Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

СУЩЕСТВОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ ДИССИПАТИВНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВО ВНЕШНОСТИ ДВИЖУЩЕГОСЯ ТЕЛА

ЦВЯТКО В. РАНГЕЛОВ

В работе рассматривается вопрос о существовании волновых операторов и оператора рассеяния для диссипативных гиперболических систем во внешней части области с движущейся границей в нечетномерном пространстве. При естественных ограничениях на скорости движения границы доказано существование слабого решения с ограниченной энергией для смешанной задачи. Кроме того, предполагая слабое локальное убывание энергии решения, доказано существование волновых операторов и оператора рассеяния.

Для стационарного случая абстрактная теория рассеяния для диссипативных гиперболических систем была развита П. Лаксом и Р. Филипсом [1]. Недавно В. Петковым [2] доказано существование оператора рассеяния. В рассматриваемой ниже смешанной задаче, когда граница области меняется во времени, приходится предполагать убывание энергии, которое необходимо при доказательстве существования оператора рассеяния. Отметим, что теория рассеяния для волнового уравнения во внешности области с движущейся границей рассматривалась в последнее время в работах Д. Купера и В. Штрауса [3; 4], В. Штрауса [5], Х. Тамуры [6] и др.

Автор благодарен В. Петкову за внимание к работе и полезные обсуждения.

1. Формулировка основных результатов. Пусть $Q\subset \mathbf{R}^{n+1}$ — область с гладкой границей Σ, где n — нечетное, и $n\geqq 3$. Введем следующие обозначения:
$\Omega(t)=\{x\in \mathbf{R}^n,\ (x,t)\in Q\}$, $Q_T=\bigcup_{0\leqq t\leqq T}\Omega(t)$ и $Q=\bigcup_{0\leqq t<\infty}\Omega(t)$; $\Sigma(t)$ граница $\Omega(t)$ и

$$\Sigma_T=\bigcup_{0\leqq t\leqq T}\Sigma(t),\ \Sigma=\bigcup_{0\leqq t<\infty}\Sigma(t),\ \mathcal{O}(t)=\{x\in \mathbf{R}^n,\ (x,t)\notin Q\}.$$

Пусть для любого t, $\mathcal{O}(t)\subset\{|x|\leqq\rho_0\}$, $\rho_0<\rho$.

Рассмотрим дифференциальный оператор (см. [2]) $G=\Sigma_{j=1}^n A_j\,\partial_{x_j}+B$, где $A_j(x)$, $B(x)$ — $(m\times m)$ матрицы с гладкими коэффициентами, имеющими следующие свойства:

а) матрицы $A_j(x)$ симметричные, $j=1,\ldots,n$.

(1.1) б) для любого t, G эллиптичен для $x\in\overline{\Omega(t)}$.

в) $A_j(x)=A_j^0$ и $B(x)=0$ для $|x|\geqq\rho$.

Из б) следует, что число m — четное.

Обозначим через $\Lambda(x, t)$ матрицу с гладкими коэффициентами размера $(m/2\times m)$ и через $\nu(x, t)=(\nu_t, \nu_x)$ внешнюю нормаль к Σ в точке $(x, t)\in\Sigma$. Через $\langle\, ,\rangle$ будем обозначать скалярное произведение в $\mathbf{C}^m$.

Сделаем следующие предположения:

А) $B(x)+B^*(x)-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial A_j(x)}{\partial x_j}\leq 0$ для $x\in\Omega(t)$, для любого t.

(1.2) Б) $\operatorname{rank}\Lambda(x, t)=m/2$ для $(x, t)\in\Sigma(t)$.

В) матрица $A(x, \nu)=\nu_t I-\sum_{j=1}^{n}A_j(x)\nu_{x_j}$, обратима на границе, где I единичная матрица и граница Σ „време-подобна".

Г) $\langle u, A(x, \nu)u\rangle\leq 0$ для $u\in\ker\Lambda(x, t)$.

Условие „време-подобности" границы Σ означает, что скорость движения границы в каждой точке меньше c_1, где $c_1=\min\lambda_j(x, \omega)$, $\lambda_j(x, \omega)$ — положительные собственные значения матрицы $G(x, \omega)=\Sigma_{j=1}^n A_j(x)\omega$. Напомним, что никакие сигналы не могут распространяться со скоростью меньше, чем c_1 (см. [7]). С другой стороны, в силу (1.1) б) $= c_1>0$.

Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство, полученное пополнением векторозначных гладких функций из $(C_0^\infty(\mathbf{R}^n))^m$ по норме $(\int_{\mathbf{R}^n}|u|^2dx)^{1/2}$. Пусть $\mathscr{H}(t)$ — пополнение $(C_0^\infty(\Omega(t)))^m$ по норме $(\int_{\Omega(t)}|u|^2dx)^{1/2}$. Обозначим энергию решения во время t через $E^2(u(t))=\int_{\Omega(t)}|u|^2dx$ и локальную энергию через

$$E^2(u|t), R)=\int_{\{|x|<R\}\cap\Omega(t)}|u|^2dx.$$

Будем изучать смешанную задачу

$$(1.3)\qquad \begin{cases}(\partial_t-G)u=0 & \text{в}\quad Q,\\ u(x, s)=f(x) & \text{на}\quad \Omega(s),\\ u\in\ker\Lambda(x, t) & \text{на}\quad \Sigma.\end{cases}$$

Сформулируем теперь следующие определения (см. также [3]).

Определение 1. *Решением задачи* (1.3) *в интервале* $I\subset[s, +\infty)$ *является вектор-функция* $u(x, t)$ *такая, что локально* $u(x, t)$ *принадлежит* $\mathscr{H}(t)$ (*т. е. для любой функции* $\mu\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ *имеем* $\mu u\in\mathscr{H}(t)$) *и кроме того:*

а) $t\to E(u|t), R)$ *непрерывно на* I, *где* $R>0$.

б) $u(x, t)$ *удовлетворяет системе* (1.3) *в смысле распределения.*

в) *начальное условие задано в* $\Omega(s)$ *и* $\operatorname{supp}\Lambda u$ *содержится в* $\bar{Q}$.

Решением с ограниченной энергией будем называть такое решение, которое определено на всем $\mathbf{R}$.

Определение 2. *Будем говорить, что система* (1.3) *удовлетворяет условию* $(\mathrm{CP})_+$, *если на* $I=[s, +\infty)$, *где* $s\geq 0$, *для любой* $f\in\mathscr{H}(s)$ *существует решение* $u(x, t)$ *задачи* (1.3) *такое, что:*

а) $u\in C(I, \mathscr{H}(t))$.

б) $u(s)=f$.

в) *существует постоянная* γ, *независящая от* t, s *и* f, *такая, что* $\|u(t)\|_{\mathscr{H}(t)}\leq\gamma\|f\|_{\mathscr{H}(s)}$.

Определение 3. *Будем говорить, что система* (1.3) *удовлетворяет условию* $(\mathrm{LD})_+$, *если* $u(x, t)$ — *решение с ограниченной энергией и для любого* $R>\rho$ *имеем* $\liminf\limits_{t\to+\infty} E(u(t), R)=0$.

Напомним, что решением задачи Коши в свободном пространстве для оператора $G^0=\Sigma_{j=1}^n A_j^0 \partial x_j$ является вектор-функция $u(t)$, удовлетворяющая в смысле распределений систему

$$(1.4)\qquad \begin{cases}(\partial_t-G^0)\,u=0,\\ \quad u(0)=f.\end{cases}$$

Обозначим через $U_0(t)$ однопараметрическую группу унитарных операторов в $\mathscr{H}$ связанную с задачей (1.4), так что $U_0(t)f=u(t)$ (см. [7]).

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.2). *Тогда система* (1.3) *удовлетворяет условию* $(\mathrm{CP})_+$ *для любого* $s\geqq 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* $(\mathrm{CP})_+$ и $(\mathrm{LD})_+$ *для задачи* (1.3). *Тогда для этой смешанной задачи существует оператор рассеяния* $S\colon \mathscr{H}\to\mathscr{H}$, *т. е. для любого* $f_{s-}\in\mathscr{H}(s)$ *существует единственное решение* $u(x, t)$ *задачи* (1.3) *на всем* $\mathbb{R}$ *и существует единственная вектор-функция* $f_{s+}\in\mathscr{H}(s)$ *такая, что* $E(U_0(t)f_{s\pm}-u(t))\to 0$ *при* $t\to\pm\infty$.

Для доказательства теоремы 1 сначала исследуем вопрос о существовании и единственности решения локализированной смешанной задачи (см. [8]). Пользуясь результатами из [9] о существовании гладких решений смешанной задачи, а также априорной оценки решения, полученной в силу диссипативности задачи, получим $(\mathrm{CP})_+$. Доказательство теоремы 2 проводится, следуя непосредственно доказательству существования волнового оператора из работы [2] и доказательству существования оператора рассеяния из работы [5].

2. Существование решения смешанной задачи. Следующая стандартная лемма дает априорную оценку для гладких решений задачи (1.3).

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (1.1) *и* (1.2). *Если* $u(x, t)$ *гладкое решение задачи* (1.3) *и* f *имеет компактный носитель, тогда при любом* $T\geqq 0$ *выполняется оценка*

$$(2.1)\qquad E^2(u(T))\leqq E^2(u(0)).$$

Доказательство. Обозначим как и в п. 1 $c_1=\min\lambda_j(x, \omega)$, $\{\lambda_j(x,\omega)\}$ — положительные собственные значения $G(x, \omega)$ и пусть для $R>\rho$ запишем $(Kt)=\Omega(t)\cap\{(x, t), |x|\leqq R-c_1t\}$. Пусть $u(x, t)$ решение задачи (1.3). Тогда выполняется равенство

$$\operatorname{Re}\langle u, u_t\rangle-\sum_{j=1}^n \operatorname{Re}\langle u, A_j u_{x_j}\rangle-\operatorname{Re}\langle u, Bu\rangle=0$$

и, вследствие свойств (1.1), имеем

$$\sum_{j=1}^n \operatorname{Re}\langle u, A_j u_{x_j}\rangle=1/2\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\langle u, A_j u\rangle-1/2\sum_{j=1}^n\langle\frac{\partial A_j}{\partial x_j}u, u\rangle$$

и $\operatorname{Re}\langle u, Bu\rangle=1/2\langle(B+B^*)u, u\rangle$. Тогда, интегрируя по усеченному конусу $K_T=\bigcup\limits_{0\leqq t\leqq T}K(t)$, получим

$$
\begin{aligned}
(2.2)\qquad 0= & -1/2\int_{K(t)}\langle(B+B^*-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial A_j}{\partial x_j})u, u\rangle dxdt+1/2\int_{K(T)}|u(T)|^2dx \\
& -1/2\int_{K(0)}|u(0)|^2dx+1/2\int_{\partial K_T\setminus(\Sigma_T\cup K(0)\cup K(T))}\langle u(\nu_t I-\sum_{j=1}^{n}A_j\nu_{x_j}), u\rangle ds \\
& +1/2\int_{\Sigma_T}\langle u(\nu_t I-\sum_{j=1}^{n}A_j\nu_{x_j}), u\rangle ds.
\end{aligned}
$$

Имеем $u\in\ker\Lambda(x, t)$ на Σ_T и $\langle u(\nu_t I-\Sigma_{j=1}^{n}A_j x_j), u\rangle|_{\Sigma_T}\geqq 0$ по (1.2) г), а также $(\nu_t I-\Sigma_{j=1}^{n}A_j\nu_{x_j})\geqq 0$ на $\partial K_T\setminus(\Sigma_T\cup K(0)\cup K(T))$ по (1.2) в). Применяя к первому слагаемому (2.2) свойство (1.2) А), получим

$$\int_{K(T)}|u(T)|^2dx\leqq\int_{K(0)}|u(0)|^2dx$$

и при $R\to+\infty$ выполнена оценка (2.1).

При подходящей замене координат можно выпрямить локально границу Σ. Пусть $(y, t)=(\Phi(x, t), t)$ где Φ — гладкая вектор-функция $\Phi=(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ и $y_j=\varphi_j(x, t)$, $j=1, \dots, n$. Тогда оператор $L=\partial_t-G$ преобразуется в оператор

$$L_\Phi=\partial_t-\sum_{j=1}^{n}(L\varphi_j)\frac{\partial}{\partial y_j}\cdot$$

Определение 4. *Преобразование координат* Φ *называется гиперболическим, если оператор* $G_\Phi=\sum_{j=1}^{n}(L\varphi_j)\frac{\partial}{\partial y_j}$ *удовлетворяет свойствам* (1.1) *при условии, что этим свойствам удовлетворял оператор* G.

Проверим, что при условиях, накладываемых на оператор G и на границу области Σ, т. е. условия (1.1) и (1.2) для любой точки (x', t') границы Σ, существует гиперболическое преобразование Φ такое, что в новых координатах образ области Q в окрестности точки (y', t') цилиндрична и граница выпрямлена. При этом оператор G преобразуется в оператор G_Φ с коэффициентами, зависящими от t. В самом деле, можно считать, что ортогональным преобразованием в окрестности произвольной точки (x', t') граница задается $x_n=g(x_1, \dots, x_{n-1}, t)$ и нормаль к Σ (x', t') будет $\nu=(0, \dots, 0, t')$. Из-за того что граница не характеристична и оператор G эллиптичен, то преобразованный оператор с символом

$$\sum_{j=1}^{n-1}A_j\xi_j+(\frac{\partial g}{\partial t}I-\sum_{j=1}^{n-1}A_j\frac{\partial g}{\partial x_j}+A_n)\xi_n,\quad \xi_j=\frac{\partial}{\partial y_j}$$

также будет эллиптичен в малой окрестности образа точки $(\Phi(x', t'), t')$.

Укажем теперь на некоторые априорные оценки для решений систем с переменными коэффициентами, которые будут использованы в дальнейших рассмотрениях. Обозначим $\mathbb{R}^n_+=\{y\in\mathbb{R}^n, y_n>0\}$. Пусть $U_1\subset\mathbb{R}^{n+1}$ окрестность нуля и $U=U_1\cap\{(y, t);\ y_n>0\}$, $S=\{(y, t), y_n=0\}\cap U_1$.

Пусть $u(x, t)$ непрерывно дифференцируема в $\bar{U}_1$. Рассмотрим задачу

$$
\begin{aligned}
(2.3)\qquad & L_1u=(\partial_t-G_1)u=f \quad \text{в} \quad U, \\
& u\in\ker\Lambda(y, t) \quad \text{в} \quad \partial U\cap S,
\end{aligned}
$$

где $G_1=\Sigma_{j=1}^n A_j^1(y,t)\,\partial_{y_j}+B^1(y,t)$. Через L_1^* обозначим оператор формально сопряженный к оператору L_1 и определенный как

$$L_1^*v=-\partial_t v-G_1^*v,\quad \text{где}\quad G_1^*v=-\sum_{j=1}^n \partial_j A_j^{1*}v+B^1v.$$

Доказательство следующей леммы содержится, например, в [10].

Лемма 2. *Пусть для оператора G_1 в U выполнены условия:*

а) *матрицы $A_j^1(y,t)$ и $B(y,t)$ симметричны,* $j=1,\dots,n$, $\operatorname{rank}\Lambda=m/2$; *вне окрестности U матрицы $A_j^1(y,t)$ и $\Lambda(y,t)$ продолжены как постоянные, а $B(y,t)$ как* 0.

б) *матрица $\nu_t I-\Sigma_{j=1}^n A_i^1\nu_{y_j}$ обратима на $\partial U\cap S$. Тогда для решения задачи* (2.3) *имеют место априорные оценки:*

$$\|u(t)\|_{L^2(U)}\leq Ce^{\beta(t-s)}(\|u(s)\|_{L^2(U)}+\|L_1u\|_{L^2(U\times[s,t])}),$$

$$\|v(t)\|_{L^2(U)}\leq Ce^{-\beta(t-s)}(\|v(t)\|_{L^2(U)}+\|L_1^*u\|_{L^2(U\times[s,t])}).$$

Пусть точка $(y_0,t_0)\in\Sigma$, V — окрестность этой точки и Φ гиперболическое преобразование, так что в окрестности $\Phi(v)$ граница Σ выпрямлена и оператор G, удовлетворяющий (1.1) и (1.2), преобразован в оператор G_Φ. Рассмотрим множество

$$W=\{(y,t):|y-y_0|\leq\lambda_{\max}|t-t_0|\},$$

где $\lambda_{\max}$ — максимальное собственное значение $G(y,w)$, т. е. W — область зависимости точки (y_0,t_0).

Имеет место следующая лемма о локальной единственности решения.

Лемма 3. *Если $u(y,t)$ решение задачи*

$$L_\Phi u=0\quad в\quad V,$$

$$u\in\ker\Lambda(y,t)\quad \text{на}\quad \partial V\cap\Sigma$$

и $u(y,t)$ имеет нулевые данные Коши в $W\cap V\cap\{t=0\}$, тогда $u=0$ в $W\cap V$.

Доказательство леммы 3 следует непосредственно из леммы 2 и предположения 2.1 работы [9]. Напомним, что так как Σ не характеристична, то как доказано в [11], при гиперболическом преобразовании Φ диссипативные граничные условия преобразуются в диссипативные.

Сформулируем еще одну лемму, принадлежащую Лебегу, которая нужна при доказательстве существования и единственности решения задачи (1.3).

Лемма 4 (Лебег). *Пусть $U=\bigcup_{\alpha\in J}V_\alpha$ — открытое покрытие компактного множества N метрического пространства X. Тогда существует такое число $r>0$ (число Лебега), что при любом $x\in N$ множество $B_rx=\{x';|x-x'|<r\}$ содержится в некотором V_α.*

Докажем теперь единственность решения смешанной задачи (1.3).

Лемма 5. *Пусть $u(t)$ решение задачи* (1.3) *в смысле определения 1. Если $u(t)$ имеет нулевые данные Коши в $\Omega(0)$, то $u=0$ в Q.*

Доказательство (см. теорему 1 работы [12] для случая волнового уравнения). Если u решение задачи (1.3), то $t\to u(.,t)$ непрерывно в $(L^2(\mathbf{R}^n))^m$. Положим $s=\sup_{T\geq0}\{T:u=0\ в\ Q_T\}$. Для точки (x,s) существует окрестность U и гиперболическое преобразование $(\Phi(y,t),t)$, которое определено на $U\subset\mathbf{R}^{n+1}$, так что $\Phi(U\cap Q)=\Phi(U)\cap\{y,t),y_n>0\}$. Рассмотрим функцию

$\chi(y, t) \in C_0^\infty(U)$ такую, что $\chi=1$ на $U' \subset\subset U$. Положим $\tilde{u}=\chi u$ и пусть $v=\tilde{u}(\Phi(y, t), t)$. Тогда отображение $t \to v(\,.\,, t)$ непрерывно в $(L^2(\mathbb{R}^n_+))^m$. Так как $L_\Phi \tilde{u}=0$ на $U' \cap Q$, то $L_\Phi v=0$ на $V=U' \cap \{(y, t), y_n>0\}$, где, как и выше, $L_\Phi v=(\partial_t - G_\Phi)v$. Тогда для любой такой окрестности V можно применить лемму 3 и получить, что $v=0$ в $W \cap V$, так как u имеет нулевые данные Коши в $\Omega(s)$. Обозначим через $\psi=(\psi(x, t), t)$ преобразование, обратное преобразованию Φ. При помощи этого преобразования получим, что для любой точки $(x, s) \in \Omega(s)$ существует окрестность $\tilde{W}$, в которой $u=0$. По лемме 4 следует, что существует такое число $r>0$ и, если $(x, s) \in \Sigma(s)$, то $B_r(x, s) \subset \tilde{W}$ для некоторого $\tilde{W}$, где $B_r(x, s)$ сфера радиуса r с центром в точке (x, s). Отсюда следует, что $u=0$ в окрестности границы при $\tau \leq t < \tau + r$, другими словами, u можно продолжить как решение системы $Lu=0$, во всем $\mathbb{R}^n$ при $\tau \leq t < \tau + r$ с нулевыми данными Коши. Тогда $u=0$ на интервале $\tau \leq t < \tau + r$ и получили, что $\tau = +\infty$.

Существенную роль при доказательстве теоремы 1 играет результат о существовании решения задачи (1.3), предполагая, что выполнены условия согласования (см. [8]).

Лемма 6. *Предположим, что $f \in (C_0^\infty(\Omega(0)))^m$ и, что выполнены условия* (1.1) *и* (1.2), *накладываемые на оператор G и на области Q. Тогда существует решение смешанной задачи* (1.3).

Доказательство. Обозначим, как и в лемме 3, через $W_{(x_0, t_0)}$ область зависимости точки $(x_0, t_0) \in Q_T$, $T>t_0$. Пусть $W_{(x_0, t_0)} \cap (\Sigma(0) \times \{0\}) = \emptyset$. Тогда построим $u(x, t)$ так, чтобы являлось решением следующей задачи без граничных условий

$$(2.4) \qquad \begin{aligned} &Lu=0 && \text{в} \quad W_{(x_0, t_0)}, \\ &u(x, 0)=f(x) && \text{в} \quad W_{(x_0, t_0)} \cap (\Omega(0) x \{0\}). \end{aligned}$$

Заметим, что в силу условия (1.2) в) имеем $\overline{W_{(x_0, t_0)} \cap \Sigma_T = \emptyset}$. Обозначим через M область, содержащую множество $\overline{W_{(x_0, t_0)} \cap (\Omega(0)\, x \{0\})}$, и такую, что $M \cap \Sigma_T = \emptyset$. Рассмотрим вектор-функцию $f_0(x)$ со свойством $f_0(x)=f(x)$ в $W_{(x_0, t_0)} \cap \Omega(0) x \{0\})$. Тогда существует решение $v(x, t) \in (C_0^\infty(M \times (0, T)))^m$ для смешанной задачи

$$\begin{aligned} Lv&=0 \quad \text{в} \quad M \times (0, T), \\ v(x, 0)&=f_0, \\ \Lambda v(x, t)&=0 \quad \text{на} \quad \partial M \times (0, T) \end{aligned}$$

и ограничение $v(x, t)$ на области $W_{(x_0, t_0)}$ является единственным решением задачи (2.4) — единственность доказана в лемме 5.

Рассмотрим теперь случай, когда $\overline{W_{(x_0, t_0)} \cap \Sigma_T \neq \emptyset}$. Определим число $\tau_0>0$ как $\tau_0 = \max\{t : (x, t) \in W_{(x_0, t_0)} \cap \Sigma_T\}$. Так как множество $\overline{W_{(x_0, t_0)} \cap \Sigma_T}$ — компакт, то существует конечное покрытие

$$\bigcup_{j \in J} V_{(x_j, t_j)} \quad \text{и} \quad W_{(x_0, t_0)} \cap \Sigma_T \subset \bigcup_{j \in J} V_{(x_j, t_j)},$$

точки $(x_j, t_j) \in W_{(x_0, t_0)} \cap \Sigma_T$. По лемме 4 существует число $r>0$ такое, что для любой точки $(\bar{x}, \bar{t}) \in W(x_0, t_0) \cap \Sigma_T$ существует номер k и $\{(x, t) \in Q_T : |x-\bar{x}|^2$

$+|t-\overline{t}|^2<r^2\}\subset V_{(x_k,\,t_k)}$. Покажем, как можно найти окрестность $V_{(x_k,\,t_k)}$. Так, например, если $(x_1, 0)$ точка из $W_{(x_0,\,t_0)}\cap\Sigma_T$, то существует окрестность $V(x_1, 0)$ этой точки и гиперболическое преобразование $\Phi_{(x_1,\,0)}$. Рассмотрим тогда следующую задачу:

$$(2.5)\qquad \begin{aligned} Lu&=0 \quad \text{в} \quad W(x_0, t_0)\cap Q_T,\\ \Lambda u&=0 \quad \text{на} \quad W_{(x_0,\,t_0)}\cap\Sigma_T, \end{aligned}$$

которая при помощи преобразования Φ переходит в задачу

$$(2.6)\qquad \begin{aligned} L_\Phi v&=0 \quad \text{в} \quad V_{1(x_1,\,0)},\\ \Lambda_\Phi v&=0 \quad \text{на} \quad V_{1(x_1,\,0)}\cap\Phi(\Sigma_T), \end{aligned}$$

где $V=\Phi(U)$.

Пусть $\lambda_{\max}^{(x_1,\,0)}$ — максимальная скорость распространения сигнала для оператора G_Φ, т. е. $\lambda_{\max}^{(x_1,\,0)}$ — максимальное собственное значение оператора в области $V_{1(x_1,\,0)}$. Тогда существует конус V_1', содержащийся целиком в $V_{1(x_1,\,0)}$ и такой, что $\operatorname{diam}(V_{1(x_1,\,0)}-V_1')>0$, и наклон этого конуса равен $\lambda_{\max}^{(x_1,\,0)}$ Определим тогда $V_{(x_1,\,0)}=\Phi^{-1}V_1'$. Так как $V_1'\subset\subset V_{1(x_1,\,0)}$ и $\operatorname{diam}(V_{1(x_1,\,0)}-V_1')>0$, то существует область $M_0\subset\mathbf{R}^n$ и интервал $[a, b]$, такие, что выполнено $V_1'\subset M_0\times[a, b]\subset V_{1(x_1,\,0)}$, и, кроме того, ∂M_0 регулярна и $V_1'\cap\{s=0\}$ содержится целиком в M_0.

Так как f удовлетворяет условиям согласовки для оператора L, то и f_1 удовлетворяет условиям согласовки для оператора L_Φ на множестве $V_{1(x_1,\,0)}\cap\{s=0\}\cap\{y_n=0\}$. Рассмотрим теперь задачу

$$(2.7)\qquad \begin{aligned} L_\Phi\tilde{u}&=0 \quad \text{в} \quad M_0\times(a, b),\\ \tilde{u}(y, 0)&=f_1 \quad \text{на} \quad M_0,\\ \Lambda_\Phi\tilde{u}&=0 \quad \text{на} \quad \partial M_0\cap\{y_n=0\}\times(a, b), \end{aligned}$$

для которой существует единственное решение $\tilde{u}(y, s)\in C^\infty(M_0\times(a, b))$, так как условия согласования для f и f_1 на $V_{1(x_1,\,0)}\cap\Sigma_T$ выполняются для произвольного порядка (см. [9]). Определим теперь вектор-функцию $u(x, t)=\tilde{u}(\Phi(x, t))$, и она является единственным решением по лемме 5 задачи

$$(2.8)\qquad \begin{aligned} Lu&=0 \quad \text{в} \quad B_r(x_1, 0),\\ U(x, 0)&=f \quad \text{на} \quad B_r(x_1, 0)\cap(\Omega(0)\times\{0\}),\\ \Lambda u(x, t)&=0 \quad \text{в} \quad B_r(x_1, 0)\cap\Sigma_T, \end{aligned}$$

в области $\{(x, t)\in Q_T,\ |x-x_1|+\lambda_{\max}^{(x_1,\,0)}t<r\}$. Следовательно, существует единственное решение в области $K(M)=\cup\{(x, t):|x-x_1|+|t=s|<\rho\}$, где объединение берется по $\{x:|x-x_1|\leq\rho\}\subset M_0$, $x_1\in M_0$, $\rho>0$. Так как число r не зависит от точки $(x, t)\in Q_T\cap W_{(x_0,\,t_0)}$, то применяя эту процедуру $[[2\tau_0/r]+1]$ раз, строим решение в области $W_{(x_0,\,t_0)}\cap Q_T\cap\{0\leq t\leq T\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1 получается из следующей леммы (см. [12]).

Лемма 7. *Если* $f \in (L^2(\Omega(0)))^m$ *и имеет компактный носитель, то существует единственное решение задачи* (1.3) *при условиях* (1.1) *и* (1.2). *При этом решение* $u(x, t)$ *удовлетворяет оценке* (2.1).

Доказательство. Оценка (2.1) следует из леммы 1. Пусть $f_n(x)$ последовательность вектор-функций из $(C_0^\infty(\Omega(0)))^m$ и пусть $f_n(x) \to f(x)$ в $(L^2(\Omega(0)))^m$. Из доказанного в лемме 6 имеем, что для любого начального условия $f_n(x)$ существует C^∞ решение $u^n(x, t)$. Применяя оценку (2.1) к разности $u^n - u^m$ получаем, что $\{u^n\}$ последовательность Коши в $C([0, T], (L^2(\Omega(t)))^m)$. При этом $u^n(t)$ удовлетворяют условиям на границе $\Lambda u^n(t) = 0$. Последовательность сходится в $C([0, T], (L^2(\Omega(t)))^m)$ равномерно по t к $v(t)$. Следовательно, $v(t)$ является решением задачи (1.3) в смысле определения 1, и энергетическая оценка выполнена с $\gamma = 1$.

3. Существование оператора рассеяния. Пусть $u(x, t)$ — решение задачи (1.3) с начальным условием $f(x)$. Рассмотрим вектор-функцию $v_s(t) = u(x, t) - U_0(t-s)\, u(x, s)$, где $s > 0$ и $t \geq s$. Имеем, что $\tilde{u} = U_0(t-s)\, u(x, s)$ является решением задачи Коши

$$(\partial_s - G_0)\tilde{u} = 0 \quad \text{в} \quad \mathscr{H},$$

$$\tilde{u}(x, s) = u(x, s).$$

Так как $v_s(s) = 0$, то ясно, что $v_s(t) = 0$ при $|x| > c_2(t-s) + \rho$, где число ρ такое же, как и в условию (1.1) в) и $c_2 = \max_{1 \leq j \leq m, |\omega|=1} \lambda_j(x, \omega)$, $\lambda_i(x, \omega)$ — собственные числа $G(x, \omega)$. Предположим, что $\operatorname{supp} f C \Omega_R$, где $\Omega_R = \{x : |x| < R\} \cap \{\Omega(0)\}$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ обозначим через d число $R + \rho + 2(c_1 + 1)\varepsilon$, где $c_1 = \min_{1 \leq j \leq \omega, |\omega|=1} \lambda_j(x, \omega)$. Пусть $d_1 = (d + \rho)/c_1$. Выбираем $T_1 + d_1$, $T > 0$ и $\gamma = c_2 d_1 + \rho_0$. Тогда имеем $v_T(T_1) = 0$ при $|x| > \gamma$ и, следовательно,

$$E(v_T(T + d_1)) \leq E(v_T(T + d_1), \Omega_\gamma) \leq E(u(T + d_1), \Omega_\gamma)$$
$$+ E(U_0(d_1)\, u(x, T), \Omega_\gamma) \leq E(u(x, 0), \Omega_{c_2 T + d_1 + R}) + E(U_0(d_1)\, u(x, T), \Omega_\gamma)$$

и, следовательно, $E(v_T(T + d_1)) \leq 2E(u(x, T), \Omega_{c_2 d_1 + \gamma})$. Из условия $(\mathrm{LD}_{1+}$ следует, что существует такая последовательность

$$t_p \to +\infty \text{ и } t_{p+1} \geq t_p + d_1, \text{ что } E(u(x, t_p), \Omega_{c_2 d_1 + \gamma}) \to 0, \; p \to +\infty.$$

Тогда получаем, что

$$E(v_{t_p}(t_p + d_1)) \to 0, \; p \to +\infty. \tag{3.1}$$

Следующая лемма доказана в [2, лемма 3.1] и имеет место для случая смешанной задачи в области с движущейся границей.

Лемма 8. *Пусть* $s > 0$, $t \geq s + d_1$, *тогда для* $|x| \leq \rho$ *выполняется* $U_0(t-s)\, u(x, s) = 0$.

Докажем теперь существование оператора W_+ (см. [2]).

Лемма 9. *Если выполнены условия теоремы* 2, *то существует* $f_+ \in \mathscr{H}$ *такая, что* $E(u(t) - U_0(t) f_+) \to 0$ *при* $t \to +\infty$.

Доказательство. Выше показано, что существует такая последовательность $t_p \to +\infty$, $t_{p+1} \geq t_p + d_1$ и выполнено (3.1). Из условия $(\mathrm{CP})_+$ следует, что

$$\sup_{t > t_q + d_1} E(V_{t_q}(t)) \leq E(V_{tq}(t_p + d_1)) \to 0, \; q \to +\infty,$$

и тогда $E(V_{tq}(t))\to 0$, $q, t\to+\infty$. Получаем, что для $\mu>\nu$ и для любого $t\in\mathbb{R}$

$$E(U_0(t-t_p)\,u(t_p)-U_0(t-t_q)\,u(t_q))=E(u(x, t_p)-U_0(t_p-t_q)\,u(x, t_q)=E(V_{t_q}(t_p))\to 0,$$

$$p\to+\infty,\ q\to+\infty.$$

Следовательно, $U_0(t-t_p)\,u(t_p)$ — последовательность Коши и существует $f_+\in\mathscr{H}$ и $f_+=\lim U_0(t_p)\,u(t_p)$, $p\to+\infty$. Тогда для любого $t\geq t_p+2d_1$ имеем

$$E(u(t)-U_0(t)f_+)\leq E(u(t)-U_0(t-t_p)u(t_p))+E(U_0(t-t_p)u(t_p)-U_0(t)f_+)=E(V_{t_p}(t))$$

$$+E(U_0(-t_p)u(t_p)-f_+)\leq E(_{t_p}(t_p+2d_1))+E(U_0(-t_p)u(t_p)-f_+)\to 0,\ p\to+\infty.$$

При доказательстве теоремы 2 используется следующая лемма, которая по существу доказана в [5, лемма 4].

Лемма 10. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2 и пусть $f_-\in\mathscr{H}$ и* $\operatorname{sup} f_-$ *— компакт. Тогда существует решение u задачи* (1.3), *определенное для любого t, и такое, что* $E(u(t)-U_0(t)f_-)\to 0$ *при $t\to-\infty$.*

При доказательстве существования оператора S следуем [5].

Доказательство теоремы 2. Пусть $f_-\in\mathscr{H}$ и последовательность $\{f_-^u\}$ сходится к f_- в $\mathscr{H}$, где все f_-^n имеют компактный носитель. Пусть u^n — решение задачи (1.3) такое, что $E(u^n(s)-U_0(s)f_-^n)\to 0$ при $s\to-\infty$ (см. лемму 10). Тогда

$$E(u^n(s)-u^m(s))\leq E(u^n(s)-U_0(s)f_-^n+E(f_-^n-f_-^m)+E(u^n(s)-U_0(s)f_-^4)$$

и из условия $(\mathrm{CP})_+$ следует, что

$$\sup_t E(u^n(t)-u^m(t))\leq E(f_-^n-f_-^m).$$

Тогда существует $u=\lim_{n\to+\infty}u^n$, которое является также решением задачи (1.3) и $\sup\limits_t E(u^n-u)\leq E(f^n-f_-)$. Так как

$$E(u(s)-U_0(s)f_-)\leq E(u(s)-u^n(s))+E(u^n(s)-U_0(s)f_-^n)+E(f_-^n-f_-),$$

то

$$E(u(s)-U_0(s)f_-)\to 0,\ s\to-\infty. \tag{3.2}$$

По лемме 9 существует $f_+^n\in\mathscr{H}$ такая, что $E(u^n(t)-U_0(t)f_+^n)\to 0$, $t\downarrow+\infty$ и последовательность $\{f_+^n\}$ сходится в $\mathscr{H}$, так как

$$E(f_+^n-f_+^m)\leq E(U_0(t)f_+^n-u^n(t))+E(u^n(t)-u^m(t))+E(u^m(t)-U_0(t)f_+^m).$$

Пусть $f_+=\lim_{m\to+\infty}f_+^m$. Тогда

$$E(u(t)-U_0(t)f_+)\to 0,\ t\to+\infty. \tag{3.3}$$

Из (3.2) и (3.3) следует теорема 2.

Осталось только доказать единственность u и f_+.

Допустим, что u и v две решения задачи (1.3) с одной и той же f_-. Тогда $E(U(s)-v(s))\to 0$, $s\to-\infty$, и из условия $(\mathrm{CP})_+$ следует, что $E(u(t)-v(t))\leq E(u(s)-v(s))$, $t\geq s$. Таким образом получаем, что $E(u(t)-v(t))=0$ для любого t, так что $u=v$. С другой стороны, f_+ и g_+ элементы $\mathscr{H}$ одинаковые при $t\to+\infty$. Тогда

$$E(f_+-g_+)=E(U_0(t)f_+-U_0(t)g_+)\to 0,\ t\to+\infty$$

и $f_+=g_+$. Теорема 2 доказана.

Основные результаты опубликованы без доказательств в [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Lax, P., R. Phillips. Scattering theory for dissipative hyperbolic systems. *J. Funct. Anal.*, **14**, 1973, 172-235.
2. V. Petkov. Representation of the scatteting operator for dissipative hyperbolic systems. *Comm. Part. Diff. Eq.*, **6**, 1981, 993-1022.
3. J. Cooper, W. Strauss. Representations of the scattering operator for moving obstacles. *Indiana Univ. Math. J.*, **28**, 1979, 643-671.
4. J. Cooper, W. Strauss. Holomorphic extension of the scattering amplitude for moving obstacles. *Indiana Univ. Math. J*, **29**, 1980, 597-607.
5. W. Strauss. The existence of the scattering operator for moving obstacles. *J. Funct. Anal.*, **31**, 1979, 255-262.
6. H. Tamura. On the decay of the local energy for wave equations with a moving obstacle. *Nagoya Math. J.*, **71**, 1978, 125-147.
7. П. Лакс, Р. Филлипс. Теория рассеяния. Москва, 1971.
8. A. Inoue, Sur $\Box u+u^3=f$ dans un domaine noncylindrique. *J. Math. Anal. Appl.*, **46**, 1974, 777-819.
9. J. Rauch, F. Massey. Differentiability of solutions to hyperbolic initial-boundary value problems. *Trans. A. M. S.*, **189**, 1974, 303-318.
10. J. Rauch. $\mathscr{L}_2$ is a continable initial condition for Kreiss mixed problems. *Comm. Pure. Appl. Math.*, **25**, 1972, 265-285.
11. P. Lax, R. Phillips. Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators. *Comm. Pure. Appl. Math.*, **13**, 1960, 427-455.
12. J. Cooper. Local energy decay of solutions of the wave equations in the exterior of a moving body. *J. Math. Anal. Appl.*, **49**, 1975, 130-153.
13. Ts. Rangelov. Existence of wave operators for dissipative hyperbolic systems in the exterior of moving obstacle. *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **35**, 1982, 581-583.

Единый центр математики и механики
София 1090 П. Я. 373

Поступила 17. 3. 1982