Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

СИНГУЛЯРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ВЫПУКЛЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ — УСЛОВНО УСТОЙЧИВЫЙ СЛУЧАЙ

ТОДОР Р. ГИЧЕВ

Изучается линейный управляемый объект, при некоторых из производных в законе движения которого имеется малый положительный параметр. Рассматривается случай, который в литературе принято называть условно устойчивым. Исследуется зависимость решения задачи оптимального управления с выпуклым интегральным критерием и фиксированным правым концом от малого параметра, когда он стремится к нулю.

1. Пусть при $\lambda \in (0, \Lambda)$, $\Lambda > 0$, поведение объекта Q_λ на отрезке $[t_0, T]$ описывается дифференциальными уравнениями

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= A_{11}(t)x + A_{12}(t)y + \beta_1 A_{13}(t)z + B_1(t)u,\\
\lambda\dot{y} &= A_{21}(t)x + A_{22}(t)y + B_2(t)u, \qquad (1.1)\\
\lambda\dot{z} &= \beta_2 A_{31}(t)x + A_{33}(t)z + B_3(t)u,
\end{aligned}
$$

где фазовые векторы x, y, z принадлежат соответственно пространствам $R^{n_1}, R^{n_2}, R^{n_3}$; управляющий параметр u принадлежит пространству R^r; $A_{ij}(t)$, $B_i(t)$, $i=1, 2, 3$; $j=1, 2, 3$, — непрерывные на отрезке $[t_0, T]$ матрицы; β_1, β_2 — постоянные. В момент t_0 объект Q_λ находится в начальном состоянии

$$(1.2) \qquad x(t_0)=v_0, \quad y(t_0)=w_0, \quad z(t_0)=s_0.$$

Через $f(t, x, w, s)$ обозначим непрерывную на множестве $[t_0, T]\times R^{n_1}\times R^{n_2}\times R^{n_3}$ скалярную функцию, которая выпукла по (x, w, s) при любом фиксированном $t\in[t_0, T]$, $f(t, x, w, s)\geqq 0$ и существуют частные производные $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial w$, $\partial f/\partial s$, которые являются непрерывными функциями. Пусть $h(t, u)$ — непрерывная на множестве $[t_0, T]\times R^r$ скалярная функция, которая строго выпукла по u при любом фиксированном $t\in[t_0, T]$ и для некоторых постоянных $a>0$, $p>1$ выполняется неравенство $h(t, u)\geqq a\|u\|^p$. Здесь через $\|u\|$ обозначена норма вектора u. Допустимыми управлениями при $\lambda\in(0, \Lambda)$ являются все функции $u\in L_p^{(r)}[t_0, T]$ (измеримые функции с интегруемой p-той степенью), для которых функционал

$$(1.3) \qquad I(u, \lambda)=\int_{t_0}^{T}\{f(t, x(t), \beta(\lambda)y(t), \beta(\lambda)z(t))+h(t, u(t))\}dt$$

принимает конечное значение, где (x, y, z) — соответствующее управлению u решение системы (1.1) с начальным условием (1.2) и $\beta(\lambda)$ — скалярная функция, для которой $\lim_{\lambda\to 0}\beta(\lambda)=\beta(0)=0$.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 7, 1981, с. 306—319.

Пусть $v_T \in R^{n_1}$, $w_T \in R^{n_2}$, $s_T \in R^{n_3}$. Через P_λ для $\lambda \in (0, \Lambda)$ обозначим задачу оптимального управления объектом Q_λ, состоящуюся в отыскании допустимого управления u, которое переводит объект из начального состояния (1.2) в конечное состояние

$$x(T)=v_T, \quad y(T)=w_T, \quad z(T)=s_T \tag{1.4}$$

при минимальном значении критерия (1.3). Дополнительные предположения, которые в дальнейшем накладываются, гарантируют существование единственного оптимального управления u_λ для задачи P_λ с соответствующей траекторией $(x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda)$. Пусть через I_λ обозначено минимальное значение критерия (1.3).

Через P_0 обозначим задачу оптимального управления, которая состоит в отыскании управления $u \in L_p^{(r)}[t_0, T]$ с соответствующей на отрезке $[t_0, T]$ в силу закона движения

$$\dot{x} = A_0(t)x + B_0(t)u \tag{1.5}$$

траекторией x, которое переводит объект из начального состояния v_0 в конечное состояние v_T при минимальном значении критерия $I(u, 0)$, где

$$A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} - \beta_1\beta_2A_{13}A_{33}^{-1}A_{31}, \quad B_0 = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2 - \beta_1A_{13}A_{33}^{-1}B_3,$$

$$y = -A_{22}^{-1}[A_{21}x + B_2u], \quad z = -A_{33}^{-1}[\beta_2A_{31}x + B_3u]. \tag{1.6}$$

Пусть через I_0, u_0, x_0 обозначено единственное решение задачи P_0, и функции y_0, z_0 получаются из (1.6) при $u=u_0$, $x=x_0$. Пусть, далее, через Q_0 обозначен управляемый объект с законом движения (1.5) на отрезке $[t_0, T]$.

Перечислим предположения, при которых в дальнейшем исследуется поведение решения задачи P_λ:

A. Действительные части характеристических чисел матрицы $A_{22}(t)$ отрицательны, а действительные части характеристических чисел матрицы $A_{33}(t)$ положительны для всех $t \in [t_0, T]$.

B. Объект с законом движения (1.5) является вполне управляемым на отрезке $[t_0, T]$.

C. $\operatorname{rank}[B_2(T), A_{22}(T)B_2(T), \ldots, A_{22}^{n_2-1}(T)B_2(T)] = n_2$,
$\operatorname{rank}[B_3(t_0), A_{33}(t_0)B_3(t_0), \ldots, A_{33}^{n_3-1}(t_0)B_3(t_0)] = n_3$.

D. $\lim_{\lambda\to 0}\beta(\lambda)/(\lambda^{1/p}) = 0$.

E1. $\beta_1\beta_2 = 0$.

E2. При некотором $q \in (0, 1)$ для всех $\lambda \in (0, \Lambda$ выполняется

$$\max_{t_0\le t\le T} \int_{t_0}^{t} \Big| \int_{\sigma}^{t} X(t,\tau)A_{12}(\tau)A_{22}^{-1}(\tau)dY(\tau,\sigma,\lambda)A_{21}(\sigma) \Big| d\sigma$$

$$+ |\beta_1\beta_2| \max_{t_0\le t\le T} \int_{t}^{T} \Big| \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)A_{13}(\tau)A_{33}^{-1}(\tau)dZ(\tau,\sigma,\lambda)A_{31}(\sigma) \Big| d\sigma$$

$$+ |\beta_1\beta_2| \max_{t_0\le t\le T} \int_{t_0}^{t} \Big| \int_{t_0}^{\sigma} X(t,\tau)A_{13}(\tau)A_{33}^{-1}(\tau)dZ(\tau,\sigma,\lambda)A_{31}(\sigma) \Big| d\sigma \le q,$$

где через $X(t, \tau)$, $t_0 \le \tau \le t \le T$, обозначена фундаментальная матрица уравнения $\dot{x} = A_{11}(t)x$, через $Y(t, \tau, \lambda)$, $t_0 \le \tau \le \tau \le T$, — фундаментальная матрица уравнения $\lambda\dot{y}=A_{22}(t)y$ и через $Z(t, \tau, \lambda)$, $T\geqq\tau\geqq t\geqq t_0$, — фундаментальная матрица уравнения $\lambda\dot{z}=A_{33}(t)z$; все эти матрицы нормированы при $t=\tau$.

Поведение решения задачи P_λ, когда λ стремится к нулю, характеризуется следующими теоремами:

Теорема 1.1. *Пусть выполняются предположения* A, B, C *и по крайней мере одно из предположений* E1 *или* E2. *Тогда для любого числа* $\varepsilon>0$ *существует такое число* $\delta>0$, *что если* $\lambda\in(0, \delta)$, *то*

$$|I_\lambda-I_0|+\max_{t_0\leqq t\leqq T}\|x_\lambda(t)-x_0(t)\|<\varepsilon.$$

Теорема 1. 2. *Пусть выполняются предположения* A, B, C, D *и по крайней мере одно из предположений* E1 *или* E2. *Тогда для любого числа* $\varepsilon>0$ *и для любых двух точек* τ_1, τ_2; $t_0<\tau_1<\tau_2<T$, *существует такое число* $\delta>0$, *что если* $\lambda\in(0, \delta)$, *то*

$$\max_{\tau_1\leqq t\leqq\tau_2}\|u_\lambda(t)-u_0(t)\|+\max_{\tau_1\leqq t\leqq\tau_2}\|y_\lambda(t)-y_0(t)\|+\max_{\tau_1\leqq t\leqq\tau_2}\|z_\lambda(t)-z_0(t)\|<\varepsilon.$$

Существует большое число статей, в которых рассматриваются задачи оптимального управления с малым параметром при некоторых из производных в законе движения (см., например [5—9]). В этой работе представлено расширение результатов из [5] для задачи с фиксированным правым концом в случае, когда для закона движения, согласно принятой в [1] терминологии, имеет место условно устойчивый случай. Аналогично изучаются и задачи с подвижным и свободным правым концом из [7].

2. Сначала изучим некоторые свойства следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned}\dot{x}&=A_{11}(t)x+A_{12}(t)y+\beta_1A_{13}(t)z+f_1(t, \lambda)\\ \lambda\dot{y}&=A_{21}(t)x+A_{22}(t)y\qquad\qquad+f_2(t, \lambda)\\ \lambda\dot{z}&=\beta_2A_{31}(t)x+A_{33}(t)z+f_3(t, \lambda),\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$x(t_0)=v_0(\lambda),\quad y(t_0)=w_0(\lambda),\quad z(T)=s_T(\lambda).\tag{2.2}$$

Для этого понадобится задача

$$\dot{x}=A_0(t)x+F(t),\tag{2.3}$$

$$x(t_0)=v_0,\tag{2.4}$$

где $F(t)=f_1(t, 0)-A_{12}(t)A_{22}^{-1}(t)f_2(t, 0)-\beta_1A_{13}(t)A_{33}^{-1}(t)f_3(t, 0)$. Введем обозначение

$$\begin{aligned}\nu_0(t, \lambda)=&\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\lambda}X(t, \tau)A_{12}(\tau)\int_{t_0}^{\tau}Y(\tau, \sigma, \lambda)[f_2(\sigma, \lambda)-f_2(\sigma, 0)]d\sigma d\tau+\int_{t_0}^{t}X(t, \tau)[f_1(\tau, \lambda)\\ &-f_1(\tau, 0)]d\tau+\frac{\beta_1}{\lambda}\int_{t_0}^{t}X(t, \tau)A_{13}(\tau)\int_{T}^{t}Z(\tau, \sigma, \lambda)[f_3(\sigma, \lambda)-f_3(\sigma, 0)]d\sigma d\tau\\ &+\int_{t_0}^{t}X(t, \tau)[A_{12}(\tau)Y(\tau, t_0, \lambda)w_0(\lambda)+\beta_1A_{13}(\tau)Z(\tau, T, \lambda)s_T(\lambda)]d\tau\end{aligned}$$

$$-\int_{t_0}^{t} X(t,\tau)A_{12}(\tau)\left[\frac{1}{\lambda}\int_{t_0}^{\tau} Y(\tau,\sigma,\lambda)A_{22}(\sigma)\widetilde{y}_0(\sigma)d\sigma+\widetilde{y}_0(\tau)\right]d\tau$$

$$+X(t,t_0)[v_0(\lambda)-v_0]-\beta_1\int_{t_0}^{t} X(t,\tau)A_{13}(\tau)\left[\frac{1}{\lambda}\int_{T}^{\tau} Z(\tau,\sigma,\lambda)A_{33}(\sigma)\widetilde{z}_0(\sigma)d\sigma+\widetilde{z}_0(\tau)\right]d\tau,$$

где если $\widetilde{x}_0$ решение задачи (2.3), (2.4), то

$$\widetilde{y}_0(t)=-A_{22}^{-1}(t)[A_{21}(t)\widetilde{x}_0(t)+f_2(t,0)],\quad \widetilde{z}_0(t)=-A_{33}^{-1}(t)[\beta_2A_{31}(t)\widetilde{x}_0(t)+f_3(t,0)].$$

Теорема 2.1 *Пусть выполняются предположение А и по крайней мере одно из предположений* Е1 *или* Е2. *Пусть, далее, при* $\lambda\in[0,\Lambda$ *функции* $f_i(\cdot,\lambda)\in L_1^{(n_i)}[t_0,T]$, $i=1,2,3$ *и множество функций* $f_1(\cdot,\lambda)$ *ограничено в* $L_1^{(n_1)}[t_0,T]$; *точки* $v_0(\lambda)\in R^{n_1}$, $w_0(\lambda)\in R^{n_2}$, $s_T(\lambda)\in R^{n_3}$ *и множества точек* $v_0(\lambda)$, $\lambda w_0(\lambda)$, $\lambda s_T(\lambda)$ *ограничены. Тогда:*

1) *если множества функций* $f_i(\cdot,\lambda)$, $\lambda\in(0,\Lambda)$, *ограничены в* $L_1^{(n_i)}[t_0,T]$ $i=2,3$, *то для всех достаточно малых* $\lambda>0$ *задача* (2.1), (2.2) *имеет решение* $(\widetilde{x}_\lambda,\widetilde{y}_\lambda,\widetilde{z}_\lambda)$ *и существует такая постоянная* c_1, *что*

$$\|\widetilde{x}_\lambda(t)-\widetilde{x}_0(t)\|\leq c_1\max_{t_0\leq\tau\leq T}\|\nu_0(\tau,\lambda)\|, \tag{2.5}$$

$$\max_{t_0\leq t\leq T}\|\widetilde{x}_\lambda(t)\|\leq c_1,\quad \int_{t_0}^{T}\|\widetilde{y}_\lambda(t)\|dt\leq c_1,\quad \int_{t_0}^{T}\|\widetilde{z}_\lambda(t)\|dt\leq c_1; \tag{2.6}$$

2) *если множества функций* $f_i(\cdot,\lambda)$, $\lambda\in(0,\Lambda)$, *равномерно ограничены на отрезке* $[t_0,T]$, $i=2,3$, *то для любых двух точек* τ_0,τ_1, $t_0<\tau_0<\tau_1<T$, *существует такая постоянная* c_2, *что при всех достаточно малых* $\lambda>0$ *имеют место неравенства*

$$\max_{\tau_0\leq t\leq T}\|\widetilde{y}_\lambda(t)\|\leq c_2,\quad \max_{t_0\leq t\leq\tau_1}\|\widetilde{z}_\lambda(t)\|\leq c_2; \tag{2.7}$$

если множества точек $w_0(\lambda)$, $s_T(\lambda)$, $\lambda\in(0,\Lambda)$, *ограничены, то неравенства* (2.7) *выполняются и для* $\tau_0=t_0$, $\tau_1=T$.

Доказательство. Если введено обозначение $\nu(t)=x(t)-\widetilde{x}_0(t)$, то из (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) следует, что задача (2.1), (2.2) имеет решение тогда и только тогда, когда существует решение интегрального уравнения

$$\begin{aligned}\nu(t)=\nu_0(t,\lambda)&+\frac{1}{\lambda}\int_{t_0}^{t}X(t,\tau)A_{12}(\tau)\int_{t_0}^{\tau}Y(\tau,\sigma,\lambda)A_{21}(\sigma)\nu(\sigma)d\sigma d\tau\\&+\frac{\beta_1\beta_2}{\lambda}\int_{t_0}^{t}X(t,\tau)A_{13}(\tau)\int_{T}^{\tau}Z(\tau,\sigma,\lambda)A_{31}(\sigma)\nu(\sigma)d\sigma d\tau.\end{aligned} \tag{2.8}$$

В качестве начального приближения для решения уравнения (2.8) методом последовательных приближений выбирается функция $\nu_0(t,\lambda)$. Меняя порядок интегрирования в правой части (2.8) для $k=1,2,\ldots$, получаем

$$\nu_k(t,\lambda)=\nu_0(t,\lambda)+\int_{t_0}^{t}\Big[\int_{\sigma}^{t}X(t,\tau)A_{12}(\tau)A_{22}^{-1}(\tau)dY(\tau,\sigma,\lambda)\Big]A_{21}(\sigma)\nu_{k-1}(\sigma,\lambda)d\sigma$$

$$(2.9)\qquad +\beta_1\beta_2\int_{T}^{t}\Big[\int_{t_0}^{t}X(t,\tau)A_{13}(\tau)A_{33}^{-1}(\tau)dZ(\tau,\sigma,\lambda)\Big]A_{31}(\sigma)\nu_{k-1}(\sigma,\lambda)d\sigma$$

$$+\beta_1\beta_2\int_{t}^{t_0}\Big[\int_{t_0}^{\sigma}X(t,\tau)A_{13}(\tau)A_{33}^{-1}(\tau)dZ(\tau,\sigma,\lambda)\Big]A_{31}(\sigma)\nu_{k-1}(\sigma,\lambda)d\sigma.$$

Сначала рассмотрим случай, когда выполняется предположение E1, т. е. $\beta_1\beta_2=0$. Докажем по индукции, что

$$(2.10)\qquad \|\nu_k(t,\lambda)-\nu_{k-1}(t,\lambda)\|\leqq Mc_0^k(t-t_0)^{k-1}/(k-1)!,$$

где $M=\int_{t_0}^{T}\|\nu_0(t,\lambda)\|dt$ и

$$c_0=\sup_{\lambda}\max_{t_0\leqq\sigma\leqq t\leqq T}\Big\|\int_{\sigma}^{t}X(t,\tau)A_{12}(\tau)A_{22}^{-1}(\tau)dY(\tau,\sigma,\lambda)A_{21}(\sigma)\Big\|.$$

Тогда при $k=1$ из (2.9) получается $\|\nu_1(t,\lambda)-\nu_0(t,\lambda)\|\leqq c_0M$. Если допустим, что (2.10) имеет место при k, то из (2.9) и (2.10) следует, что

$$\|\nu_{k+1}(t,\lambda)-\nu_k(t,\lambda)\|\leqq c_0\int_{t_0}^{t}\|\nu_k(\tau,\lambda)-\nu_{k-1}(\tau,\lambda)\|d\tau\leqq Mc_0^{k+1}(t-t_0)^k/k!.$$

Этим неравенство (2.10) доказано. Следовательно, ряд

$$(2.11)\qquad \nu(t,\lambda)=\nu_0(t,\lambda)+\sum_{k=1}^{\infty}[\nu_k(t,\lambda)-\nu_{k-1}(t,\lambda)]$$

сходится равномерно на отрезке $[t_0,T]$ для всех достаточно малых $\lambda>0$. Но тогда равномерно выполняется и равенство $\nu(t,\lambda)=\lim_{k\to\infty}\nu_k(t,\lambda)$. Сделав предельный переход в (2.9), получим, что $\nu(t,\lambda)$ является решением уравнения (2.8). Из (2.10) и (2.11) следует, что существует постоянная c_1, при которой имеет место неравенство (2.5). Дальше уже нетрудно получить остальную часть утверждения теоремы в этом случае.

Пусть выполняется предположение E2. Тогда, решая снова уравнение (2.8) методом последовательных приближений при начальном приближении $\nu_0(t,\lambda)$, получаем, что имеет место неравенство

$$(2.12)\qquad \|\nu_k(t,\lambda)-\nu_{k-1}(t,\lambda)\|\leqq q^k\max_{t_0\leqq t\leqq T}\|\nu_0(t,\lambda)\|,$$

которое снова доказывается по индукции. Из (2.12) следует сходимость ряда (2.11) и что $\nu(t,\lambda)$ является решением уравнения (2.8). Далее доказательство проводится как и в первом случае.

Теорема 2. 2. *Пусть выполняются предположение* A *и по крайней мере одно из предположений* E1 *или* E2. *Пусть, далее,* $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — *последовательность чисел* $\lambda_k>0$, $\lim_{k\to\infty}\lambda_k=0$; $\{f_i(\cdot,\lambda_k)\}_1^\infty$ — *последовательность функций* $f_i(\cdot,\lambda_k)\in L_p^{(n_i)}[t_0,T]$, *которая слабо сходится к функции* $f_i(\cdot,0)$, $i=1,2,3$. *Пусть, наконец, через* (x_k,y_i,z_k) *обозначено решение задачи* (2.1), (2.2) *при* $\lambda=\lambda_k$. *Тогда:*

1) *если* $\lim_{k\to\infty} v_0(\lambda_k)=v_0$, $\lim_{k\to\infty}\lambda_k\|w_0(\lambda_k)\|=0$, $\lim_{k\to\infty}\lambda_k\|s_T(\lambda_k)\|=0$, *то*

$$\lim_{k\to\infty}\max_{t_0\le t\le T}\|x_k(t)-\widetilde{x}_0(t)\|=0; \tag{2.13}$$

если $\lim_{k\to\infty}\beta(\lambda_k)/(\lambda_k^{1/p})=0$ *и последовательности* $\{w_0(\lambda_k)\}_1^\infty$, $\{s_T(\lambda_k)\}_1^\infty$ *ограничены, то последовательности* $\{\beta(\lambda_k)y_k\}_1^\infty$, $\{\beta(\lambda_k)z_k\}_1^\infty$ *равномерно ограничены на отрезке* $[t_0, T]$ *и почти всюду поточечно сходятся к нулевым функциям;*

2) *при предположениях из* 1), *если функции* $f_i(t,\lambda_k)$, $t_0\le t\le T$, $i=2, 3$ непрерывны и последовательности $\{f_2(\cdot,\lambda_k)\}_1^\infty$, $\{f_3(\cdot,\lambda_k)\}_1^\infty$ *сходятся равномерно соответственно к* $f_2(\cdot,0)$ *и* $f_3(\cdot,0)$, *то для любых двух точек* τ_0, τ_1, $t_0<\tau_0<\tau_1<T$ *выполняется*

$$\lim_{k\to\infty}\max_{\tau_0\le t\le T}\|y_k(t)-\widetilde{y}_0(t)\|=0,\quad \lim_{k\to\infty}\max_{t_0\le t\le \tau_1}\|z_k(t)-z_0(t)\|=0; \tag{2.14}$$

3) *при предположениях из* 1), *если* $f^0(t,x,y,z,\lambda)$ — *непрерывная для* $(t,x,y,z,\lambda)\in[t_0,T]\times R^{n_1}\times R^{n_2}\times R^{n_3}\times[0,\Lambda]$ *функция, которая при всех* $(t,\lambda)\in[t_0,T]\times[0,\Lambda)$ *выпукла и имеет непрерывные первые частные производные по* (x,y,z), *то*

$$\liminf_{k\to\infty}\int_{t_0}^{T} f^0(t,x_k(t),y_k(t),z_k(t),\lambda_k)\,dt\ge\int_{t_0}^{T} f^0(t,\widetilde{x}_0(t),\widetilde{y}_0(t),\widetilde{z}_0(t),0)\,dt; \tag{2.15}$$

если дополнительно предположим, что последовательности $\{\sqrt[p]{\lambda_k}\|w_0(\lambda_k)\|\}_1^\infty$, $\{\sqrt[p]{\lambda_k}\|s_T(\lambda_k)\|\}_1^\infty$ *ограничены и последовательности* $\{f_2(\cdot,\lambda_k)\}_1^\infty$, $\{f_3(\cdot,\lambda_k)\}_1^\infty$ *равномерно ограничены, то тогда последовательности* $\{y_k\}_1^\infty$ *и* $\{z_k\}_1^\infty$ *сходятся слабо соответственно к* $\widetilde{y}_0$ *в* $L_p^{(n_2)}[t_0,T]$ *и к* $\widetilde{z}_0$ *в* $L_p^{(n_3)}[t_0,T]$.

Доказательство. В силу предположений 1) равенство (2.13) следует из (2.5). Второе утверждение в 1) проверяется непосредственно. Равенства (2.14) следуют из леммы 1 из [7], которая применяется соответственно ко второму и третьему уравнениюв (2.1).

Переходим к доказательству неравенства (2.15). Так как

$$\int_{t_0}^{T} f^0(t,x_k(t),y_k(t),z_k(t),\lambda_k)\,dt-\int_{t_0}^{T} f^0(t,\widetilde{x}_0(t),\widetilde{y}_0(t),\widetilde{z}_0(t),\lambda_k)\,dt$$

$$\ge\int_{t_0}^{T}\Big\{\frac{\partial f^0(t,\widetilde{x}_0(t),\widetilde{y}_0(t),\widetilde{z}_0(t),\lambda_k)}{\partial x}(x_k(t)-\widetilde{x}_0(t))+\frac{\partial f^0(t,\widetilde{x}_0(t),\widetilde{y}_0(t),\widetilde{z}_0(t),\lambda_k)}{\partial y}(y_k(t)$$

$$-\widetilde{y}_0(t))+\frac{\partial f^0(t,\widetilde{x}_0(t),\widetilde{y}_0(t),\widetilde{z}_0(t),\lambda_k)}{\partial z}(z_k(t)-\widetilde{z}_0(t))\Big\}dt,$$

то из (2.13) следует, что (2.15) будет, если выполняются соотношения

$$\lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{T}\frac{\partial f^0(t,\widetilde{x}_0(t),\widetilde{y}_0(t),\widetilde{z}_0(t),\lambda_k)}{\partial y}(y_k(t)-\widetilde{y}_0(t))\,dt=0, \tag{2.16}$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{T}\frac{\partial f^0(t,\widetilde{x}_0(t),\widetilde{y}_0(t),\widetilde{z}_0(t),\lambda_k)}{\partial z}(z_k(t)-\widetilde{z}_0(t))\,dt=0.$$

Поскольку эти равенства доказываются одинаково, докажем только первое из них. Так как

$$y_k(t)=Y(t, t_0, \lambda_k)w_0(\lambda_k)+\frac{1}{\lambda_k}\int_{t_0}^{t} Y(t, \tau, \lambda_k)A_{21}(\tau)x_k(\tau)d\tau$$

$$+\frac{1}{\lambda_k}\int_{t_0}^{t} Y(t, \tau, \lambda_k)f_2(\tau, \lambda_k)d\tau,$$

то из (2.16) получается

$$\left\|\int_{t_0}^{T}\frac{\partial f^0(t, \widetilde{x}_0(t), \widetilde{y}_0(t), \widetilde{z}_0(t), \lambda_k)}{\partial y}(y_k(t)-\widetilde{y}_0(t))dt\right\|$$

$$\tag{2.17} \leqq\left\|\int_{t_0}^{T}\frac{\partial f^0(t, \widetilde{x}_0(t), \widetilde{y}_0(t), \widetilde{z}_0(t), \lambda_k)}{\partial y}Y(t, t_0, y_k)w_0(\lambda_k)dt\right\|$$

$$+\left\|\int_{t_0}^{T}\frac{\partial f^0(t, \widetilde{x}_0(t), \widetilde{y}_0(t), \widetilde{z}_0(t), \lambda_k)}{\partial z}\left\{\frac{1}{\lambda_k}\int_{t_0}^{t} Y(t, \tau, \lambda_k)[A_{21}(\tau)x_k(\tau)+f_2(\tau, \lambda_k)]d\tau-\widetilde{y}_0(t)\right\}dt\right\|.$$

Сходимость к нулю двух слагаемых в правой части доказывается использованием теоремы Хелли о предельном переходе в интеграле Стилтьеса.

Слабая сходимость последовательностей $\{y_k\}_1^\infty$ и $\{z_k\}_1^\infty$ доказывается с помощью теоремы VIII. 3.2 из [3]. Этим доказательство теоремы закончено.

3. Теперь изучим некоторые свойства управляемого объекта Q_λ, $\lambda\in(0, \Lambda)$, поведение которого на отрезке $[t_0, T]$ описывается системой дифференциальных уравнений (1.1).

Лемма 3.1. *Пусть выполняются предположения* A, C *и по крайней мере одно из предположений* E1 *или* E2. *Пусть, далее,* $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — *последовательность чисел* $\lambda_k>0$, $\lim_{k\to\infty}\lambda_k=0$; $w_0\in R^{n_2}$, $w_T\in R^{n_2}$, $s_0\in R^{n_3}$, $s_T\in R^{n_3}$ *и* $\widetilde{u}(t)$, $t_0\leqq t\leqq T$, — *непрерывное управление с соответствующей, согласно* (1.5), *траекторией* $\widetilde{x}$, *которое переводит объект* Q_0 *из начального состояния* $v_0\in R^{n_1}$ *в конечное состояние* $v_T\in R^{n_1}$. *Тогда существует последовательность* $\{\widetilde{u}_k\}_1^\infty$ *r-мерных функций* $\widetilde{u}_k$ *с соответствующими, согласно* (1.1), *траекториями* $(\widetilde{x}_k, \widetilde{y}_k, \widetilde{z}_k)$, *которые обладают следующими свойствами:*

1) *последовательности* $\{\widetilde{u}_k\}_1^\infty$, $\{\widetilde{x}_k\}_1^\infty$, $\{\widetilde{y}_k\}_1^\infty$, $\{\widetilde{z}_k\}_1^\infty$ *равномерно ограничены и в каждой точке* $t\in(t_0, T)$ *сходятся соответственно к* $\widetilde{u}$, $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}=-A_{22}^{-1}(A_{21}\widetilde{x}+B_2\widetilde{u})$, $\widetilde{z}=-A_{33}^{-1}(\beta_2A_{31}\widetilde{x}+B_3\widetilde{u})$;

2) *имеют место равенства*

$$\tag{2.18} \widetilde{x}_k(t_0)=v_0,\ \widetilde{y}_k(t_0)=w_0,\ \widetilde{z}_k(t_0)=s_0,\ \lim_{k\to\infty}\widetilde{x}_k\times(T)=v_T,\ \widetilde{y}_k(T)$$

$$=w_T,\ \widetilde{z}_k(T)=s_T,\ \lim_{k\to\infty}I(\widetilde{u}_k, \lambda_k)=I(\widetilde{u}, 0).$$

Доказательство. Пусть $w_1^T, \ldots, w_\nu^T$ являются вершинами произвольного выпуклого многогранника, который содержит в своей внутренности точку w_T. Введем обозначения:

$$\widetilde{w}_T=-A_{22}^{-1}(T)[A_{21}(T)\widetilde{x}(T)+B_2(T)\widetilde{u}(T)],$$

$$\widetilde{s}_0=-A_{33}^{-1}(t_0)[\beta_2A_{31}(t_0)\widetilde{x}(t_0)+B_3(t_0)\widetilde{u}(t_0)],$$

$$t'_k = t_0 + \sqrt{\lambda_k}, \quad M_k^0 = \frac{1}{\lambda_k} \int_{t_0}^{t'_k} Z(t_0, \tau, \lambda_k) B_3(\tau) B_3^*(\tau) Z^*(t_0, \tau, \lambda_k) d\tau,$$

$$t''_k = T - \sqrt{\lambda_k}, \quad M_k^T = \frac{1}{\lambda_k} \int_{t''_k}^{T} Y(T, \tau, \lambda_k) B_2(\tau) B_3^*(\tau) Y^*(T, \tau, \lambda_k) d\tau,$$

где звездой обозначается транспонирование. Аналогично как в лемме 2 из [5] с использованием теоремы 2.1 и теоремы 2.2 доказывается, что для последовательностей $\{u_k^i\}_{k=1}^{\infty}$, $i = 1, \ldots, \nu$, где $u_k^i(t) = \widetilde{u}(t) + \delta u_k^i(t)$,

$$\delta u_k^i(t) = \begin{cases} B_3^*(t) Z^*(t_0, t, \lambda_k)(M_k^0)^{-1}(s_0 - \widetilde{s}_0), & t \in [t_0, t'_k], \\ 0 \quad , & t \in (t'_k, t''_k), \\ B_2^*(t) Y^*(T, t, \lambda_k)(M_k^T)^{-1}(w_T^i - \widetilde{w}_T), & t \in [t''_k, T] \end{cases}$$

и (x_k^i, y_k^i, z_k^i) — соответствующее u_k^i решение задачи (1.1), (2.18) при $\lambda = \lambda_k$, выполняется утверждение 1) и имеют место соотношения

$$\lim_{k \to \infty} x_k^i(T) = v_T, \quad \lim_{k \to \infty} y_k^i(T) = w_i^T, \quad \lim_{k \to \infty} z_k^i(t_0) = s_0. \tag{2.19}$$

Из (2.19) следует, что для всех достаточно больших k точка w_T принадлежит выпуклой оболочке точек $y_k^i(T)$, $i = 1, \ldots, \nu$. Тогда для всех таких k найдутся числа $\mu_k^i \geq 0$, $i = 1, \ldots, \nu$, $\Sigma_{i=1}^{\nu} \mu_k^i = 1$, что $w_T = \Sigma_{i=1}^{\nu} \mu_k^i y_k^i(T)$. Пусть $(\overline{x}_k, \overline{y}_k, \overline{z}_k)$ — соответствующее управлению $u_k = \Sigma_{i=1}^{\nu} \mu_k^i u_k^i$ решение задачи (1.1), (2.18) при $\lambda = \lambda_k$. Тогда для последовательностей $\{u_k\}_1^{\infty}$, $\{\overline{x}_k\}_1^{\infty}$, $\{\overline{y}_k\}_1^{\infty}$, $\{\overline{z}_k\}_1^{\infty}$ выполняется утверждение 1) леммы и имеют место соотношения

$$\lim_{k \to \infty} \overline{x}_k(T) = v_T, \quad \overline{y}_k(T) = w_T, \quad \lim_{k \to \infty} \overline{z}_k(t_0) = s_0.$$

Пусть $s_1^0, \ldots, s_\sigma^0$ являются вершинами произвольного выпуклого многогранника, который содержит в своей внутренности точку s_0. В силу уже доказанного следует, что существуют такие управления $\overline{u}_k^j$, $j = 1, \ldots, \sigma$; $k = 1, 2, \ldots$, что если $(\overline{x}_k^j, \overline{y}_k^j, \overline{z}_k^j)$ — соответствующее управлению $\overline{u}_k^j$ решение задачи (1.1), (2.18) при $\lambda = \lambda_k$, то для последовательностей $\{\overline{u}_k^j\}_1^{\infty}$, $\{\overline{x}_k^j\}_1^{\infty}$, $\{\overline{y}_k^j\}_1^{\infty}$, $\{\overline{z}_k^j\}_1^{\infty}$, $j = 1, \ldots, \sigma$, выполняется утверждение 1) леммы и имеют место соотношения: $\lim_{k \to \infty} \overline{x}_k^j(T) = v_T$, $\overline{y}_k^j(T) = w_T$, $\lim_{k \to \infty} \overline{z}_k^j = s_0^j$. Но тогда для всех достаточно больших k точка s_0 принадлежит выпуклой оболочке точек $\overline{z}_k^j(t_0)$, $j = 1, \ldots, \sigma$. Следовательно, для этих k найдутся такие числа $\overline{\mu}_k^j \geq 0$, $j = 1, \ldots, \sigma$, $\Sigma_{j=1}^{\sigma} \overline{\mu}_k^j = 1$, что $s_0 = \Sigma_{j=1}^{\sigma} \overline{\mu}_k^j \overline{z}_k^j(t_0)$. Доказательство кончается проверкой, что управления $\widetilde{u}_k = \Sigma_{j=1}^{\sigma} \overline{\mu}_k^j \overline{u}_k^j$ с соответствующими решениями $(\widetilde{x}_k, \widetilde{y}_k, \widetilde{z}_k)$ задачи (1.1), (2.18) при $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$, обладают всеми свойствами, которые требуются в лемме.

В качестве непосредственного приложения этой леммы получается следующая

Теорема 3.1. *Если выполняются предположения* A, B, C *и по крайней мере одно из предположений* E1 *или* E2, *то для всех достаточно малых* λ *объект* Q_λ *вполне управляемый на отрезке* $[t_0, T]$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1 [5] и поэтому не приводится.

4. Через $D(\lambda)$, $\lambda \in (0, 1)$, обозначим множество достижимости в $(n+1)$-мерном пространстве R^{n+1} от начальной точки (v_0, w_0, s_0) для объекта Q_λ с законом движения (1.1) (см. [4]), где $n = n_1 + n_2 + n_3$. Пусть $N(\lambda)$ — множество единичных внешних нормалей $(\theta(\lambda), q^1(\lambda), q^2(\lambda), q^3(\lambda))$ к множеству $D(\lambda)$ в точке $(I_\lambda, v_T, w_T, s_T)$, лежащей на границе множества $D(\lambda)$, где $q^i(\lambda) \in R^{n_i}$ для $i = 1, 2, 3$ и $\theta(\lambda) < 0$.

Лемма 4.1. *Пусть выполняются предположения* A, B, C *и по крайней мере одно из предположений* E1 *или* E2. *Пусть, далее,* $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — *последовательность чисел* $\lambda_k > 0$, *для которой* $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$ *и* $(\theta_k, q_k^1, q_k^2, q_k^3)$ — *точки из* $N(\lambda_k)$, $k = 1, 2, \ldots$. *Тогда, если*

$$\lim_{k\to\infty} (\theta_k, q_k^1, q_k^2, q_k^3) = (\theta_0, q_0^1, q_0^2, q_0^3),$$

то $\theta_0 < 0$ *и* $\| q_0^2 \| = \| q_0^3 \| = 0$.

Доказательство. Пусть α_1, α_2 — произвольные положительные числа. В силу предположения B существует такое непрерывное управление $\tilde{u}$ с соответствующей, согласно (1.5), траекторией $\tilde{x}$, что $\tilde{x}(t_0) = v_0$, $\tilde{x}(T) = v_T + \alpha_1 q_0^1$. Последовательность $\{\tilde{u}_k\}_1^\infty$ из управлений $\tilde{u}_k$ с соответствующими, согласно (1.1), при $\lambda = \lambda_k$ траекториями $(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k, \tilde{z}_k)$ выбирается с помощью леммы 3.1 так, чтобы выполнялись соотношения

$$\tilde{x}_k(t_0) = v_0, \quad \tilde{y}_k(t_0) = w_0, \quad \tilde{z}_k(t_0) = s_0,$$

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{x}_k(T) = v_T + \alpha_1 q_0^1, \ \tilde{y}_k(T) = w_T + \alpha_2 q_0^2, \ \tilde{z}_k(T) = s_T + \alpha_2 q_0^3,$$

$$\lim_{k\to\infty} I(\tilde{u}_k, \lambda_k) = I(\tilde{u}, 0).$$

Но так как $(I(\tilde{u}_k, \lambda_k) + I_{\lambda_k} + 1, \ \tilde{x}_k(T), \tilde{y}_k(T), \tilde{z}_k(T)) \in D(\lambda_k)$, то

$$\theta_k(I(\tilde{u}_k, \lambda_k) + I_{\lambda_k} + 1 - I_{\lambda_k}) + (q_k^1)^*(\tilde{x}_k(T) - v_T) + \alpha_2[(q_k^2)^* q_0^2 + (q_k^3)^* q_0^3] \leq 0.$$

После предельного перехода приходим к неравенству

$$\theta_0(1 + I(\tilde{u}, 0)) + \alpha_1 \| q_0^1 \|^2 + \alpha_2 (\| q_0^2 \|^2 + \| q_0^3 \|^2) \leq 0. \tag{4.1}$$

Если допустим, что $\| q_0^2 \|^2 + \| q_0^3 \|^2 > 0$, то в силу того, что число $\alpha_2 > 0$ произвольно, получается противоречие в (4.1). Следовательно, $\| q_0^2 \| = \| q_0^3 \| = 0$. Тогда из предложения $\theta_0 = 0$ следует, что $\| q_0^1 \| = 1$, и снова приходим к противоречию в (4.1). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.1. При предположениях теоремы в силу теоремы 3.1 для всех достаточно малых $\lambda > 0$ объект Q_λ вполне управлемый на отрезке $[t_0, T]$. Тогда для тех же самых λ задача P_λ имеет единственное оптимальное управление u_λ (см. [4]). Сначала докажем, что имеет место неравенство

$$\limsup_{\lambda\to 0} I_\lambda \leqq I_0. \tag{4.2}$$

Допустим, что существует такая последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ чисел $\lambda_k>0$, для которой $\lim_{k\to\infty}\lambda_k=0$ и число $\alpha_0>0$, что для $k=1,2,\ldots$ выполняется

$$I_{\lambda_k} \geqq I_0+\alpha_0. \tag{4.3}$$

В предположениях теоремы задача P_0 имеет единственное оптимальное управление u_0, которое, согласно [2], является непрерывной функцией. С помощью леммы 3.1 строятся соответствующие управлению u_0 последователь ности $\{\widetilde{u}_k\}_1^\infty$, $\{\widetilde{x}_k\}_1^\infty$, $\{\widetilde{y}_k\}_1^\infty$, $\{\widetilde{z}_k\}_1^\infty$, для которых

$$\begin{gathered}\widetilde{x}_k(t_0)=v_0, \quad \widetilde{y}_k(t_0)=w_0, \quad \widetilde{z}_k(t_0)=s_0,\\ \lim_{k\to\infty}\widetilde{x}_k(T)=v_T, \quad \widetilde{y}_k(T)=w_T, \quad \widetilde{z}_k(T)=s_T,\\ \lim_{k\to\infty} I(u_k,\lambda_k)=I(u_0,0)=I_0.\end{gathered} \tag{4.4}$$

Пусть $(\theta_k, q_k^1, q_k^2, q_k^3)\in N(\lambda_k)$ и $\lim_{k\to\infty}(\theta_k, q_k^1, q_k^2, q_k^3)=(\theta_0, q_0^1, q_0^2, q_0^3)$. Согласно лемме 4.1, $\|q_0^2\|=\|q_0^3\|=0$ и $\theta_0<0$. Так как $(I(\widetilde{u}_k,\lambda_k), \widetilde{x}_k(T), \widetilde{y}_k(T), \widetilde{z}_k(T))\in D(\lambda_k)$, то

$$\theta_k(I(\widetilde{u}_k,\lambda_k)-I_{\lambda_k})+(q_k^1)^*(\widetilde{x}_k(T)-v_T)\leqq 0. \tag{4.5}$$

Из (4.3) и (4.5) следует неравенство $\theta_k(I(\widetilde{u}_k,\lambda_k)-I_0-\alpha_0)+(q_k^1)^*(\widetilde{x}_k(T)-v_T)\leqq 0$, откуда в силу (4.4) после предельного перехода получается противоречие $0>\theta_0\alpha_0\geqq 0$. Этим соотношение (4.2) доказано.

Теперь допустим, что существуют такие число $\varepsilon_0>0$ и последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ чисел $\lambda_k>0$, $\lim_{k\to\infty}\lambda_k=0$, что

$$|I_{\lambda_k}-I_0|+\max_{t_0\leqq t\leqq T}\|x_{\lambda_k}(t)-x_0(t)\|\geqq\varepsilon_0. \tag{4.6}$$

Из (4.2) и предположений для функции h в (1.3) следует, что последовательность $\{u_{\lambda_k}\}_1^\infty$ ограничена в $L_p^{(r)}[t_0,T]$ и, следовательно, не ограничивая общности, можем считать, что она слабо сходится к некоторой функции $\bar{u}\in L_p^{(r)}[t_0,T]$. Пусть через $\bar{x}$ обозначено решение уравнения (1.5) с начальным условием v_0 при $u=\bar{u}$. Согласно теореме 2.2, последовательность $\{x_{\lambda_k}\}_1^\infty$ сходится равномерно на отрезке $[t_0,T]$ к $\bar{x}$ и

$$\liminf_{k\to\infty} I_{\lambda_k}\geqq I(\bar{u},0). \tag{4.7}$$

И так как $\bar{x}(T)=v_T$, то из (4.2) и (4.7) следует, что $\bar{u}=u_0$. Следовательно неравенство (4.6) нарушается для бесконечного числа индексов k. Достигнутое противоречие доказывает теорему.

Лемма 4.2. *Пусть выполняются предположения* A, B, C *и по крайней мере одно из предположений* E1 *или* E2. *Пусть, далее,* $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — *последовательность чисел* $\lambda_k>0$, $\lim_{k\to\infty}\lambda_k=0$ *и* $(\theta_k, q_k^1, q_k^2, q_k^3)$ — *точки из* $N(\lambda_k)$, $k=1,2,\ldots$. *Тогда, если обозначим*

$$\frac{\partial \bar{f}_k(t)}{\partial x}=\frac{\partial f(t,\ x_{\lambda_k}t, \beta(\lambda_k)\,y_{\lambda_k}(t),\ \beta(\lambda_k)z_{\lambda_k}(t))}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \bar{f}_k(t)}{\partial w}=\frac{\partial f(t,\ x_{\lambda_k}(t),\ \beta(\lambda_k)\,y_{\lambda_k}(t),\ \beta(\lambda_k)z_{\lambda_k}(t))}{\partial w},$$

$$\frac{\partial \bar{f}_k(t)}{\partial s}=\frac{\partial f(t,\ x_{\lambda_k}(t),\ \beta(\lambda_k)\,y_{\lambda_k}(t),\ \beta(\lambda_k)z_{\lambda_k}(t))}{\partial s}$$

и $(\xi_k,\ \eta_k,\ \zeta_k)$ — *решение задачи*

$$\dot{\xi}=-A_{11}^*(t)\xi-\frac{1}{\lambda_k}A_{21}^*(t)\eta-\frac{\beta_2}{\lambda_k}A_{31}^*(t)\zeta-\theta_k\frac{\partial \bar{f}_k(t)}{\partial x}$$

(4.8) $$\dot{\eta}=-A_{12}^*(t)\xi-\frac{1}{\lambda_k}A_{22}^*(t)\eta-\theta_k\frac{\partial \bar{f}_k(t)}{\partial w}\beta(\lambda_k)$$

$$\dot{\zeta}=-\beta_1 A_{13}^*(t)\xi-\frac{1}{\lambda_k}A_{33}^*(t)\zeta-\theta_k\frac{\partial \bar{f}_k(t)}{\partial s}\beta(\lambda_k),$$

(4.9) $$\xi(T)=q_k^1,\quad \eta(T)=q_k^2,\quad \zeta(T)=q_k^3,$$

то $\lim_{k\to\infty}\|\zeta_k(t_0)\|=0$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда, не ограничивая общности, можем считать, что $\lim_{k\to\infty}\zeta_k(t_0)=\zeta_0$ и $\|\zeta_0\|>0$. С помощью леммы 3.1 строим соответствующие управлению u_0 последовательности $\{\widetilde{u}_k\}_1^\infty$, $\{\widetilde{x}_k\}_1^\infty$, $\{\widetilde{y}_k\}_1^\infty$, $\{\widetilde{z}_k\}_1^\infty$, для которых выполняется

$$\widetilde{x}_k(t_0)=v_0,\quad \widetilde{y}_k(t_0)=w_0,\quad \widetilde{z}_k(t_0)=s_0-\zeta_0,$$

$$\lim_{k\to\infty}\widetilde{x}_k(T)=v_T,\quad \widetilde{y}_k(T)=w_T,\quad \widetilde{z}_k(T)=s_T,$$

$$\lim_{k\to\infty}I(\widetilde{u}_k,\ \lambda_k)=I(u_0,0)=I_0.$$

Так как $(x_{\lambda_k},\ y_{\lambda_k},\ z_{\lambda_k})$ и $(\widetilde{x}_k, \widetilde{y}_k, \widetilde{z}_k)$ — решения системы (1.1), а (ξ_k, η_k, ζ_k) — решения системы (4.8), то имеют место равенства

$$\theta_k I_{\lambda_k}+\xi_k^*(T)x_{\lambda_k}(T)+\eta_k^*(T)y_{\lambda_k}(T)+\zeta_k^*(T)z_{\lambda_k}(T)-\xi_k^*(t_0)x_{\lambda_k}(t_0)$$
$$-\eta_k^*(t_0)\,y_{\lambda_k}(t_0)-\zeta_k^*(t_0)z_{\lambda_k}(t_0)=\int_{t_0}^{T}\{\theta_k[f(t,\ x_{\lambda_k}(t),\ \beta(\lambda_k)\,y_{\lambda_k}(t),\ \beta(\lambda_k)z_{\lambda_k}(t))$$
$$+h(t,\ u_{\lambda_k}(t))]+[\xi_k^*(t)B_1(t)+\eta_k^*(t)B_2(t)+\zeta_k^*(t)B_3(t)]u_{\lambda_k}(t)$$
$$-\theta_k[x_{\lambda_k}^*(t)\frac{\partial \bar{f}_k(t)}{\partial x}+y_{\lambda_k}^*(t)\frac{\partial \bar{f}_k(t)}{\partial w}\beta(\lambda_k)+z_{\lambda_k}^*(t)\frac{\partial \bar{f}_k(t)}{\partial s}\beta(\lambda_k)]\}dt\,;$$

$$\theta_k I(\widetilde{u}_k,\ \lambda_k)+\xi_k^*(T)\widetilde{x}_k(T)+\eta_k^*(T)\widetilde{y}_k(T)+\zeta_k^*(T)\widetilde{z}_k(T)-\xi_k^*(t_0)\widetilde{x}_k(t_0)$$
$$-\eta_k^*(t_0)\widetilde{y}_k(t_0)-\zeta_k^*(t_0)\widetilde{z}_k(t_0)=\int_{t_0}^{T}\{\theta_k[f(t,\ \widetilde{x}_k(t),\ \beta(\lambda_k)\,\widetilde{y}_k(t),\ \beta(\lambda_k)\widetilde{z}_k(t))$$
$$+h(t,\ \widetilde{u}_k(t))]+[\xi_k^*(t)B_1(t)+\eta_k^*(t)B_2(t)+\zeta_k^*(t)B_3(t)]\widetilde{u}_k(t)$$
$$-\theta_k[\widetilde{x}_k^*(t)\frac{\partial \bar{f}_k(t)}{\partial x}+\widetilde{y}_k^*(t)\frac{\partial \bar{f}_k(t)}{\partial w}\beta(\lambda_k)+\widetilde{z}_k^*(t)\frac{\partial \bar{f}_k(t)}{\partial s}\beta(\lambda_k)]\}dt.$$

Вычитая второе равенство из первого и имея в виду, что функция f выпукла по (x, w, s), а управление u_{λ_k} удовлетворяет принципу максимума, получается неравенство

$$\theta_k(I_{\lambda_k} - I(\widetilde{u}_k, \lambda_k)) + \xi_k^*(T)(v_T - \widetilde{x}_k(T)) - \zeta_k^*(t_0)\zeta_0 \geqq 0,$$

из которого после предельного перехода приходим к противоречию $0 > -\|\zeta_0\|^2 \geqq 0$. Этим лемма доказана.

Через D_0 обозначим множество достижимости в (n_1+1)-мерном пространстве R^{n_1+1} от начальной точки v_0 для объекта Q_0. Пусть N_0 — множество единичных внешних нормалей (θ, q^1) к множеству D_0 в точке (I_0, v_0).

Лемма 4.3. *Пусть выполняются предположения* A, B, C *и по крайней мере одно из предположений* E1 *или* E2. *Тогда для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует такое число* $\delta > 0$, *что если* $\lambda \in (0, \delta)$ *и* $(\theta(\lambda), q^1(\lambda), q^2(\lambda), q^3(\lambda)) \in N(\lambda)$, *то найдется вектор* $(\theta, q^1) \in N_0$, *для которого* $\|(\theta(\lambda), q^1(\lambda)) - (\theta, q^1)\| < \varepsilon$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдутся такие число $\varepsilon_0 > 0$, последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ чисел $\lambda_k > 0$, $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$, и последовательность $\{(\theta_k, q_k^1, q_k^2, q_k^3)\}_1^\infty$ векторов $(\theta_k, q_k^1, q_k^2, q_k^3)$ из множества $N(\lambda_k)$, что $\lim_{k\to\infty}(\theta_k, q_k^1, q_k^2, q_k^3) = (\theta_0, q_0^1, q_0^2, q_0^3)$, но $\min_{(\theta, q^1)\in N_0} \|(\theta, q^1) - (\theta_0, q_0^1)\| \geqq \varepsilon_0$. Следовательно, существует такое непрерывное управление $\widetilde{u}$ с соответствующей, согласно (1.5), траекторией $\widetilde{x}$, что $\widetilde{x}(t_0) = v_0$ и

$$\theta_0(I(\widetilde{u}, 0) - I_0) + (q_0^1)^*(\widetilde{x}(T) - v_T) > 0. \tag{4.10}$$

Пусть $\{\widetilde{u}_k\}_1^\infty$, $\{\widetilde{x}_k\}_1^\infty$, $\{\widetilde{y}_k\}_1^\infty$, $\{\widetilde{z}_k\}_1^\infty$, — соответствующие управлению $\widetilde{u}$ в силу леммы 3.1 последовательности, для которых

$$\widetilde{x}_k(t_0) = v_0, \quad \widetilde{y}_k(t_0) = w_0, \quad \widetilde{z}_k(t_0) = s_0,$$

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{x}_k(T) = \widetilde{x}(T), \quad \widetilde{y}_k(T) = w_T, \quad \widetilde{z}_k(T) = s_T,$$

$$\lim_{k\to\infty} I(\widetilde{u}_k, \lambda_k) = I(\widetilde{u}, 0).$$

И так как $(I(\widetilde{u}_k, \lambda_k), \widetilde{x}_k(T), w_T, s_T) \in D(\lambda_k)$, то $\theta(\lambda_k)(I(\widetilde{u}_k, \lambda_k) - I_{\lambda_k}) + (q_k^1)^*(\widetilde{x}_k(T) - v_T) \leqq 0$. После предельного перехода получается неравенство $\theta_0(I(\widetilde{u}, 0) - I_0) + (q_0^1)^*(\widetilde{x}(T) - v_T) \leqq 0$, которое противоречит (4.10). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.2. проводится от противного. Допустим, что существуют такие число $\varepsilon_0 > 0$, точки τ_1, τ_2, $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < T$ и последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ точек $\lambda_k > 0$, $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$, что

$$\max_{\tau_1 \leqq t \leqq \tau_2} \|u_{\lambda_k}(t) - u_0(t)\| + \max_{\tau_1 \leqq t \leqq \tau_2} \|y_{\lambda_k}(t) - y_0(t)\| + \max_{\tau_1 \leqq t \leqq \tau_2} \|z_{\lambda_k}(t) - z_0(t)\| \geqq \varepsilon_0. \tag{4.11}$$

Пусть $(\theta_k, q_k^1, q_k^2, q_k^3) \in N(\lambda_k)$ и $\lim_{k\to\infty}(\theta_k, q_k^1, q_k^2, q_k^3) = (\theta_0, q_0^1, q_0^2, q_0^3)$. Согласно лемме 4.1, $\|q_0^2\| = \|q_0^3\| = 0$ и $\theta_0 < 0$, а согласно лемме 4.3 — $(\theta_0, q_0^1) \in N_0$. Можно считать, что последовательность $\{u_{\lambda_k}\}_1^\infty$ слабо сходится к u_0. В силу теоремы 2.2 последовательности $\{\beta(\lambda_k)\, y_{\lambda_k}\}_1^\infty$, $\{\beta(\lambda_k) z_{\lambda_k}\}_1^\infty$ равномерно ограничены на отрезке $[t_0, T]$ и поточечно сходятся к нулю. Пусть через (ξ_k, η_k, ζ_k) обозначено решение системы (4.8) с краевыми условиями (4.9). Сделаем замену переменных $\eta=\lambda\varphi$, $\zeta=\lambda\psi$. Тогда $(\xi_k, \varphi_k, \psi_k)$ являются решением задачи

$$\dot\xi=-A_{11}^*(t)\xi-A_{21}^*(t)\varphi-\beta_2 A_{31}^*(t)\psi-\theta_k\frac{\partial\bar f_k(t)}{\partial x},\quad \xi(T)=q_k^1,$$

$$(4.12)\qquad \lambda_k\dot\varphi=-A_{12}^*(t)\xi-A_{22}^*(t)\varphi-\theta_k\frac{\partial\bar f_k(t)}{\partial w}\beta(\lambda_k),\ \varphi(T)=q_k^2/\lambda_k,$$

$$\lambda_k\dot\psi=-\beta_1 A_{13}^*(t)\xi-A_{33}^*(t)\psi-\theta_k\frac{\partial\bar f_k(t)}{\partial s}\beta(\lambda_k),\ \psi(t_0)=\zeta_k(t_0)/\lambda_k,$$

где в силу леммы 4.2 выполняется $\lim_{k\to\infty}\lambda_k\|\psi_k(t_0)\|=0$.

Пусть через ξ_0 обозначено решение задачи

$$(4.13)\qquad \dot\xi=-A_0^*(t)\xi-\theta_0\frac{\partial f(t, x_0(t), 0, 0)}{\partial x},\quad \xi(T)=q_0^1$$

и

$$\varphi_0(t)=-(A_{22}^{-1}(t))^*A_{12}^*(t)\xi_0(t),\quad \psi_0(t)=-\beta_1(A_{33}^{-1}(t))^*A_{13}^*(t)\xi_0(t).$$

Тогда, если $t_0<\tau_1'<\tau_1<\tau_2<\tau_2'<T$, то в силу теоремы 2.2

$$(4.14)\quad \lim_{k\to\infty}\Big[\max_{t_0\le t\le T}\|\xi_k(t)-\xi_0(t)\|+\max_{t_0\le t\le\tau_2'}\|\varphi_k(t)-\varphi_0(t)\|+\max_{\tau_1'\le t\le T}\|\psi_k(t)-\psi_0(t)\|\Big]=0.)$$

Если введем обозначение

$$H_k(t, u)=\theta_k h(u, t)+[\xi_k^*(t)B_1(t)+\varphi_k^*(t)B_2(t)+\psi_k^*(t)B_3(t)]u,$$

то при $k=1, 2, \ldots$ в силу принципа максимума [4] оптимальное управление u_{λ_k} удовлетворяет соотношению

$$(4.15)\qquad H_k(t, u_{\lambda_k}(t))=\max_u H_k(t, u),\quad t\in[t_0, T].$$

Аналогично при $\lambda=0$ согласно принципу максимума

$$(4.16)\qquad \theta_0 h(t, u_0(t))+\xi_0^*(t)B_0(t)u_0(t)=\max_u[\theta_0 h(t, u)+\xi_0^*(t)B_0(t)u].$$

Но тогда с помощью соотношений (4.14), (4.15), (4.16) аналогично как в [2] доказывается, что u_{λ_k} непрерывная функция и

$$(4.17)\qquad \lim_{k\to\infty}\max_{\tau_1'\le t\le\tau_2'}\|u_{\lambda_k}(t)-u_0(t)\|=0.$$

Далее из теоремы 2.2, примененной для задачи (1.1), (2.18) на отрезке $[\tau_1', \tau_2']$ следует, что

$$(4.18)\qquad \lim_{k\to\infty}\Big[\max_{\tau_1\le t\le\tau_2}\|y_{\lambda_k}(t)-y_0(t)\|+\max_{\tau_1\le t\le\tau_2}\|z_{\lambda_k}(t)-z_0(t)\|\Big]=0.$$

Но соотношения (4.17) и (4.18) показывают, что неравенство (4.11) нарушается для бесконечного числа индексов k. Достигнутое противоречие доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. Москва, 1973.
2. Т. Р. Гичев. Корректность задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием эффективности. *Сердика*, 2, 1976, 334—342.
3. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ. Москва, 1977.
4. Э. Б. Ли, Л. Маркус. Основы теории оптимального управления. Москва, 1972.
5. A. Dontchev, T. R. Gičev. Convex Singularly Perturbed Optimal Control Problem with Fixed Final State. Controllability and Convergence. *Optimization*, **10**, 1979, 345—355.
6. V. Drăgan, A. Halanay. Suboptimal Linear Controller by Singular Perturbations Techniques. *Rev. roum. sci. techn.*, **21**, 1976, 4.
7. T. R. Gičev, A. L. Dontchev. Linear Optimal Control System with Singular Perturbation and Convex Perfomance Index. *Serdica*, **4**, 1978, 24—35.
8. P. Kokotovic, R. E. O'Malley Jr., P. Sannuti. Singular Perturbation and Order Reduction in Control Theory. *Automatica J. IFAC*, **12**, 1976, 123—132.
9. A. B. Vasileva, M. G. Dmitriev. Preprint of the VIIth Trennial World Congress of the IFAC, Helsinki, Finland, 2, 1978.

ВИАС, бул. Хр. Смирненского № 1
1000 София

Поступила 28. 1. 1980;
В переработанном виде 30. 5. 1981