')}$, $\sigma\overline{\varepsilon(b')}$, $\sigma\overline{\varepsilon(a)}$ и $\sigma\overline{\varepsilon(b)}$, а также и носителям остальных классовых сумм из $\Sigma_c\gamma_c\sigma\overline{\varepsilon(c)}$. Согласно лемме 39, имеет место $c''\notin\operatorname{supp}(\sigma\overline{\varepsilon(b)}\sigma\overline{\varepsilon(c)})$. Покажем, что $c''\notin\operatorname{supp}(\sigma\overline{\varepsilon(a)}\sigma\overline{\varepsilon(c)})$, что будет противоречить формуле (38). Действительно, так как $a(\varepsilon\tau)b$, то существует элемент a_1, такой, что $a_1\varepsilon a$ и $a_1\tau b$. Очевидно $C(a_1)=C(b)=D$. Приложим лемму 39 для элементов a_1, c и c''. Получим $c''\notin\operatorname{supp}(\sigma\overline{\varepsilon(a_1)}\sigma\overline{\varepsilon(c)})=\operatorname{supp}(\sigma\overline{\varepsilon(a)}\sigma\overline{\varepsilon(c)})$, чем теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Д. Берман. Групповые алгебры счетных абелевых p-групп. *Publ. Math.*, **14**, 1967, 365—405.
2. А. А. Бовди. Групповые кольца. Ужгород, 1974.
3. А. А. Бовди, З. Ф. Патай. О строении центра мультипликативной группы группового кольца p-группы над кольцом характеристики p. *Весцы Академии наук Белорусской СССР*, **1**. 1978, 5—11.
4. Т. Ж. Моллов. О мультипликативных группах модулярных групповых алгебр примарных абелевых групп произвольной мощности I. *Publ. Math.* **18**, 1971, 9—21.
5. Т. Ж. Моллов. Силовские p-подгруппы групповых алгебр счетных абелевых групп над полем характеристики p. *Сердика*, **3**, 1976, 219—235.

6. Т. Ж. Моллов. Ульмовские инварианты силовских *p*-подгрупп групповых алгебр абелевых групп над полем характеристики *p*. *Плиска*, **2**, 1981, 77—82.
7. А. И. Мальцев. Алгебраические системы. Москва, 1970.
8. Н. А. Начев, Т. Ж. Моллов. Инварианты Ульма — Капланского группы нормированных единиц модулярного группового кольца примарной абелевой группы *Сердика*, **6**, 1980, 258—263.
9. Н. А. Начев, Т. Ж. Моллов. Инварианты Ульма — Капланского группы нормированных единиц центра группового кольца *FC-p*-группы над коммутативным кольцом характеристики *p*. *Доклады БАН* (в печати).
10. A. Rosenberg. Blocks and Centers of Group Algebras. *Math. Z.*, **76**, 1961, 209—216.
11. S. K. Sehgal. On the Isomorphism of Group Algebras. *Math. Z.*, **95**, 1967, 71—75.
12. Л. Фукс. Бесконечные абелевы группы. Москва, 1974.

Пловдивский университет
4000 Пловдив

Поступила 12. 6. 1979