Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ОБОБЩЕННАЯ ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ И АППРОКСИМАЦИЯ ПАДЕ

В. К. ДЗЯДЫК

1. История вопроса. Рассмотрим класс $(M-S)$ (Маркова-Стилтьеса) аналитических в окрестности нуля функций $f(z)$, каждая из которых допускает представление при помощи интеграла Маркова-Стилтьеса вида:

$$f(z)=z\int_0^1\frac{d\mu(t)}{1-zt}, \tag{1}$$

где $\mu(t)$ — какая-нибудь неубывающая функция. При малых $|z|$ в силу равенства $\frac{1}{1-zt}=\sum_{k=0}^{\infty}(zt)^k$ имеем:

$$f(z)=z\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\int_0^1 t^k\,d\mu(t)\Big)\,z^k=\sum_{k=0}^{\infty}s_k\,z^{k+1}, \tag{2}$$

где

$$s_k=\int_0^1 t^k\,d\mu(t) \tag{3}$$

моменты функции $\mu(t)$.

Хорошо известно, что функция $\mu(t)$ даёт возможность построить систему многочленов $\{O_n(t)\}$, которая является ортонормированной по мере $d\mu(t)$, так что $\int_0^1 O_j(t)\,O_k(t)\,d\mu(t)=\delta_{j,k}$ и после этого для любой $f(z)\in(M-S)$ можно использовать эту систему для построения диагональных аппроксимаций Паде функции $f(z)$.

Определение 1. *Отношение $P_m(z)/Q_n(z)$ двух многочленов $P_m(z)$ и $Q_n(z)$ степеней соответственно m и n будем называть рациональным полиномом порядка (m, n) и обозначать $r_{m,n}(z)$. Рациональный полином $r_{m,n}(z)$ называется Паде-аппроксимантой порядка (m, n) для некоторой функции $f(z)$, если $f(z)-r_{m,n}(z)=O(z^{m+n+1})$, $z\to 0$, и будет обозначаться через $\pi_{m,n}(z)=\pi_{m,n}(f;z)$. В случае $m=n$ Паде-аппроксиманты называются диагональными. Ясно, что Паде-аппроксиманта порядка $(m, 0)$ совпадает с многочленом Тейлора $T_m(f;z)$ функции $f(z)$ порядка m.*

Используя ортонормированную систему многочленов $\{O_n(t)\}$, имеем:

$$f(z)\,O_n(z^{-1})=\int_0^1\frac{O_n(z^{-1})-O_n(t)}{z^{-1}-t}\,d\mu(t)+\int_0^1 A(z,t)\,O_n(t)\,d\mu(t),$$

где $A(z, t) = z/(1-tz)$. Поскольку первый интеграл в правой части этого равенства представляет собой алгебраический многочлен по z^{-1} степени $n-1$: $\int_0^1 \frac{Q_n(z^{-1}) - Q_n(t)}{z^{-1}-t} d\mu(t) = \frac{P_{n-1}(z)}{z^{n-1}}$ и $Q_n(z^{-1}) = \frac{Q_n(z)}{z^n}$, где $P_{n-1}(z)$ и $Q_n(z)$ — многочлены по z, то

$$f(z) - \frac{z^n}{Q_n(z)} \int_0^1 \frac{Q_n(z^{-1}) - Q_n(t)}{z^{-1}-t} d\mu(t) \tag{4}$$

$$= \frac{z^n}{Q_n(z)} \int_0^1 A(z, t)\, Q_n(t)\, d\mu(t) = O(z^{2n+1}),$$

где

$$\frac{z^n}{Q_n(z)} \int_0^1 \frac{Q_n(z^{-1}) - Q_n(t)}{z^{-1}-t} d\mu(t) = \frac{z^n}{Q_n(z)} \frac{P_{n-1}(z)}{z^{n-1}} = \pi_{n,n}(f; z)$$

есть Паде-аппроксиманта функции $f(z)$ порядка (n, n), а средняя часть (4) — остаток $f(z) - \pi_{n,n}(f; z)$. Первое из равенств (4) показывает, что если $f(z) \in (\mathrm{M}-\mathrm{S})$, то Паде-аппроксиманты $\pi_{n,n}(f; z)$ существуют и очень хорошо приближают функцию $f(z)$ на любом компакте K, который не содержит ни одной точки из $[1, \infty)$.

Известно, однако, что класс $(\mathrm{M}-\mathrm{S})$ очень беден и что для того, чтобы $f(z) \in (\mathrm{M}-\mathrm{S})$, необходимо, чтобы при $z \to \infty$ для функции $f(z)$ выполнялось неравенство: $|f(z)| \leq A|z|$, $A = \mathrm{const}$.

Отсюда, например, видно, что ни одна целая функция, отличная от $az+b$, классу $(\mathrm{M}-\mathrm{S})$ не принадлежит.

В то же время известно, что класс $\mathscr{H}$ (Ганкеля) аналитических в окрестности нуля функций $f(z)$ вида $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k$ для каждой из которых её диагональные аппроксиманты Паде существуют при всех $n \in \mathscr{N}$ — очень богат, и что для того, чтобы $f(z) \in \mathscr{H}$, необходимо и достаточно, чтобы все определители Ганкеля $\mathscr{H}_n$, построенные, отправляясь от коэффициентов ряда (2), были отличны от нуля:

$$\mathscr{H}_n = \det s_n \stackrel{\mathrm{df}}{=} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n} \end{vmatrix} \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{5}$$

Этому условию удовлетворяют (иногда после некоторых простых ухищрений) все основные элементарные функции, большинство изученных специальных функций и многие другие. Поэтому желательно было бы проблему моментов обобщить на все функции класса.

2. Обобщенная проблема моментов.

Определение 2 (см. ДАН УССР, сер. А, № 6, 1981, 9—12). *Для заданной последовательности, вообще говоря, комплексных чисел $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ и заданного множества $x \subset \mathscr{R}$ назовем обобщенной проблемой моментов за-*

дачу, которая состоит в том, чтобы определить неубывающую функцию $\mu(t)$ и две последовательности линейно независимых функций из пространства $L^2(X, d\mu(t))$:

$$\{a_i(t)\}_{i=0}^{\infty} \text{ и } \{b_j(t)\}_{j=0}^{\infty},$$

для которых при произвольных $i, j=0, 1, 2, \ldots$, выполнялись бы равенства

$$S_{i+j} = \int_X a_i(t) \cdot \overline{b}_j(t)\, d\mu(t). \tag{6}$$

Ясно, что, если положить $a_i(t)=t^i$, $b_j(t)=t^j$, то получим обычную проблему моментов.

3. Существование решения. Для любой функции $f(z)\in\mathscr{H}$ обобщенная проблема моментов разрешима. Решение неоднозначно.

Для того чтобы этот результат изложить в самом общем виде, отметим, что на функции $a_i(t)$ и $b_j(t)$ в (6) можно смотреть, как на элементы гильбертова пространства H, в котором скалярное произведение задается интегралом (6).

Теорема 1 (о существовании решения). *Пусть H — бесконечномерное гильбертовое пространство и $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ — какой-нибудь ортонормированный базис в нем. Тогда для того чтобы для некоторой последовательности чисел $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ из $\mathbb{C}$ проблема моментов вида*

$$s_{i+j}=(a_i, b_j)_H, \quad i, j=0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

имела решение, представимое в H при помощи обобщённых полиномов вида

$$a_i=\sum_{\mu=0}^{i} \alpha_\mu^{(i)} e\mu, \quad b_j=\sum_{\mu=0}^{j} \beta_\mu^{(j)} e\mu, \tag{8}$$

в которых — $i, j=0, 1, \ldots$ старшие коэффициенты $\alpha_i^{(i)}$ и $\beta_j^{(j)}$ отличны от нуля, необходимо и достаточно, чтобы все определители Ганкеля были отличны от нуля:

$$\mathscr{H}_n=\det S_n\neq 0, \quad n=0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Последовательности решений $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$ будут при этом единственными, если в одной из них, например, в последовательности $\{a_i\}$ произвольным образом зафиксировать все старшие коэффициенты $\alpha_i^{(i)}$, $i=0, 1, 2, \ldots$, $\alpha_i^{(i)}\neq 0$.

4°. Диагональные аппроксимации Паде в обобщенной проблеме моментов.

Теорема 2 (о построении диагональных аппроксимант Паде и формула для остатка). *Пусть для функции $f(z)$, представимой в окрестности нуля асимптотическим рядом*

$$f(z)=f(0)+\sum_{i=0}^{\infty} s_i z^{i+1} \tag{10}$$

выполнены условия

1. *Все определители Ганкеля* $\mathscr{H}_n = \det S_n \neq 0$, $n = 0, 1, \ldots$

2. $\forall\, i, j = 0, 1, 2, \ldots$ *коэффициенты* s_{i+j} *ряда* (10) *каким-нибудь образом представлены в виде решений обобщенной проблемы моментов*

$$s_{i+j} = \int_X a_i(t)\,\overline{b}_j(t)\,d\mu(t) \tag{11}$$

и $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i(t)\,z^{i+1}$ *асимптотически сходится.*

Тогда, если отправляясь, например, от последовательности $\{b_j(t)\}$ *построить последовательность обобщенных полиномов*

$$B_n(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j^{(n)}\, b_j(t)$$

обладающих свойством биортогональности в том смысле, что:

$$\int_X a_k(t)\,\overline{B}_n(t)\,d\mu(t) = \delta_{n,k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{12}$$

то диагональные Паде-аппроксиманты $\pi_{n,n}(f; z) = \dfrac{P_n(z)}{Q(z)}$ *могут быть представлены в виде:*

$$\pi_{n,n}(f; z) = \Big[\sum_{j=0}^{n} \overline{c}_j^{(n)}\, z^{n-j}\, T_j(f; z)\Big] \Big/ \Big[\sum_{j=0}^{n} \overline{c}_j^{(n)}\, z^{n-j}\Big], \tag{13}$$

где $T_j(f; z)$ — *многочлены Тейлора порядка* j *для функции* $f(z)$. *При этом погрешность приближения представима формулой*

$$f(z) - \pi_{n,n}(f; z) = \tau_n(z) \int_X A(z, t)\,\overline{B}_n(t)\,d\mu(t), \tag{14}$$

где

$$\tau_n(z) = \frac{z^n}{Q_n(z)} = \frac{z^n}{\sum\limits_{j=0}^{n} \overline{c}_j^{(n)} z^{n-j}} \quad \text{и} \quad A(z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(t)\, z^{i+1}. \tag{15}$$

Доказательство. Учитывая (11) и (12), получаем равенство:

$$\int_X A(z, t)\,\overline{B}_n(t)\,d\mu(t) = \sum_{j=0}^{n} \overline{c}_j^{(n)} \int_X \sum_{i=0}^{\infty} a_i(t)\, z^{i+1}\,\overline{b}_j(t)\,d\mu(t)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \overline{c}_j^{(n)} \sum_{i=0}^{\infty} s_{i+j}\, z^{i+1} = \sum_{j=0}^{n} \overline{c}_j^{(n)}\, \frac{f(z) - T_j(z)}{z^j}$$

$$= \frac{Q_n(z)}{z^n} f(z) - \frac{1}{z^n} \sum_{j=0}^{n} \overline{c}_j^{(n)}\, z^{n-j}\, T_j(z),$$

из которого равенства (14) и (15) вытекают немедленно. Ясно, что формула (14) служит обобщением формулы (4).

Теорема 3 (о знаменателях аппроксимаций Паде). *Если при условиях теоремы 2 все функции* $a_i(t)$ *и* $b_j(t)$ *представляют собой алгебраические* *многочлены степеней соответственно i и j и для меры $d\mu(t)$ существуют моменты $\int_x t^k d\mu(t)$ всех порядков, то тогда для знаменателей Паде-аппроксимант* (13) *справедлива формула*

$$\frac{1}{\sum_{j=0}^{n} \overline{c}_j^{(n)} z^{n-j}} = z^{-n} \int_x f(zu) \overline{B}_n(u)\, d\mu(u) \tag{16}$$

$$\times\Big[\frac{S_{n-1}}{\overline{\beta}_n^n} + z\int_x \overline{B}_n(u) \int_x A(zu,t) \sum_{j=0}^{n} \overline{c}_j^{(n)} u^j \overline{b}_j(t)\, d\mu(t)\, d\mu(u)\Big]^{-1},$$

где $\beta_n^{(n)} = \frac{1}{n!} b_n^{(n)}(0)$.

Замечания.

1. Равенство (16) представляет интерес всякий раз, когда в его правой части в квадратных скобках второе слагаемое есть „0" от первого, т. е. когда $[\,\ldots\,] = \frac{S_{n-1}}{\beta_n^{(n)}}[1+0(1)]$. На практике очень часто встречается случай, когда $o(1) = O(\frac{1}{n})\, v O(\frac{1}{n^2})$.

2. Формула (14) даёт возможность получить хорошую оценку разности $f(z) - \pi_{n,n}(z)$ всякий раз, когда функции $a_i(t)$ и $b_j(t)$, служащие решением обобщенной проблемы моментов, удается выбрать таким образом, чтобы

1) функция $A(z,t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(t) z^{i+1}$ оказалась достаточно гладкой и

2) по формуле (16) удалось хорошо оценить знаменатель.

Замечу, что из сформулированных результатов мне принадлежат постановка обобщенной проблемы моментов и теорема 2 [о построении Паде-аппроксимации и об остатках). После этого теорема 1 (теорема существования) и теорема 3 были мною доказаны совместно с моим учеником А. П. Голубом.

Приведу в заключение два важных примера, которые показывают значение полученных ранее результатов. Оба эти примера принадлежат А. П. Голубу.

Гипергеометрические и вырожденные гипергеометрические функции. Будем рассматривать гипергеометрические функции, которые определяются в комплексной плоскости $\mathbf{C}$ с разрезом $(-\infty, -1]$ по формуле

$${}_2F_1(\nu-\sigma, 1; \nu+1; -z) \overset{df}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\nu-\sigma)_j}{(\nu+1)_j}(-z)^j,\ \mathrm{Re}\,\nu > -1, \tag{17}$$

а также вырожденные гипергеометрические функции, которые определяются $\forall z \in \mathbf{C}$ по формуле:

$${}_1F_1(1; \nu+1; z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)_j} z^j,\ \mathrm{Re}\,\nu > -1, \tag{18}$$

где $\forall \alpha \in \mathbf{C}$ положено $(\alpha)_i \overset{df}{=} \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+i-1)$.

Эти функции, а также более общие функции

$$ {}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a)_i (b)_i}{(c)_i} z^i $$

как известно, были в 1812 г. введены Гауссом, который тогда же получил для них разложение в непрерывную дробь и, благодаря этому, получил также рациональные полиномы для их приближения. Сходимость этих полиномов к соответствующим функциям была в 1866 г. установлена Риманом и независимо от него Томе.

В 1907 г. Паде в большой статье произвёл глубокое исследование функций (17) и (18) и, в частности, представил разность ${}_2F_1(\nu-\sigma, 1; \nu+1; -z) - \pi_{n,n}[{}_2F_1(\ldots); z]$ в виде отношения гипергеометрических функций.

В 1955 году Ван Россум получил аналогичные результаты для разности: ${}_1F_1(1; \nu+1; z) - \pi_{n,n}[{}_1F_1(\ldots); z]$.

Используя эти результаты, Люк исследовал в 1969 г. (в своей монографии) асимптотическое поведение погрешностей приближения функций (17) и (18) при $n \to \infty$ и установил на этом пути равенства

$$ (19) \qquad {}_2F_1(\nu-\sigma, 1; \nu+1; -z) - \pi_{n,n}[{}_2F_1(\ldots); z] = \Phi_n(z)[1 + O(n^{-1})], $$

$$ (20) \qquad {}_1F_1(1; \nu+1; z) - \pi_{n,n}[{}_1F_1(\ldots); z] = \widetilde{\Phi}_n(z)[1 + O(n^{-2})], $$

в которых функции $\Phi_n(z)$ и $\widetilde{\Phi}_n(z)$ были найдены в явном виде. Эти результаты были получены при помощи очень сложной техники гипергеометрических функций, которая была разработана предыдущими авторами.

А. П. Голуб при помощи достаточно искусного способа решил на двух страницах обобщенную проблему моментов для указанных функций в виде:

1) для функции ${}_1F_1(1; \nu+1; z)$: $a_i(t) = (1-t)^i/i!$, $b_j(t) = t^j/\Gamma(j+\nu+1)$, $d\mu(t) = \Gamma(\nu+1)t^\nu\,dt$, $A(z, t) = e^{z(1-t)}$.

2) для функции ${}_2F_1(\nu-\sigma, 1; \nu+1; -z)$:

$$ \overline{b}_j(t) = \frac{(\nu-\sigma)_{j+1}}{(\nu+1)_j} t^j, \quad d\mu(t) = t^\nu\,dt, \quad A(z, t) = \frac{(1+z)^\alpha}{(1+zt)^{\alpha+1}}. $$

После этого, используя общие теоремы 2 и 3, он произвел оценки типа оценок для коэффициентов Фурье от сложных функций двух переменных и на этом пути достаточно просто получил равенства (19) и (20). Кроме этого, он обобщил равенство (19) на всю верхнюю часть таблицы Паде в виде:

$$ {}_2F_1(\nu-\sigma, 1; \nu+1; -z) - \pi_{n+k,n}[{}_2F_1(\ldots); z] = \Phi(n, k, z)[1 + O(n^{-1})]. $$

Этот результат, по-видимому, является новым.

Настоящая работа докладована на Конференции по конструктивной теории функций, Варна'81

Институт математики АН УССР
252601 Киев, 4 ГСП СССР

Поступила 26. 1. 1982