Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ЦЕПНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР С ЕДИНИЦЕЙ

ИВАН К. ТОНОВ

В. А. Артамонов (1978) дал описание цепных многообразий линейных алгебр над полем. В настоящей работе решается аналогичный вопрос для многообразий ассоциативных алгебр с единицей над полем К нулевой характеристики.

1. Предварительные сведения. Пусть $K\langle X\rangle = K\langle x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\rangle$ — свободная ассоциативная алгебра (с единицей) счетного ранга над полем K характеристики нуль. Пространство всех полилинейных многочленов степени n от букв $x_1, x_2, \dots, x_n$ будем обозначать через V_n. Очевидно $\dim_K V_n = n!$ Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in V_n$. Положим для $\sigma \in \Sigma_n$, где Σ_n — симметрическая группа n-й степени, $\sigma f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$. Это превращает пространство V_n в левый $K\Sigma_n$-модуль.

В пространстве V_n выделим подпространство Γ_n многочленов, натянутых на произведения правонормированных коммутаторов от переменных x_1, $x_2, \dots, x_n$. Элементы подпространства Γ_n иногда называют собственными линейными формами [6]. Известно, что все тождества алгебры A с единицей над полем К являются следствиями ее собственных полилинейных тождеств, лежащих в пространствах Γ_n. С этой точки зрения представляет интерес выбор базы пространства Γ_n. Одна из таких баз указана Шпехтом в [6].

Полилинейный правонормированный коммутатор $[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}]$ называется правильным, если $i_1 < i_r$, $r > 1$. Произведение $f(x) = f_1(x) \dots f_k(x)$ правонормированных коммутаторов $f_i(x)$ от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется правильным, если оно удовлетворяет следующим условиям: 1) все множители $f_i(x)$ — правильные коммутаторы; 2) степени множителей $h_i(x)$ не возрастают слева направо; 3) номера начальных переменных в коммутаторах $f_i(x)$ одинаковой длины возрастают слева направо.

Предложение 1 (Шпехт [6]). *Правильные произведения правонормированных коммутаторов образуют базис пространства собственных полилинейных форм n-й степени Γ_n. Кроме того,* $\dim_K \Gamma_n = n! \sum_{i=0}^{n} (-1)^i / i!$.

В работе [4] В. Н. Латышева указана другая база, которая называется канонической. Полилинейный правонормированный коммутатор $[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}]$ называется каноническим, если $i_1 < i_r$, $r = 2, 3, \dots, k$, и $i_3 < i_4 < \dots < i_k$.

Предложение 2 (В. Н. Латышев [4]). *Всевозможные полилинейные произведения канонических коммутаторов образуют базис в пространстве Γ_n.*

Пусть T — некоторый T-идеал алгебры $K\langle X\rangle$. Для любого натурального числа n положим $T_n=T\cap\Gamma_n$. Легко проверяется, что все полилинейные следствия степени n из полилинейного тождества $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ являются линейными комбинациями многочленов σf, где σ пробегает симметрическую группу Σ_n n-й степени. Очевидно, что изображение $T\to(T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots)$ сохраняет включение и, более того, является решеточным мономорфизмом. В частности $(P+Q)_n=P_n+Q_n$ для T-идеалов P и Q.

Пусть Q является $K\Sigma_n$-подмодулем модуля Γ_n. Через $\widetilde{Q}$ обозначим T-идеал свободной алгебры $K\langle X\rangle$, порожденный элементами модуля Q. Тогда $\widetilde{Q}_n=\widetilde{Q}\cap\Gamma_n=Q$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие ассоциативных алгебр с единицей и $T=T(\mathfrak{M})$ — его идеал тождеств. Через $L(\mathfrak{M})$ обозначим решетку подмногообразий многообразия $\mathfrak{M}$, а для любого натурального числа n через $L_n(\mathfrak{M})$ обозначим решетку подмодулей модуля T_n.

Многообразие $\mathfrak{M}$ называется цепным, если решетка $L(\mathfrak{M})$ — линейно упорядоченное множество, то есть цепь.

Многообразие $\mathfrak{M}$ ассоциативных алгебр с единицей называется атомным, если для любого натурального n фактор-модуль Γ_n/T_n является простым модулем (допускается и нулевой). Другими словами, многообразие $\mathfrak{M}$ является атомным тогда и только тогда, когда для любого натурального числа n решетка $L^*_n(\mathfrak{M})$, дуальная в Γ_n решетки $L_n(\mathfrak{M})$, содержит не больше двух элементов.

Предложение 3. *Если многообразие $\mathfrak{M}$ ассоциативных алгебр с единицей — цепное, то оно — атомное.*

Доказательство. Известно, что для любого натурального числа n модуль Γ_n, как вполне приводимый модуль, разлагается в прямую сумму непроводимых модулей. Тогда сразу вытекает, что если многообразие неатомное, то оно и не цепное.

Кроме того, отметим, что всякое подмногообразие цепного (атомного) многообразия тоже является цепным (атомным).

2. Решетки модулей Γ_3 и Γ_4. Из предложения 1 видно, что $\Gamma_3=K\Sigma_3[x_1, x_2, x_3]$.

Предложение 4. *Модуль Γ_3 неприводим.*

Доказателство. Пусть M — ненулевой подмодуль модуля Γ_3. Покажем, что M совпадает с Γ_3. Действительно, в модуле M найдется ненулевой многочлен вида

$$f(x_1, x_2, x_3)=[x_1, x_2, x_3]+\alpha[x_1, x_3, x_2].$$

Если $\alpha=-1$, из тождества Якоби получим, что $[x_1, x_2, x_3]-[x_1, x_3, x_2]=[x_3, x_2, x_1]\in M$, то есть $M=\Gamma_3$. Пусть $\alpha\neq-1$. Рассмотрим многочлен $f+(23)f=(1+\alpha)[x_1, x_2, x_3]+[x_1, x_3, x_2])$. Тогда $[x_1, x_2, x_3]+[x_1, x_3, x_2]\in M$ и как было отмечено в работе [1], $[x_1, x_2, x_3]\in M$, то есть $M=\Gamma_3$.

Для модуля Γ_4 имеем из предложения 1, что $\Gamma_4=K\Sigma_4[x_1, x_2, x_3, x_4]+K\Sigma_4[x_1, x_2][x_3, x_4]$. Известно, что $\dim_K\Gamma_4=9$, а из выбора базы Шпехта и канонической базы сразу вытекает, что $\dim_K K\Sigma_4[x_1, x_2, x_3, x_4]=6$ и $\dim_K K\Sigma_4[x_1, x_2][x_3, x_4]=6$. Тогда пересечение модулей $K\Sigma_4[x_1, x_2, x_3, x_4]$ и $K\Sigma_4[x_1, x_2][x_3, x_4]$ должно быть 3-мерным пространством над полем K. Многочлен $[[x_1, x_2], [x_3, x_4]]$ лежит в обоих модулях. Из базы Шпехта видно, что многочлены $[[x_1, x_2], [x_3, x_4]]$, $[[x_1, x_3], [x_2, x_4]]$ и $[[x_1, x_4], [x_2, x_3]]$ — линейно-независимы над полем K и определяют 3-мерное подпространство, то есть $K\Sigma_4[x_1, x_2, x_3, x_4] \cap K\Sigma_4[x_1, x_2][x_3, x_4] = K\Sigma_4[[x_1, x_2], [x_3, x_4]]$.

Предложение 5. *Модуль $M' = K\Sigma_4[[x_1, x_2], [x_3, x_4]]$ неприводим.*

Доказательство. Пусть f — ненулевой многочлен вида

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_2[[x_1, x_2], [x_3, x_4]] + a_3[[x_1, x_3], [x_2, x_4]] + a_4[[x_1, x_4], [x_2, x_3]].$$

Докажем, что подмодуль N, порожденный элементом f, совпадает с M'. Положим $h(x_1, x_2, x_3, x_4) = [[x_1, x_3], [x_2, x_4]] + [[x_1, x_4], [x_2, x_3]]$. Имеем

$$0 \equiv f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(x_1, x_2, x_4, x_3) \equiv (a_3 + a_4)h(x_1, x_2, x_3, x_4) \pmod N,$$

$$0 \equiv -f(x_1, x_3, x_4, x_2) - f(x_1, x_4, x_3, x_2) \equiv (a_2 + a_3)h(x_1, x_2, x_3, x_4) \pmod N,$$

$$0 \equiv f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(x_3, x_2, x_1, x_4) + f(x_1, x_2, x_4, x_3) + f(x_4, x_2, x_1, x_3)$$
$$\equiv (a_4 + a_2)h(x_1, x_2, x_3, x_4) \pmod N.$$

Так как хотя бы один из коэффициентов a_2, a_3, a_4 не равен нулю, то по крайней мере один из коэффициентов $a_3 + a_4$, $a_2 + a_3$, $a_4 + a_2$ тоже не равен нулю и, значит, $h(x_1, x_2, x_3, x_4)$ лежит в модуле N. Но

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) + h(x_1, x_3, x_2, x_4) + h(x_3, x_2, x_1, x_4) = 2[[x_1, x_2], [x_3, x_4]],$$

то есть $[[x_1, x_2], [x_3, x_4]] \in N$, и, следовательно, N совпадает с M'.

Пусть $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ — элемент модуля $K\Sigma_4[x_1, x_2, x_3, x_4]$ и $f \notin K\Sigma_4[[x_1, x_2], [x_3, x_4]]$. Тогда

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_2[x_1, x_2, x_3, x_4] + a_3[x_1, x_3, x_2, x_4] + a_4[x_1, x_4, x_2, x_3]$$
$$+ \beta_2[x_1, x_2, x_4, x_3] + \beta_3[x_1, x_3, x_4, x_2] + \beta_4[x_1, x_4, x_3, x_2]$$

и хотя один из коэффициентов $a_2 + \beta_2$, $a_3 + \beta_3$, $a_4 + \beta_4$ не равен нулю. Тогда в T-идеале $\widetilde{M}$, где M — модуль, порожденный элементом $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, лежит многочлен $[x_1, y, y, y]$. Действительно, если, например, $a_2 + \beta_2 \neq 0$, то положим $x_1 = x_3 = x_4 = y$, $x_2 = x$ и получим, что $[x, y, y, y] \in \widetilde{M}$. После линеаризации имеем

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] + [x_1, x_3, x_2, x_4] + [x_1, x_4, x_2, x_3] \tag{1}$$
$$+ [x_1, x_2, x_4, x_3] + [x_1, x_3, x_4, x_2] + [x_1, x_4, x_3, x_2] \in M.$$

Положим $x_3 = x_4 = z$. Тогда

$$[x_1, x_2, z, z] + [x_1, z, x_2, z] + [x_1, t, z, x_2] \in \widetilde{M}. \tag{2}$$

Из тождества Якоби имеем $[x, y, y, x] = [x, y, x, y]$. Тогда, полагая в (2) $x_1 = x_2 = x$, $z = y$, получим, что $[x, y, x, y] \in \widetilde{M}$. После частичной линеаризации имеем $[x_1, x, x_2, x] + [x_2, x, x_1, x] \in \widetilde{M}$. Тождество Якоби опять дает $[x_1, x_2, x, x] = [x_1, x, x_2, x] - [x_2, x, x_1, x]$, откуда $2[x_1, x, x_2, x] - [x_1, x_2, x, x] \in \widetilde{M}$. После линеаризации получается, что

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] - 2[x_1, x_3, x_2, x_4] - 2[x_1, x_4, x_2, x_3] + [x_1, x_2, x_4, x_3] \in M$$

и

$$[x_1, x_3, x_2, x_4] + [x_1, x_4, x_2, x_3] - 2[x_1, x_2, x_3, x_4) - 2[x_1, x_4, x_3, x_2] \in M.$$

Так как матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет ранг 3, то элементы

$$[x_1, x_2, x_3, x_4]+[x_1, x_3, x_2, x_4]+[x_1, x_4, x_2, x_3]$$
$$+[x_1, x_2, x_4, x_3]+[x_1, x_3, x_4, x_2]+[x_1, x_4, x_3, x_2],$$
$$[x_1, x_2, x_3, x_4]-2[x_1, x_3, x_2, x_4]-2[x_1, x_4, x_2, x_3]+[x_1, x_2, x_4, x_3],$$
$$[x_1, x_3, x_2, x_4]+[x_1, x_4, x_2, x_3]-2[x_1, x_2, x_3, x_4]-2[x_1, x_4, x_3, x_2]$$

модуля M линейно-независимы. Следовательно, они являются базой 3-мерного пространства, дополнительного к пространству M' в $K\Sigma_4 [x_1, x_2, x_3, x_4]$, то есть M являются неприводимым подмодулем и $K\Sigma_4[x_1, x_2, x_3, x_4]=M'\oplus M$.

Далее рассмотрим подмодули модуля $K\Sigma_4[x_1, x_2][x_3, x_4]$. При помощи канонической базы легко проверяется, что

$$K\Sigma_4[x_1, x_2][x_3, x_4]=K\Sigma_4[[x_1, x_2], [x_3, x_4]]\oplus K\Sigma_4[x_1, x_2]\circ[x_3, x_4],$$

где $a\circ b$ обозначает йордановое умножение $a\circ b=ab+ba$. Модуль $K\Sigma_4[x_1, x_2]\circ[x_3, x_4]$ является 3-мерным пространством. Он содержит одномерный (как пространство) подмодуль M_1, порожденный стандартным многочленом

$$S_4(x_1, x_2, x_3, x_4)=\sum_{\sigma\in\Sigma_4}(-1)^\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}$$

степени 4. Действительно, из представления

$$S_4[x_1, x_2, x_3, x_4]=[x_1, x_2]\circ[x_3, x_4]-[x_1, x_3]\circ[x_2, x_4]+[x_1, x_4]\circ[x_2, x_3]$$

видно, что $M_1\subset K\Sigma_4[x_1, x_2]\circ[x_3, x_4]$. Пусть M_2 — собственный подмодуль модуля $K\Sigma_4[x_1, x_2]\circ[x_3, x_4]$, который не содержит стандартный многочлен. Следовательно, M_2 содержит многочлен вида

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=\alpha_2[x_1, x_2]\circ[x_3, x_4]+\alpha_3[x_1, x_3]\circ[x_2, x_4]+\alpha_4[x_1, x_4]\circ[x_2, x_3],$$

где хотя одно из равенств $\alpha_2=\alpha_4$ и $\alpha_2=-\alpha_3$ неверно. (В противном случае — $f=\alpha_2 S_4$.) Рассмотрим

$$f+(23)f=(\alpha_2+\alpha_3)([x_1, x_2]\circ[x_3, x_4]+[x_1, x_3]\circ[x_2, x_4])$$

и

$$f+(24)f=(\alpha_2-\alpha_4)([x_1, x_2]\circ[x_3, x_4]-[x_1, x_4]\circ[x_2, x_3]).$$

Тогда один из многочленов $[x_1, x_2]\circ[x_3, x_4]+[x_1, x_3]\circ[x_2, x_4]$ или $[x_1, x_2]\circ[x_3, x_4]-[x_1, x_4]\circ[x_2, x_3]$ лежит в модуле M_2. Но каждый из этих многочленов получается из другого перестановкой индексов, так что оба содержатся в модуле M_2. Они линейно-независимы и, следовательно, являются базой пространства M_2.

Таким образом было доказано следующее предложение.

Предложение 6. *В модуле Γ_4 содержатся 4 неизоморфных неприводимых модуля M_1, M_2, M', M, для которых $\Gamma_4=M_1\oplus M_2\oplus M'\oplus M$. Кроме того*, $\dim_K M_1=1$, $\dim_K M_2=2$, $\dim_K M'=\dim_K M=3$.

Предложение 7. *Решетка подмодулей модуля Γ_4 дистрибутивна.*

Доказательство. Доказательство вытекает из известного факта, что в дистрибутивной решетке модулей нет изоморфных минимальных несовпадающих модулей ([7]).

По сути дела предложение 6 влечет за собой теорему.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ такое многообразие ассоциативных алгебр с единицей, что идеал тождеств $T(\mathfrak{M})$ не содержит многочлена третьей степени. Тогда многообразие $\mathfrak{M}$ атомно, если выполняется одно из условий:*

i) $[x_1, x_2][x_3, x_4] \in T(\mathfrak{M})$,

ii) $[x_1, x_2]\circ[x_3, x_4] \in T(\mathfrak{M})$, $[x, y, y, y] \in T(\mathfrak{M})$,

iii) $[x_1, x_2, x_3, x_4] \in T(\mathfrak{M})$, $S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \in T(\mathfrak{M})$,

iv) $[x_1, x_2, x_3, x_4] \in T(\mathfrak{M})$, $[x, y]^2 \in T(\mathfrak{M})$.

Следовательно, имея в виду предложение 3, если цепное многообразие $\mathfrak{M}$ ассоциативных алгебр такое, что идеал $T(\mathfrak{M})$ не содержит многочлена третьей степени, выполняется одно из перечисленных условий.

3. Цепные многообразия ассоциативных алгебр с единицей. Пусть T-идеал $T(\mathfrak{M})$ многообразия $\mathfrak{M}$ содержит многочлен третьей степени. Как было указано в 2, $T(\mathfrak{M})$ содержит коммутатор $[x_1, x_2, x_3]$ третьей степени. Кроме того, легко получается, что $[x_1, x_2][x_3, x_4]-[x_1, x_4][x_2, x_3] \in T(\mathfrak{M})$. Таким образом любую собственную полилинейную форму можно привести к виду $\alpha[x_1, x_2]\ldots[x_{2k-1}, x_{2k}]$. Но это означает, что многообразие $\mathfrak{M}$ является цепным.

Предложение 8. *Многообразие $\mathfrak{M}$ ассоциативных алгебр с единицей, для которого $T(\mathfrak{M})=\{[x_1, x_2][x_3, x_4]\}^T$, является цепным.*

Доказательство. Докажем, что для любого $n \geqq 3$ фактор-модуль Γ_n/T_n порождается многочленом $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Действительно, если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — собственная форма, которая не лежит в модуле T_n, то по модулю T_n имеем

$$f \equiv \sum_{i=2}^{n} \lambda_i[x_1, x_i, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots] \pmod{T_n},$$

хотя один из коэффициентов $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ не равен нулю. (Знак „$\wedge$" обозначает пропуск соответствующего аргумента.) Тогда, если через Q обозначим T-идеал $Q=\{f\}^T+T(\mathfrak{M})$, то $[x, y, \ldots, y] \in Q$. После линеаризации получаем по модулю Q

$$0 \equiv \sum_{i=2}^{n} [x_1, x_i, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots]=[x_1, x_2, \ldots, x_n]+\sum_{i=3}^{n}[x_1, x_i, x_2, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots].$$

Применяя тождество Якоби, получим, что

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n]+\sum_{i=3}^{n} [x_1, x_i, x_2, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots]$$

$$\equiv (n-1)[x_1, x_2, \ldots, x_n]+\sum_{i=3}^{n} [x_2, x_i, x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots] \pmod{Q}.$$

После замены x_1 на x_2 в f получается, что

$$-[x_1, x_2, \ldots, x_n] + \sum_{i=3}^{n} [x_2, x_i, x_1, \ldots, x_i^1, \ldots] \equiv 0 \pmod{Q},$$

откуда и $[x_1, x_2, \ldots, x_n] \in Q$.

Таким образом доказано, что многообразие $\mathfrak{M}$, для которого $T(\mathfrak{M}) = \{[x_1, x_2][x_3, x_4]\}^T$, является цепным, а значит и атомным.

Предложение 9. *Многообразие $\mathfrak{M}$ ассоциативных алгебр с единицей, для которого $T(\mathfrak{M}) = \{[x_1, x_2] \circ [x_3, x_4],\ [x, y, y, y]\}^T$, является цепным.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
0 &\equiv [x_1, x_2] \circ [x_3, x_4 x_5] = [x_1, x_2] \circ ([x_3, x_4] x_5) + [x_1, x_2] \circ (x_4 [x_3, x_5]) \\
&= [x_1, x_2][x_3, x_4] x_5 + [x_3, x_4] x_5 [x_1, x_2] + [x_1, x_2] x_4 [x_3, x_5] + x_4 [x_3, x_5][x_1, x_2] \\
&= ([x_1, x_2] \circ [x_3, x_4]) x_5 - [x_3, x_4][x_1, x_2] x_5 + [x_3, x_4] x_5 [x_1, x_2] + [x_1, x_2] x_4 [x_3, x_5] \\
&\quad + x_4 ([x_3, x_5] \circ [x_1, x_2]) - x_4 [x_1, x_2][x_3, x_5] \\
&\equiv [x_1, x_2, x_4][x_3, x_5] - [x_3, x_4][x_1, x_2, x_5] \pmod{T(\mathfrak{M})},
\end{aligned}$$

откуда $[x_1, x_2, x_3][x_4, x_5] + [x_1, x_2, x_4][x_3, x_5] \in T(\mathfrak{M})$ и $[x_1, x_2, y][y, x] \in T(\mathfrak{M})$.

Как мы видели, из тождества $[x, y, y, y] = 0$ вытекает тождество

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] - 2[x_1, x_3, x_2, x_4] - 2[x_1, x_4, x_2, x_3] + [x_1, x_2, x_4, x_3] = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
0 &\equiv [x_1, x_2, x_3, x_4 x_5] - 2[x_1, x_3, x_2, x_4 x_5] - 2[x_1, x_4 x_5, x_2, x_3] \\
&\quad + [x_1, x_2, x_4, x_5, x_3] = [x_1, x_2, x_3, x_4] x_5 + x_4 [x_1, x_2, x_3, x_5] - 2[x_1, x_3, x_2, x_4] x_5 \\
&\quad - 2x_4 [x_1, x_3, x_2, x_5] - 2[[x_1, x_4] x_5, x_2, x_3] - 2[x_4 [x_1, x_5], x_2, x_3] \\
&\quad + [[x_1, x_2, x_4] x_5, x_3] + [x_4 [x_1, x_2, x_5], x_3] = [x_1, x_2, x_3, x_4] x_5 - 2[x_1, x_3, x_2, x_4] x_5 \\
&\quad + x_4 [x_1, x_2, x_3, x_5] - 2x_4 [x_1, x_3, x_2, x_5] - 2[x_1, x_4, x_2] x_5, x_3] \\
&\quad - 2[[x_1, x_4][x_5, x_2], x_3] - 2[[x_4, x_2][x_1, x_5], x_3] \\
&\quad - 2[x_4 [x_1, x_5, x_2], x_3] + [x_1, x_2, x_4, x_3] x_5 + [x_1, x_2, x_4][x_5, x_3] \\
&\quad + [x_4, x_3][x_1, x_2, x_5] + x_4 [x_1, x_2, x_5, x_3] = ([x_1, x_2, x_3, x_4] - 2[x_1, x_3, x_2, x_4] \\
&\quad - 2[x_1, x_4, x_2, x_3] + [x_1, x_2, x_4, x_3]) x_5 + x_4 ([x_1, x_2, x_3, x_5] - 2[x_1, x_3, x_2, x_5] \\
&\quad - 2[x_1, x_5, x_2, x_3] + [x_1, x_2, x_5, x_3]) - 2[x_1, x_4, x_2][x_5, x_3] - 2[x_1, x_4, x_3][x_5, x_2] \\
&\quad - 2[x_1, x_4][x_5, x_2, x_3] - 2[x_4, x_2, x_3][x_1, x_5] - 2[x_4, x_2][x_1, x_5, x_3] \\
&\quad - 2[x_4, x_3][x_1, x_5, x_2] + [x_1, x_2, x_4][x_5, x_3] + [x_4, x_3][x_1, x_2, x_5] \pmod{T(\mathfrak{M})}.
\end{aligned}$$

Используя уже доказанные сравнения

$$[x_1, x_2, x_3][x_4, x_5] + [x_1, x_2, x_4][x_3, x_5] \equiv 0 \pmod{T(\mathfrak{M})},$$

$$[x_1, x_2, y][y, x] \equiv 0 \pmod{T(\mathfrak{M})},$$

получим

$$0 \equiv [x_1, x_4, x_2][x_3, x_5]+[x_1, x_4, x_3][x_2, x_5]-[x_2, x_5, x_3][x_1, x_4]$$

$$+[x_2, x_4, x_3][x_1, x_5]-[x_1, x_5, x_3][x_2, x_4]-[x_1, x_5, x_2][x_3, x_4]-[x_1, x_2, x_4][x_3, x_5]$$

$$\equiv([x_1, x_4, x_2]-[x_1, x_2, x_4])[x_3, x_5]+[x_1, x_4, x_3][x_2, x_5]$$

$$-[x_2, x_5, x_3][x_1, x_4]+[x_2, x_4, x_3][x_1, x_5] \pmod{T(\mathfrak{M})}.$$

Полагая $x_3=x_5=x$, $x_4=x_3$ и используя, что $[x_1, x_2, x][x, x_3] \in T(\mathfrak{M})$' получим $[x_2, x, x][x_1, x_3] \equiv 0 \pmod{T(\mathfrak{M})}$.

Как было уже отмечено, из тождества $[x, y, y]=0$ вытекает тождество $[x_1, x_2, x_3]=0$, так что идеал $T(\mathfrak{M})$ содержит многочлен $[x_1, x_2, x_3][x_4, x_5]$. Тогда очевидно, что $([x_1, x_2]\circ[x_3, x_4])[x_5, x_6] \equiv 0 \pmod{T(\mathfrak{M})}$ и $[[x_1, x_2], [x_3, x_4]][x_5, x_6] \equiv 0 \pmod{T(\mathfrak{M})}$, откуда $[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6] \equiv 0 \pmod{T(\mathfrak{M})}$.

Теперь доказательство предложения завершается как доказательство предложения 8.

Предложение 10. *Многообразие $\mathfrak{M}$ ассоциативных алгебр с единицей, для которого $T(\mathfrak{M})=\{[x_1, x_2, x_3, x_4], S_4[x_1, x_2, x_3, x_4]\}^T$, является цепным.*

Доказательство. Из тождества $[x_1, x_2, x_3, x_4]=0$ вытекает $[x_1, x_2, x_3][x_4, x_5]+[x_3, x_5][x_1, x_2, x_4]=0$ ([5]). Положим в нем $x_5=x_3=x$, $x_4=y$. Тогда $[x_1, x_2, x][x, y] \in T(\mathfrak{M})$, откуда после линеаризации

$$[x_1, x_2, x_3][x_4, x_5]+[x_1, x_2, x_4][x_3, x_5] \equiv 0 \pmod{T(\mathfrak{M})}.$$

Так как $S_4(x_1, x_2, x_3, x_4) \in T(\mathfrak{M})$ и $[[x_1, x_2], [x_3, x_4]] \in T(\mathfrak{M})$, то

$$[x_1, x_2][x_3, x_4]-[x_1, x_3][x_2, x_4]+[x_1, x_4][x_2, x_3] \equiv 0 \pmod{T(\mathfrak{M})}.$$

Полагая $x_1=[x_1, x_2]$, $x_2=x_3$, $x_3=x_4$, $x_4=x_5$, получим

$$[x_1, x_2, x_3][x_4, x_5]-[x_1, x_2, x_4][x_3, x_5]+[x_1, x_2, x_5][x_3, x_4] \equiv 0 \pmod{T(\mathfrak{M})}.$$

И так как $[x_1, x_2, x_4][x_3, x_5] \equiv -[x_1, x_2, x_3][x_4, x_5]$, имеем $[x_1, x_2, x_3][x_4, x_5] \equiv 0 \pmod{T(\mathfrak{M})}$.

Тогда как и в случае $T(\mathfrak{M})=\{[x_1, x_2, x_3]\}^T$, получим для любой собственной полилинейной формы $f \notin T(\mathfrak{M})$, что идеал $\{f\}^T+T(\mathfrak{M})$ по модулю $T(\mathfrak{M})$ порождается многочленом $[x_1, x_2]\ldots[x_{2k-1}, x_{2k}]$. Таким образом доказана атомность многообразия $\mathfrak{M}$. Чтобы доказать, что многообразие $\mathfrak{M}$ является цепным, осталось получить, что $\{[x, y, z]\}^T+T(\mathfrak{M}) \supset \{[x_1, x_2][x_3, x_4]\}^T$. Но это действительно так, потому что очевидное сравнение

$$[x_1, x_2][x_3, x_4]-[x_1, x_3][x_2, x_4]+[x_1, x_4][x_2, x_3] \equiv 0 \pmod{T(\mathfrak{M})}$$

можно записать как

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] \equiv \frac{1}{3}([x_1, x_2][x_3, x_4]+[x_1, x_3][x_2, x_4])$$

$$+\frac{1}{3}([x_1, x_2][x_3, x_4]-[x_1, x_4][x_2, x_3]) \pmod{T(\mathfrak{M})},$$

откуда вытекает, что многообразие $\mathfrak{M}$ является цепным.

Предложение 11. *Многообразие $\mathfrak{M}$ ассоциативных алгебр с единицей, для которого $T(\mathfrak{M})=\{[x_1, x_2, x_3, x_4], [x, y]^2\}^T$, является атомным, но не является цепным.*

Доказательство. Из тождеств $[x_1, x_2, x_3, x_4]=0$ и $[x, y]^2=0$ после линеаризации вытекает, что $[x_1, x_2][x_3, x_4]-[x_1, x_4][x_2, x_3]\in T(\mathfrak{M})$.

В [3] и [5] доказано что $[x_1, x_2, x_3][x_4, x_5, x_6]\in T$ и $[x_1, x_2, x_3][x_4, x_5][x_6, x_7]\in T$. Поэтому $\Gamma_3/T_3=\{[x_1, x_2, x_3]\}$; $\Gamma_4/T_4=\{[x_1, x_2][x_3, x_4]\}$; $\Gamma_5/T_5=\{[x_1, x_2, x_3][x_4, x_5]\}$ и для любого натурального $n\geqq 6$ модуль Γ_n/T_n либо нулевой, либо определяется произведением некоторого количества коммутаторов второй степени. Следовательно, многообразие $\mathfrak{M}$ является атомным.

Чтобы показать, что $\mathfrak{M}$ не является цепным, достаточно проверить, что идеал $\{[x_1, x_2, x_3]\}^T+T(\mathfrak{M})$ не содержит $\{[x_1, x_2][x_3, x_4]\}^T$. Но это так, потому что все следствия тождества $[x_1, x_2, x_3]=0$ степени $n\geqq 4$ лежат в идеале $T(\mathfrak{M})$ и выходит, что и $[x_1, x_2][x_3, x_4]\in T(\mathfrak{M})$, а это не так.

Таким образом основные результаты работы можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2. *Многообразие $\mathfrak{M}$ ассоциативных алгебр с единицей является атомным тогда и только тогда, когда оно является подмногообразием одного из следующих многообразий, определенных тождествами:*

i) $T(\mathfrak{M})=\{[x_1, x_2, x_3]\}^T$,

ii) $T(\mathfrak{M})=\{[x_1, x_2][x_3, x_4]\}^T$,

iii) $T(\mathfrak{M})=\{[x_1, x_2]\circ[x_3, x_4], [x, y, y, y]\}^T$,

iv) $T(\mathfrak{M})=\{[x_1, x_2, x_3, x_4], S_4(x_1, x_2, x_3, x_4)\}^T$,

v) $T(\mathfrak{M})=\{[x_1, x_2, x_3, x_4], [x, y]^2\}^T$.

Теорема 3. *Многообразие $\mathfrak{M}$ ассоциативных алгебр с единицей является цепным тогда и только тогда, когда оно является подмногообразием одного из следующих многообразий, определенных тождествами:*

i) $T(\mathfrak{M})=\{[x_1, x_2, x_3]\}^T$,

ii) $T(\mathfrak{M})=\{[x_1, x_2][x_3, x_4]\}^T$,

iii) $T(\mathfrak{M})=\{[x_1, x_2]\circ[x_3, x_4], [x, y, y, y]\}^T$,

iv) $T(\mathfrak{M})=\{[x_1, x_2, x_3, x_4], S_4(x_1, x_2, x_3, x_4)\}^T$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. З. Ананьин, А. Р. Кемер. Многообразия ассоциативных алгебр, решетки подмногообразий которых дистрибутивны. *Сиб. мат. ж.*, **17**, 1976, 723—730.
2. В. А. Артамонов. Решетки многообразий линейных алгебр. *Успехи мат. наук*, **33**, 1978, № 2, 135—167.
3. М. Б. Гаврилов. О некоторых T-идеалах в свободной ассоциативной алгебре. *Алгебра и логика*, **8**, 1968, 172—175.
4. В. Н. Латышев. О сложности нематричных многообразий ассоциативных алгебр, I. *Алгебра и логика*, **16**, 1977, 149—173.
5. В. Н. Латышев. О конечной порожденности T-идеала с элементом $[x_1, x_2, x_3, x_4]$. *Сиб. мат. ж.*, **6**, 1965, 1433—1435.
6. W. Specht. Gesetze in Ringen, I. *Math. Z.*, **52**, 1950, 557—589.
7. П. Кон. Свободные кольца и их связи. Москва, 1975.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 4. 12. 1979