Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ТОЖДЕСТВА ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ НУЛЬ

РУСАЛИН СТ. НИКОЛАЕВ

Доказывается, что все тождества от двух переменных в алгебре матриц второго порядка над полем характеристики нуль являются следствиями тождества $[[x, y]^2, x]=0$.

Конечная базируемость тождеств матричной алгебры второго порядка M_2 над полем K характеристики нуль доказана Ю. П. Размысловым [1], а В. С. Дренски [2] показал, что стандартное тождество $S_4(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$ и тождество Холла $[[x, y]^2, x]=0$ образуют базис этих тождеств. В настоящей работе решается задача о нахождении базиса тождеств от двух переменных в многообразии $\mathfrak{M}$ ассоциативных алгебр (с единицей), порожденном алгеброй M_2. Для алгебр Ли эта задача была поставлена Ю. А. Бахтуриным [3] и пока еще не решена.

Первая часть работы содержит предварительные сведения и обозначения. Во второй части выводятся некоторые следствия из тождества Холла, позволяющие в последней, третьей части, доказать основной результат, а именно: *все тождества от двух переменных в $\mathfrak{M}$ являются следствиями тождества Холла.*

Автор выражает свою благодарность В. С. Дренскому и А. П. Попову за полезные беседы и проявленное внимание к работе.

1. Свободную ассоциативную алгебру от счетного множества образующих $x_1, x_2, \dots$ над K будем обозначать через $K[x]$. Известно (см. [4]), что все тождества алгебры с единицей вытекают из ее собственных полилинейных тождеств, т. е. из тождеств, представимых в виде линейных комбинаций произведений правонормированных коммутаторов. Через Γ_n, $n\geqq 2$, будем обозначать пространство собственных полилинейных многочленов от переменных $x=(x_1, \dots, x_n)$. Γ_n превращается в (левым) KS_n — модулем, если определить действие симметрической группы S_n на Γ_n следующим образом: для $\sigma\in S_n$ и $f(x_1, \dots, x_n)\in\Gamma_n, \sigma f=f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$.

Если $T(\mathfrak{U})-T$ — идеал многообразия $\mathfrak{U}$, то относительно свободную алгебру $K[x]/T(\mathfrak{U})$ будем обозначать через $F(\mathfrak{U})$, а образ Γ_n при естественном гомоморфизме $K[x]\to F(\mathfrak{U})$ через $\Gamma_n(\mathfrak{U})$. Ввиду полной приводимости KS_n-модулей, изучение $\Gamma_n(\mathfrak{U})$ сводится к изучению его неприводимых компонент. Поэтому нам понадобится следующий результат из теории представлений симметрической группы ([5]):

Пусть $p=\{k_1, \dots, k_r\}$ — разбиение числа n, т. е. $k_1\geqq\dots\geqq k_r$, $k_1+\dots+k_r=n$, D_p — соответствующая ему диаграмма Юнга. Если $\alpha\in S_n$, то t_α будет таблицей, соответствующей диаграмме D_p, в которой в первом столбце находятся числа $\alpha(1), \dots, \alpha(r)$, во втором (длины l) — числа

$\alpha(r+1),\ldots,\alpha(r+l)$ *и т. д.* Симметризатор Юнга таблицы t_α будем обозначать через $l(t_\alpha)$: $l(t_\alpha)=\Sigma(-1)^\tau\pi\tau$, где π пробегает все подстановки в строках, а τ — в столбцах диаграммы t_α. Для многочлена $f(x)\in\Gamma_n$ через $A(t_\alpha, f)$ будем обозначать подмодуль Γ_n, порожденный элементом $f_{t_\alpha}=l(t_\alpha)f(x)$. Тогда:

1. Если $f_{t_\alpha}\neq 0$, модуль $A(t_\alpha, f)$ — неприводим.

2. Любой неприводимый подмодуль Γ_n имеет вид $A(t_\alpha, f)$.

3. Таблицам, соответствующим одной и той же диаграмме, соответствуют изоморфные модули и обратно.

Для многообразий $\mathfrak{U}_1\subset\mathfrak{U}_2$ существуют естественный гомоморфизм алгебр $F(\mathfrak{U}_1)\to F(\mathfrak{U}_2)$ и гомоморфизмы линейных пространств $\Gamma_n(\mathfrak{U}_1)\to\Gamma_n(\mathfrak{U}_2)$, $n=2, 3, \ldots$ (которые являются также модульными гомоморфизмами). Обозначим через $\mathfrak{H}$ многообразие ассоциативных алгебр, порожденное тождеством Холла. Очевидно $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{H}$. Следовательно, нам будет достаточно показать, что каждой диаграмме Юнга с двумя строками соответствует только один неприводимый подмодуль $\Gamma_n(\mathfrak{H})$, порождаемый многочленом, который не является тождеством алгебры M_2.

Следующее замечание оказывается очень важным для упрощения подсчетов (см. [6]). Пусть $M(t_\alpha, f)$ будет GL_n — модуль в $K[x]$, порожденный элементом $f_{t\alpha}$. Через $\overline{f}_{t\alpha}$ будем обозначать полную симметризацию многочлена $f_{t\alpha}$, получающуюся, если в $f_{t\alpha}$ заменить все переменные, индексы которых лежат в одной строке таблицы t_α, одной и той же буквы. Так как полная линеаризация $\lim\overline{f}_{t\alpha}$ многочлена $\overline{f}_{t\alpha}$ пропорциональна $f_{t\alpha}$, многочлены $f_{t\alpha}$ и $\overline{f}_{t\alpha}$ эквивалентны как тождества. Следовательно, GL_n-модуль $M(t\alpha, f)$ порождается элементом $\overline{f}_{t\alpha}$ и $f_{t\alpha}$ порождает неприводимый S_n — модуль $A(t\alpha, f)$ тогда и только тогда, когда $\overline{f}_{t\alpha}$ порождает неприводимый GL_n — модуль $M(t\alpha, f)$. Это позволяет нам работать только с многочленами $\overline{f}_{t\alpha}$.

Правонормированный коммутатор $[x, y, y, \ldots, y]$ длины $k+2$ будем обозначать $[x, y, y^{(k)}]$, $k\geq 2$.

Если $\deg_x f(x, y)=k$, то при линеаризации $f(x, y)$ по x новые переменные будем обозначать буквой x с индексами — $x_1, \ldots, x_k$.

2. В этой части найдем некоторые следствия из тождества Холла, касающиеся структуры $\Gamma_n(\mathfrak{H})$, $n\geq 5$. Эти следствия объединены в первых двух леммах, а основной результат — лемма 3 дает „хорошую“ систему порождающих линейного пространства $\Gamma_n(\mathfrak{H})$. Система эта хороша в том смысле, что на ее элементах легко выразить действие симметризаторов Юнга.

Лемма 1. *Для любых целых неотрицательных k и l в $F(\mathfrak{H})$ выполняется тождество*

$$[x, y, x^{(k)}, y, x^{(l)}]=[x, y, x^{(k+l)}, y]+(1+(-1)^{k+l})[x, y][x, y, x^{(k+l-1)}].$$

Доказательство. Запишем тождество Холла в виде

$$[x, y][x, y, x]+[x, y, x][x, y]=0. \tag{1}$$

Линеаризуем (1) по y и положим $y_1=y$, $y_2=xy$. Получаем $[x, y]x[x, y, x]+[x, y, x]x[x, y]=0$. Из этого тождества и тождества (1) следует

$$[x, y, x]^2=[x, y, x][x, y]x-[x, y, x]x[x, y]=-[x, y][x, y, x, x],$$

$$[x, y, x]^2=[x, y]x[x, y, x]-x[x, y][x, y, x]=-[x, y, x, x][x, y].$$

Следовательно, выполняются тождества

$$[[x, y], [x, y, x, x]] = 0, \quad [[x, y][x, y, x], x] = 0.$$

Из этих тождеств, индукцией по m при помощи той же самой процедуры — линеаризация по y и замена y_1 на y, y_2 на xy, получаем

$$[x, y, x][x, y, x^{(m)}] = -[x, y][x, y, x^{(m+1)}], \tag{2}$$

$$[x, y, x^{(m)}][x, y, x] = (-1)^m[x, y][x, y, x^{(m+1)}], \tag{3}$$

$$[x, y, x^{(m)}][x, y] = (-1)^m[x, y][x, y, x^{(m)}]. \tag{4}$$

В силу тождества (4)

$$\begin{aligned}[x, y, x^{(k)}, y, x] &= [x, y, x^{(k+1)}, y] + [[x, y], [x, y, x^{(k)}]] \\ &= [x, y, x^{(k+1)}, y] + (1-(-1)^k)[x, y][x, y, x^{(k)}].\end{aligned}$$

Индукцией по l, учитывая тождество (2), завершаем доказательство:

$$\begin{aligned}[x, y, x^{(k)}, y, x^{(l+1)}] &= [[x, y, x^{(k)}, y, x^{(l)}], x] = [x, y, x^{(k+l)}, y, x] \\ &+ (1+(-1)^{k+l})\{[x, y, x][x, y, x^{(k+l-1)}] + [x, y][x, y, x^{(k+l)}]\} \\ &= [x, y, x^{(k+l+1)}, y] + (1+(-1)^{k+l+1})[x, y][x, y, x^{(k+l)}].\end{aligned}$$

Лемма 2. *Пусть* $\varphi_{mn}(x, y) = [x, y, x^{(m)}, y^{(n)}, x] - [x, y, x^{(m+1)}, y^{(n)}]$. *Тогда для любых целых неотрицательных m и n в $F(\mathfrak{H})$ выполняются тождества*

$$\varphi_{mn}(x, y) = \begin{cases} 0, \\ -2[x, y][x, y, x^{(m)}, y^{(n-1)}], \\ 4[x, y]^2[x, y, x^{(m-1)}, y^{(n-2)}], \\ 2[x, y, y^{(n-1)}][x, y, x^{(m)}]. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $m \equiv 0 \pmod 2$. Тогда тождество (4) можно записать в виде $[[x, y], [x, y, x^{(m)}]] = 0$. Линеаризуем его по x и положим $x_1 = y$, $x_i = x$, $i = 2, \ldots, m+2$:

$$\sum_{i=0}^{m-1} [[x, y], [x, y, x^{(i)}, y, x^{(m-1-i)}]] = 0.$$

Из этого тождества, согласно лемме 1, получаем $[[x, y], [x, y, x^{(m-1)}, y]] = 0$. Точно так же из тождества (4) при $m \equiv 1 \pmod 2$ находим

$$[x, y][x, y, x^{(m-1)}, y] + [x, y, x^{(m-1)}, y][x, y] = 0.$$

Следовательно, для любого m

$$[x, y][x, y, x^{(m)}, y] = (-1)^{m+1}[x, y, x^{(m)}, y][x, y]. \tag{5}$$

Тем же способом, как из (4), получили (5) — линеаризацией по x с последующей специализацией $x_1 = y$, $x_i = x$, $i \geq 2$, из (5), с учетом леммы 1, получаем

$$[x, y][x, y, x^{(m)}, y^{(2)}] = (-1)^m[x, y, x^{(m)}, y^{(\alpha)}][x, y]. \tag{6}$$

Линеаризуем тождество (5) по y и положим $y_1=y_2=[x, y]$, $y_3=y$ Учитывая (4), находим

(7) $$[x, y, x][x, y, x^{(m+1)}, y]+[x, y, x^{(m+1)}, y][x, y, x]=0,\ m\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2),$$

(8) $$[[x, y, x], [x, y, x^{(m+1)}, y]]=-4[x, y]^2[x, y, x^{(m+1)}],\ m\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 2).$$

Из тождеств (2) и (3) при $m\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2)$

$$[x, y, x][x, y, x^{(m)}]=-[x, y, x^{(m)}][x, y, x].$$

Линеаризуем это тождество по x и положим $x_1=y$, $x_i=x$, $i=2, \dots, m+3$:

$$[x, y, y][x, y, x^{(m)}]+[x, y, x^{(m)}][x, y, y]=-\sum_{i=0}^{m-1}([x, y, x][x, y, x^{(i)}, y, x^{(m-1-i)}]$$

$$+[x, y, x^{(i)}, y, x^{(m-1-i)}][x, y, x]).$$

Так как $m-1$ нечетное, согласно лемме 1 и (7), выполняется тождество

(9) $$[x, y, y][x, y, x^{(m)}]=-[x, y, x^{(m)}][x, y, y].$$

Аналогично при m нечетном из тождеств (2) и (3), леммы 1 и (8)

(10) $$[[x, y, y], [x, y, x^{(m)}]]=4[x, y]^2[x, y, x^{(m-1)}].$$

Из тождества (4), коммутированное с y, и (5) получаем

$$[[x, y, y], [x, y, x^{(m)}]]=-2[x, y][x, y, x^{(m)}, y],\ m\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2),$$

$$[x, y, y][x, y, x^{(m)}]+[x, y, x^{(m)}][x, y, y]=-2[x, y][x, y, x^{(m)}, y],\ m\equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 2).$$

Следовательно, в силу тождеств (9) и (10)

(11) $$[x, y, x^{(m)}][x, y, y]=-[x, y, y][x, y, x^{(m)}]=[x, y][x, y, x^{(m)}, y],\ m\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2)$$

$$[x, y, y][x, y, x^{(m)}]=-[x, y][x, y, x^{(m)}, y]+2[x, y]^2[x, y, x^{(m-1)}],$$

(12) $$[x, y, x^{(m)}][x, y, y]=-[x, y][x, y, x^{(m)}, y]-2[x, y]^2[x, y, x^{(m-1)}]\,m\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2).$$

Докажем следующее тождество:

(13) $$[x, y][x, y, x^{(m)}, y^{(n)}]=(-1)^{m+n}[x, y, x^{(m)}, y^{(n)}][x, y].$$

Для произвольного m и $n=1, 2$ — это тождества (5) и (6). Проведем индукцию по n. Линеаризуем (13) по x и положим $x_1=y$, $x_i=x$, $i=2, \dots, m+2$.

$$[x, y]\sum_{i=0}^{m-1}[x, y, x^{(i)}, y, x^{(m-1-i)}, y^{(n)}]=(-1)^{m+n}(\sum_{j=0}^{m-1}[x, y, x^{(j)}, y, x^{(m-1-j)}, y^{(n)}])[x, y].$$

Если m — четное, согласно лемме 1,

$$[x, y][x, y, x^{(m-1)}, y^{(n+1)}]=(-1)^{m+n}[x, y, x^{(m-1)}, y^{(n+1)}][x, y].$$

Если m — нечетное, снова по лемме 1

$$m[x, y][x, y, x^{(m-1)}, y^{(n+1)}]+2(m-1)[x, y][[x, y][x, y, x^{(m-2)}], y^{(n)}]$$

$$=(-1)^{m+n}(m[x, y, x^{(m-1)}, y^{(n+1)}][x, y]+2(m-1)[[x, y][x, y, x^{(m-2)}, y^{(n)}][x, y]).$$

Однако, согласно первому из тождеств (12),

$$[[x, y][x, y, x^{(m-2)}], y] = 2[x, y]^2 [x, y, x^{(m-3)}].$$

Следовательно, учитывая тождество (1),

$$[[x, y][x, y, x^{(m-2)}], y^{(n)}] = 2[x, y]^2 [x, y, x^{(m-3)}, y^{(n-1)}].$$

По индукционному предположению и то, что $m-3$ четное, получаем

$$(-1)^{m+n}[[x, y][x, y, x^{(m-2)}], y^{(n)}][x, y] = 2(-1)^{m+n}[x, y]^2 [x, y, x^{(m-3)}, y^{(n-1)}][x, y]$$
$$= 2(-1)^{m+n}(-1)^{m+n-4}[x, y]^3 [x, y, x^{(m-3)}, y^{(n-1)}],$$

т. е. и при m нечетном

$$[x, y][x, y, x^{(m-1)}, y^{(n+1)}] = (-1)^{m+n}[x, y, x^{(m-1)}, y^{(n+1)}][x, y].$$

Тождество (13) доказано.

Из тождеств (11) и (12), снова при помощи линеаризации по x с последующей заменой x_1 на y, остальные x_i на x, в силу леммы 1, получаем

$$[x, y, y][x, y, x^{(m)}, y] = -[x, y][x, y, x^{(m)}, y^{(2)}],$$
$$[x, y, x^{(m)}, y][x, y, y] = (-1)^{m+1}[x, y][x, y, x^{(m)}, y^{(2)}].$$

Из этих тождеств, повторяя путь доказательства (13), доказывается, что для $m \geqq 0$ и $n > 0$ в $F(\mathfrak{H})$ выполняются тождества

$$(14)\qquad \begin{aligned}&[x, y, y][x, y, x^{(m)}, y^{(n)}] = -[x, y][x, y, x^{(m)}, y^{(n+1)}],\\ &[x, y, x^{(m)}, y^{(n)}][x, y, y] = (-1)^{m+n}[x, y][x, y, x^{(m)}, y^{(n+1)}].\end{aligned}$$

Из (14), коммутированием с y и индукцией по k, следует

$$(15)\qquad \begin{aligned}&[x, y, y^{(k)}][x, y, x^{(m)}, y^{(m)}] = (-1)^k[x, y][x, y, x^{(m)}, y^{(n+m)}],\\ &[x, y, x^{(m)}, y^{(n)}][x, y, y^{(m)}] = (-1)^{m+n}[x, y][x, y, x^{(m)}, y^{(n+k)}].\end{aligned}$$

Для доказательства леммы 2 нам нужны еще следующие тождества:

$$(16)\qquad \begin{aligned}&[x, y, y^{(n)}][x, y, x^{(m)}] = (-1)^k[x, y, x^{(m)}, y^{(n)}], \quad m \equiv 0 \pmod 2,\\ &[x, y, y^{(n)}][x, y, x^{(m)}] = (-1)^k[x, y][x, y, x^{(m)}, y^{(n)}]\\ &\quad + 2(-1)^k[x, y]^2[x, y, x^{(m-1)}, y^{(k-1)}], \quad m \equiv 1 \pmod 2.\end{aligned}$$

Для $k=1$ — это тождества (9) и (10). Индукционное доказательство получается легко коммутированием с y и учитывая (14) и (15).

Мы уже готовы доказать лемму 2. Для $n=1$ — это лемма 1. Так как коммутаторы правонормированные, то

$$[x, y, x^{(m)}, y^{(2)}, x] = [x, y, x^{(m)}, y, x, y] + [[x, y], [x, y, x^{(m)}, y]].$$

Отсюда получаем, согласно лемме 1 и тождества (12) и (13)

$$[x, y, x^{(m)}, y^{(2)}, x] = [x, y, x^{(m+1)}, y^{(2)}] + 2[x, y][x, y, x^{(m)}, y], \quad m \equiv 0 \bmod 2),$$
$$[x, y, x^{(m)}, y^{(2)}, x] = [x, y, x^{(m+1)}, y^{(2)}] + 4[x, y]^2[x, y, x^{(m-1)}], \quad m \equiv 1 \pmod 2).$$

Дальше проведем индукцию по n. Снова по определению правонормированного коммутатора выполняется тождество

$$[x, y, x^{(m)}, y^{(n+1)}, x] = [x, y, x^{(m)}, y^{(n)}, x, y] + [[x, y], [x, y, x^{(m)}, y^{(n)}]].$$

Отсюда, в зависимости от четностях m и n, получаем:

а) $m \equiv n \equiv 0 \pmod 2$:

$$[x, y, x^{(m)}, y^{(n+1)}, x] = [x, y, x^{(m+1)}, y^{(n+1)}] + 2\,[x, y]\,[x, y, x^{(m)}, y^{(n)}]$$

по индукционному предположению и тождество (13).

б) $m \equiv n-1 \equiv 0 \pmod 2$:

$$[x, y, x^{(m)}, y^{(n+1)}, x] = [x, y, x^{(m+1)}, y^{(n+1)}] - 2\,[[x, y]\,[x, y, x^{(m)}, y^{(n-1)}], y]$$
$$= [x, y, x^{(m+1)}, y^{(n+1)}]$$

по индукционному предположению и тождествам (13) и (14).

в) $m-1 \equiv n \equiv 0 \pmod 2$: $[x, y, x^{(m)}, y^{(n+1)}, x] = [x, y, x^{(m+1)}, y^{(n+1)}] + 4[x, y]^2[x, y, x^{(m-1)}, y^{(n-1)}] + 2[x, y][x, y, x^{(m)}, y^{(n)}] = [x, y, x^{(m+1)}, y^{(n+1)}] + 2[x, y, y^{(n)}][x, y, x^{(m)}]$ по индукционному предположению и тождествам (13) и (16).

г) $m \equiv n \equiv 1 \pmod 2$: $[x, y, x^{(m)}, y^{(n+1)}, x] = [x, y, x^{(m+1)}, y^{(n+1)}] + 2[[x, y, y^{(n-1)}] \times [x, y, x^{(m)}], y] = x, y, x^{(m+1)}, y^{(n+1)}] - 4\,[x, y]^2\,[x, y, x^{(m-1)}, y^{(n-1)}]$ по индукционному предположению и тождествам (13), (15) и (16). Этим лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Линейное пространство* $\Gamma_n(\mathfrak{H})$, $n \geq 5$, *порождается элементами* $f_{kmn}(x, y) = [x, y]^k\,[x, y, x^{(m)}, y^{(n)}]$, *где* k, m *и* n — *целые неотрицательные числа.*

Доказательство. Линеаризуем тождество (2) по x и положим $x_1 = y$, $x_i = x$, $i = 2, \ldots, m+2$. Тогда, согласно (9), получаем

$$[x, y, x][x, y, x^{(m)}, y] = -[x, y]\,[x, y, x^{(m+1)}, y] - (1 + (-1)^m)\,[x, y]^2\,[x, y, x^{(m)}].$$

Тем же способом отсюда, с использованием леммы 2, доказывается, индукцией по n, тождество

$$[x, y, x]\,[x, y, x^{(m)}, y^{(n)}] = -[x, y]\,[x, y, x^{(m+1)}, y^{(n)}]$$
$$-(1 + (-1)^m\,[x, y]^2\,[x, y, x^{(m)}, y^{(n-1)}].$$

Коммутированием этого тождества с x, снова по лемме 2 и индукцией по k, доказывается тождество

$$[x, y, x^{(k)}]\,[x, y, x^{(m)}, y^{(n)}] = (-1)^k\,[x, y][x, y, x^{(m+k)}, y^{(n)}]$$
$$+ (1 - (-1)^{m+n+k})\,[x, y]^2\,[x, y, x^{(m+k-1)}, y^{(n-1)}]). \tag{17}$$

Точно также, исходя из тождества (3), можно показать что и произведение вида $[x, y, x^{(m)}, y^{(n)}]\,[x, y, x^{(n)}]$ выражается линейно через произведений, участвующих в правой стороне тождества (17). Эти тождества, вместе с (15) и (16), показывают, что произведения, в состав которых входят коммутаторы вида f_{0mn}, f_{k0n} и f_{km0}, выражаются линейно через „хорошие" произведения, выделенные в лемме 3. Так как по доказанным леммам и тождествам (15), (16) и (17) мы можем выразить $(x, y, y^{(n)}, x^{(m)}]$ по модулю „хороших" произведений через $[x, y, x^{(m)}, y^{(n)}]$, остается рассмотреть толко произведения вида $[x, y, x^{(k)}, y^{(l)}][x, y, x^{(m)}, y^{(n)}]$. Их представимость через „хорошие" доказывается индукцией по l при помощи коммутирования тождества (17) с y и учетом тождества (14).

3. Мы уже можем доказать основой результат:

Теорема. *Все тождества от двух переменных в алгебре матриц второго порядка M_2 над полем K характеристики нуль являются следствиями тождества Холла (1).*

Доказательство. Пусть $(k+l+1, k+1)$ — разбиение числа n, t — соответствующая ему диаграмма. Действовать симметризатором Юнга, соответствующим этой диаграмме на элементы $f(x, y)$ из $\Gamma_n(\mathfrak{H})$, означает кососимметризировать $f(x,y)$ по $k+1$ парам переменных x, y (см. [6]). Согласно лемме 3, достаточно изучить действие симметризатора на коммутаторах вида $[x, y, x^{(m)}, y^{(n)}]$. Обозначим

$$\varphi(x, y)=[x, y, x^{(i+j+1)}, y^{(p+q+1)}]-[x, y, x^{(i)}, y, x^{(j)}, y^{(p)}, x, y^{(q)}]. \tag{18}$$

По лемме 1

$$[x, y, x^{(i)}, y, x^{(j)}, y^{(p)}]=[x, y, x^{(i+j)}, y^{(p+1)}]+(1+(-1)^{i+j})[[x, y][x, y, x^{(i+j-1)}], y^{(p)}]$$

Из этого равенства, коммутированием с x, получаем

$$[x, y, x^{(i)}, y, x^{(j)}, y^{(p)}, x]=[x, y, x^{(i+j+1)}, y^{(p+1)}]+\psi_1(x, y),$$

где $\psi_1(x, y)$, согласно лемме 2 и (17), есть линейная комбинация „хороших" произведений, в которых участвуют коммутаторы длины $\leqq i+j+p+2$. Дальнейшее коммутирование с y (q раз), согласно лемме 3, дает

$$[x, y, x^{(i)}, y, x^{(j)}, y^{(p)}, x, y^{(q)}]=[x, y, x^{(i+j+1)}, y^{(p+q+1)}]+\psi_2(x, y),$$

где длины участвующих в $\varphi_2(x, y)=[\psi_1(x, y), y^{(q)}]$ коммутаторы $\leqq i+j+p+q+2$. Следовательно, $\varphi(x, y)$ выражается линейно через „хорошие" произведения коммутаторов длины, хотя на две единицы меньшей длины коммутаторов в правой стороне (18).

Таким образом, если кососимметризировать многочлен $f(x, y)$, у которого $\deg_x f(x, y)=k+l+1$, $\deg_y f(x, y)=k+1$, $k+1$ раз по произвольно выбранным парам x, y, получаем всегда многочлен вида $\overline{f_t}(x, y)=\alpha[x, y]^k[x, y, x^{(l)}]$. Следовательно, диаграмме t соответствует только один неприводимый подмодуль $\Gamma_n(\mathfrak{H})$, $n=2k+2l+2$, порождаемый многочленом $d(x, y)=[x, y]^k[x, y, x^{(l)}]$. То, что $d(x, y)$ не является тождеством алгебры M_2, следует из работы В. С. Дренского [7], но можно проверить и вычислением $d(A, B)$, где A и B — это матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}.$$

Это, как мы уже отметили в первой части работы, доказывает теорему.

Замечание. Другой подход к решению рассматриваемой задачи (без использования теории представлений) предоставляет, по- видимому, работа [8], в которой получены в явном виде порождающие элементы множества тождеств алгебры M_2 от двух переменных, рассматриваемого как (левый) идеал.

ЛИТЕРАТУРА

1. Размислов, Ю. П. О конечной базируемости тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль. *Алгебра и логика*, **12**, 1973, 88—113.
2. Дренски, В. С. Минимальный базис тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль. *Алгебра и логика* (в печати).
3. Бахтурин, Ю. А. Тождества от двух переменных в алгебре Ли $sl(2, k)$. *Труды сем. им. И. Г. Петровского*, 1979, вып. 5, 205—208.
4. Specht, W. Gesetze in Ringen, I. *Math. Z.*, **52**, 1950, 557—589.
5. Kerber, A. Representations of permutation group, I. *Lecture Notes in Math.*, **240**, 1971.
6. Попов, А. П. Тождества тензорного квадрата алгебры Грасмана. *Алгебра и логика* (в печати).
7. Дренски, В. С. Представления симметрической группы и многообразия линейных алгебр. *Мат. сб.* **115**, 1981, 98—115.
8. W.-Ch. W. Li. Generators for the ideal of polynomial identities satisfied by 2×2 matrices (preprint).

Высший машинно-электротехнический институт
Кафедра „Высшей математики“
Варна — 9010, Болгария

Поступила 26. 10. 1981