Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СПЛАЙНОВ, КОТОРЫЕ ОБЛАДАЮТ КАСАТЕЛЬНЫМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

НИКОЛАЙ В. КЮРКЧИЕВ

В этой статье рассматриваются вопросы аппроксимации функции интерполяционными параболическими сплайнами с касательными специального вида. Приводятся оценки для погрешностей приближения. Необходимость конструирования такого класса сплайнов связана с решением задач специальной теории антенного синтеза.

Пусть $f(x)\in C_{[a,b]}$, a, $b\in R$, $a<b$ и заданы два множества узлов:

(A) $$\Delta'_n: \bar{x}_0=a<\bar{x}_1<\cdots<\bar{x}_n=b=\bar{x}_{n+1},$$

(Б) $$\Delta_n: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b, \quad (n\geq 2).$$

Будем предполагать, что $x_{i-1}<\bar{x}_i<x_i$ $(i=1,\ldots,n)$.

Строим интерполяционный параболический сплайн, который обладает касательными специального вида. Для всех $x\in[x_i, x_{i+1}]$, $i=0, 1,\ldots, n$, можно пользоваться следующим представлением

(1) $$S(x)=f(x_i)+m_i(x-x_i)+c_i(x-x_i)^2+d_i(x-\bar{x}_{i+1})_+^2,$$

где

$$(x-\bar{x})_+^j=\begin{cases}0 & , x<\bar{x}\\ (x-\bar{x})^j & , x\geq \bar{x}\end{cases}.$$

Пусть $P_{k/2-1}(P_{k/2-1}, t_{k/2-1})\in R_2 (k=n$ — четное). Построим параболическую кривую, проходящую через точки $A_i(x_i, S(x_i))$ и $B_i(x_{i+1}, S(x_{i+1}))$, для которой прямая через эти точки и точка $(P_{k/2-1}, t_{k/-21})$ являются соответственно полярой и полюсом этой кривой.

Кроме того, учитывая, что в точке $\bar{x}_{i+1}$ должно выполняться равенство $S''(\bar{x}_{i+1}-0)=S''(\bar{x}_{i+1}+0)$, находим $c_i+d_i=c_{i+1}$ $(i=0, 1,\ldots, k-2)$.

Таким образом, для параметров m_i, c_i, d_i получаем

(2)
$$d_i=[f(x_{i+1})-f(x_i)-m_i(x_{i+1}-x_i)-(x_{i+1}-x_i)^2\sum_{j=0}^{i} d_{j-1}]/(x_{i+1}-\bar{x}_{i+1})^2,$$
$$i=0, 1,\ldots, k-1,$$
$$m_i=m_{i-1}+2d_{i-1}(x_i-\bar{x}_i)+2(x_i-x_{i-1})\sum_{j=0}^{i-1} d_{j-1}, \quad i=1,\ldots, k-1,$$
$$c_i=\sum_{j=0}^{i} d_{j-1} \quad (i=1, 2,\ldots, k-1), (c_0=d_{-1}=0).$$

Имея в виду (3), координаты полюса $(P_{k/2-1}, t_{k/2-1})$ и параметр m_0 являются решением системы

$$(\bar{x}_{k-1}-P_{k/2-1})(m_{k-2}+2c_{k-2}(\bar{x}_{k-1}-x_{k-2}))-f(x_{k-2})-m_{k-2}(\bar{x}_{k-1}-x_{k-2})$$
$$-c_{k-2}(\bar{x}_{k-1}-x_{k-2})^2=-t_{k/2-1},$$
$$(\bar{x}_k-P_{k/2-1})(m_{k-1}+2c_{k-1}(\bar{x}_k-x_{k-1}))-f(x_{k-1})-m_{k-1}(\bar{x}_k-x_{k-1})$$
$$-c_{k-1}(\bar{x}_k-x_{k-1})^2=-t_{k/2-1},$$
$$(x_k-P_{k/2-1})(m_{k-1}+2c_{k-1}(x_k-x_{k-1})+2d_{k-1}(x_k-\bar{x}_k))-f(x_k)=-t_{k/2-1}.$$

Если эту систему разрешить относительно $t_{k/2-1}$ и $P_{k/2-1}$, то для определения m_0 получается нелинейное уравнение $g(m_0)=0$.

В [3] предложены общие схемы для получения двухточечных функционально-итерационных методов, которые получены с помощью парабол специального типа, использующие только значения $g(x)$ в двух заданных точках. Алгоритм вычисления числа m_0 по этим формулам, которые, требуя локализации корня, сходятся в непрерывном случае, легко реализуется на электронно-вычислительных машинах.

Отметим, что с точки зрения вычислительной математики процесс построения таких интерполяционных сплайнов значительно проще.

При аппроксимации сплайнами обычно в качестве параметра приближения выбирается максимальное расстояние между соседними узлами.

Положим

$$\|\Delta_n\|=\max_i (x_{i+1}-x_i),\quad h_i=x_{i+1}-x_i,\quad L=\max_{0\leq k\leq i}|m_k|,\quad \bar{h}_i=x_{i+1}-\bar{x}_{i+1},$$
$$i=0, 1, \ldots, n-1.$$

Изучим сходимость интерполяционных параболических сплайнов к непрерывным функциям. Сформулируем несколько теорем.

Теорема 1. *Если $f(x)\in C_{[a,b]}$ и $S(x)$ — интерполяционный параболический сплайн с узлами интерполяции —* (Б), *то имеет место оценка* $|S(x)-f(x)|\leq\omega(f, \|\Delta_n\|)+2L\|\Delta_n\|$, *где $\omega(f,\delta)$ — модуль непрерывности функции f:* $\omega(f,\delta)=\sup_{|x'-x''|\leq\delta}\{|f(x')-f(x'')|,\ x', x''\in[a,b]\}$.

Доказательство. Пусть $x\in[x_1, x_1+h_1/2]$. Тогда

$$f(x)-S(x)=f(x)-f(x_1)-m_1(x-x_1)-d_0(x-x_1)^2=f(x)-f(x)+m_0\frac{(x-x_1)^2}{2(x_1-\bar{x}_1)}$$
$$-m_1(x-x_1)\left(1+\frac{x-x_1}{2(x_1-\bar{x}_1)}\right),$$
$$|f(x)-S(x)|\leq\omega\left(f, \frac{\|\Delta_n\|}{2}\right)+\frac{\|\Delta_n\|}{2}\left(1+\frac{x-x_1}{x_1-\bar{x}_1}\right)\max(|m_0|, |m_1|)$$
$$\leq\omega\left(f, \frac{\|\Delta_n\|}{2}\right)+L\|\Delta_n\|.$$

В общем случае для $x\in[x_i, x_i+h_i/2]$ при $\bar{h}_i=h_i/2$ следует учесть, что

$$f(x)-S(x)=f(x)-f(x_i)-m_i(x-x_i)-(x-x_i)^2\sum_{j=0}^{i-1} d_j$$

$$=f(x)-f(x_i)-m_i(x-x_i)-(x-x_i)^2\sum_{j=1}^{i}\frac{m_j-m_{j-1}}{2(x_j-\bar{x}_j)}\prod_{k=j}^{i-1}\left(1-\frac{x_{k+1}-x_k}{x_{k+1}-\bar{x}_{k+1}}\right).$$

Чтобы не загромождать доказательство, отметим, что в силу симметрии, в виду (3) аналогичное неравенство справедливо для всех $x\in[a, b]$.

Справедлив следующий результат

Следствие 1. *Если $f(x)\in \mathrm{Lip}\,1$ и $S(x)$ — интерполяционный пара-*

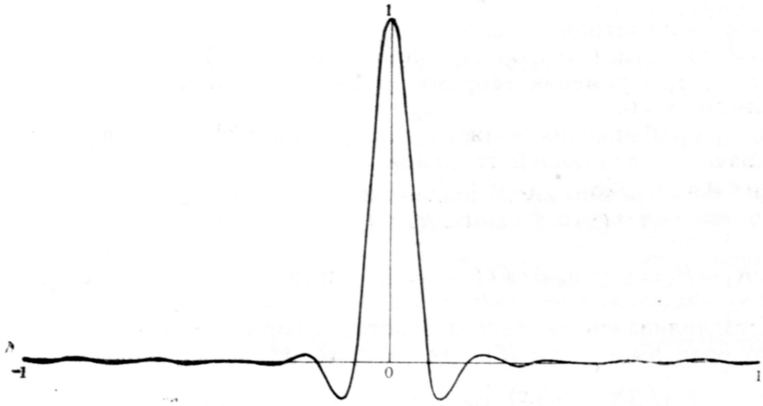

Рис. 1

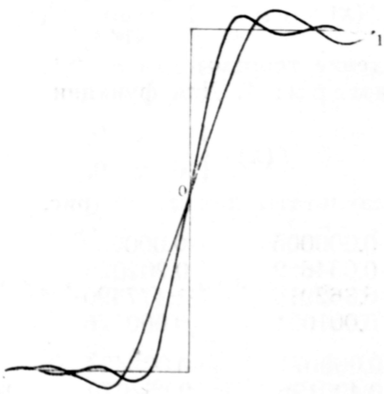

Рис. 2

болический сплайн из (1), *то* $\|f(x)-S(x)\|\leq\|\Delta_n\|(1+2L)$.

В дальнейшем потребуется следующая

Теорема 2. *Если $f(x)\in C^{(1)}_{[a,b]}$ и $S(x)$ — интерполяционный параболический сплайн с узлами* — (А) *и узлами интерполяции* — (Б), *то* *имеют место неравенства* $\|f^{(s)}(x)-S^{(s)}(x)\| \le K_s \|\Delta_n\|^{1-s}\alpha_n, \quad s=0,1,$ *где* $K_1=2K_0=1$ *и* $\alpha_n=\omega(f', \|\Delta_n\|)+3\max_{0\le k\le i}|f'(x_i)-m_k|$.

Доказательство. Пусть $x\in[x_1, x_1+h_1/2]$. Тогда

$$f'(x)-S'(x)=f'(x)+m_0\frac{x-x_1}{x_1-\bar{x}_1}-m_1\left(1+\frac{x-x_1}{x_1-\bar{x}_1}\right)-f'(x_1)+f'(x_1)$$

$$=f'(x)-f'(x_1)-\frac{x-x_1}{x_1-\bar{x}_1}(f'(x_1)-m_0)+\left(1+\frac{x-x_1}{x_1-\bar{x}_1}\right)(f'(x_1)-m_1)$$

$$|f'(x)-S'(x)|\le\omega\left(f', \frac{\|\Delta_n\|}{2}\right)+3\max(|f'(x_1)-m_0|, \ |f'(x_1)-m_1|).$$

В силу симметрии аналогичное неравенство справедливо для всех $x\in[x_i, x_{i+1}]$. Отметим, что более общие методы получения таких оценок имеются в [1; 2]. Применяя теорему Ролля, завершаем доказательство теоремы в случае $s=0$.

Порядки приближения дважды непрерывно дифференцируемых функций устанавливаются следующей теоремой.

Теорема 3. *Если* $f(x)\in C^{(2)}_{[a,b]}$, *то*

$$\|f^{(s)}(x)-S^{(s)}(x)\|\le K_s\|\Delta_n\|^{2-s}\alpha_n, \qquad s=0, 1, 2, \tag{4}$$

где $4K_0=K_1=K_2=1$ *и* $\alpha_n=\omega(f'', \|\Delta_n\|)+3\max_i\{|f''(x_i)|, \ |\sum_{j=0}^{i-1} d_j|\}$.

Не останавливаясь на доказательстве сформулированной теоремы, отметим, что если выполнено (8) при $s=2$, то применяя неравенства

$$\|f'(x)-S'(x)\|_{C[a,b]}\le\|\Delta_n\|\sup_{x\in[a,b]}|f''(x)-S''(x)|,$$

$$\|f(x)-S(x)\|_{C[a,b]}\le\frac{\|\Delta_n\|^2}{4}\sup_{x\in[a,b]}|f''(x)-S''(x)|,$$

получаем легко утверждение теоремы для $s=0,1$.

Численные примеры: 1. Для функции

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x\ne 0,\end{cases}$$

получены следующие результаты при $k=20$ (рис. 1)

m_i	−0.000002	0.000005	−0.000030	0.000175	−0.001020
	0.005947	−0.034662	0.202025	−1.177490	6.862915
	0.000000	−6.862915	1.177490	−0.202025	0.034662
	−0.005947	0.001021	−0.000176	0.000035	−0.000035
c_i	0.000000	0.000071	−0.000424	0.002476	−0.014430
	0.084104	−0.490196	2.857070	−16.652224	97.056275
	−165.685425	97.056275	−16.652224	2.857070	−0.490196
	0.084104	−0.014428	0.002463	−0.000352	−0.000349
d_i	0.000071	−0.000495	0.002900	−0.016906	0.098534
	−0.574300	3.347266	−19.509294	113.708499	−262.741700
	262.741700	−113.708499	19.509294	−3.347266	0.574300
	−0.098532	0.016891	−0.002816	0.000003	0.002797

Узлы интерполяции $x_i = -1 + ih$, $i = 0, \ldots, k$, $h = 0{,}1$, а узлы сплайна $\bar{x}_i$ расположены посередине между узлами интерполяции.

2. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

вычисления проведены при $k = 6, 10$ (рис. 2).

Вычисления велись на ЭВМ ЕС-1040.

В заключении отметим, что необходимость конструирования такого класса параболических интерполяционных сплайнов с касательными специального типа связана с решением задач специальной теории антенного синтеза [4] в случаях, когда диаграмме направленности одной линейной решетки наложен сложный комплекс дифференциальных ограничений.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин. Сплайны в вычислительной математике. Москва, 1976.
2. Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш. Теория сплайнов и ее приложения. Москва, 1972.
3. Р. Иванов, Н. Кюркчиев. О методах решения уравнений и систем уравнений, использующих квадратичные функции. *Сердика*, 3, 1977, 253—260.
4. Л. Д. Бахрах, С. Д. Кременецкий. Синтез излучающих систем. Москва, 1974.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 25. 2. 1980