Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

О ЧИСЛЕ 5-ВЕРШИННЫХ НЕЗАВИСИМЫХ МНОЖЕСТВ 13-ВЕРШИННЫХ ГРАФОВ БЕЗ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

НИКОЛАЙ Г. ХАДЖИИВАНОВ, НЕДЯЛКО Д. НЕНОВ

Описаны все 13-вершинные графы без треугольников и не более чем с двумя независимыми 5-вершинными множествами. Как следствие получено усиление теоремы Грийнвуда и Глиссона [8] о существовании независимых 5-вершинных множеств в 14-вершинном графе без треугольников.

1. Введение. Рассматриваются только обыкновенные графы без треугольников. Множество вершин графа называется независимым, если никакие две вершины этого множества несмежны. Через $\pi(G; p)$, где G — граф, а p — натуральное число, обозначим число всех независимых p-вершинных множеств графа G. Минимум $\pi(G; p)$ по всем n-вершинным графам без треугольников обозначим через $\pi(n; p)$.

Перечислим необходимые вспомогательные результаты.

(1) Если G — 5-вершинный граф без треугольников и $\pi(G; 3)=0$, тогда он является простым циклом длины 5.

(2) $\pi(6; 3)\geqq 2$, [6].

(3) $\pi(7; 3)\geqq 4$, [6].

(4) Имеются только три 8-вершинных графа G без треугольников, для которых $\pi(G; 4)=0$, и они изображены на рис. 1, 2 и 3, [7].

(5) $\pi(9; 4)\geqq 1$ и имеется только один 9-вершинный граф без треугольников, для которого $\pi(G; 4)=1$ (см. рис. 4), [1], [2].

(6) Имеется только один 9-вершинный граф без треугольников, для которого $\pi(G; 4)=2$, и он изображен на рис. 5, [1], [2].

(7) $\pi(10; 4)\geqq 5$, [4].

(8) Существует единственный 13-вершинный граф без треугольников G_1, для которого $\pi(G_1; 5)=0$ (см. рис. 6), [7].

На рис. 7 изображен 13-вершинный граф G_2 без треугольников, для которого $\pi(G_2; 5)=2$. Удаляя из графа G_2 ребро, соединяющее вершины 1 и 3, получаем еще один граф G_3 без треугольников, такой, что $\pi(G_3; 5)=2$.

Будем пользоваться следующими обозначениями:

$A(v)$ — множество всех вершин графа, смежных вершине v.

$\bar{A}(v)$ — множество всех вершин графа, несмежных вершине v, за исключением самой вершины v.

$d(v)$ — степень вершины v, т. е. $d(v)=|A(v)|$.

$G-v$ — подграф графа G, получающийся удалением вершины v.

$G-e$ — подграф графа G, получающийся удалением ребра e.

В настоящей статье основным результатом является следующая

Теорема. *Кроме графов* G_1 (рис. 6), G_2 (рис. 7) *и* $G_3 = G_2 - [1, 3]$, *нет других 13-вершинных графов без треугольников G, для которых* $\pi(G; 5) \leqq 2$.

Из этой теоремы следует, что не существует 13-вершинный граф без треугольников, для которого $\pi(G; 5) = 1$, [3].

Тоже из этой теоремы в [5] получено

Следствие. $\pi(14; 5) \geqq 6$.

В [4] доказано еще, что $\pi(14; 5) \leqq 9$.

2. О 13-вершинных 4-регулярных графах без треугольников. С этого пункта начинается доказательство теоремы. Докажем следующее:

Предложение 1. *Пусть G — 13-вершинный регулярный граф степени 4 без треугольников и хотя бы одна его вершина не содержится в 5-вершинном независимом множестве. Тогда граф G изоморфен либо графу* G_1, *изображенному на рис. 6, либо графу, изображенному на рис. 8.*

Из предложения 1 просто вытекает следующее:

Следствие. *Пусть G — 13-вершинный регулярный степени 4 граф без треугольников. Тогда либо G изоморфен графу* G_1 *на рис. 6, либо* $\pi(G; 5) \geqq 3$.

Докажем это следствие. Согласно предложению 1, если граф не изоморфен графу на рис. 6, то он либо изоморфен графу на рис. 8, либо любая вершина этого графа содержится в 5-вершинном независимом множестве. Граф на рис. 8 содержит ровно 4 независимых 5-вершинных множества, а именно $[a_1, b_1, b_4, c_2, c_3]$, $[a_4, b_4, b_1, c_2, c_3]$, $[b_3, a_2, b_2, c_1, c_4]$, $[b_3, a_3, b_2, c_1, c_4]$. Остается рассмотреть ситуацию, когда любая вершина графа G содержится в независимом 5-вершинном множестве. Неравенство $\pi(G; 5) \geqq 3$ в этом случае является очевидным. Доказательство следствия завершено.

Доказательство предложения 1. Пусть вершина v_0 не содержится ни в каком независимом 5-вершинном множестве графа G. Через $\bar{A}(v_0)$ обозначим множество всех вершин графа G, отличных от v_0 и несмежных ей. Подграф Γ графа G, порожденный множеством вершин $\bar{A}(v_0)$, имеет 8 вершин, не содержит треугольников и $\pi(\Gamma; 4) = 0$. Согласно (4), граф Γ изоморфен некоторому из графов, изображенных на рис. 1, 2, 3. Докажем, что граф Γ изоморфен графу на рис. 1. Через $A(v_0)$ обозначим множество всех вершин графа G, смежных вершине v_0. Очевидно $A(v_0)$ является независимым множеством графа G. Поэтому из любой вершины, принадлежащей $A(v_0)$, выходят в точности по 3 ребрам к $\bar{A}(v_0)$, что в общей сложности дает точно 12 ребер графа G между множествами $\bar{A}(v_0)$ и $A(v_0)$. С другой стороны, если граф Γ совпадет с некоторым из графов на рис. 2 или 3, тогда из вершин $\bar{A}(v_0)$ выходят меньше двенадцати ребер к вершинам $A(v_0)$. Таким образом мы показали, что граф Γ совпадает с графом на рис. 1.

На рис. 9 изображена часть графа G. Для того чтобы получить весь граф G, остается только обнаружить какие ребра графа G соединяют вершины $A(v_0)$ с вершинами из $\bar{A}(v_0)$.

Из любой вершины a_i, $1 \leqq i \leqq 4$, очевидно, выходят точно по одному ребру графа G к $A(v_0)$. Докажем, что никакие два из этих ребер не сходятся к одной и той же вершине. Действительно, в противном случае существует вершина w из $A(v_0)$, которая несмежна никакой из вершин a_i, $1 \leqq i \leqq 4$, и тогда через w должны проходить три ребра к остальным вершинам из $A(v_0)$. В таком случае $[b_1, b_2, w]$ или $[b_3, b_4, w]$ будет треугольником графа G, что является противоречием.

Итак, любая вершина из $A(v_0)$ смежна в точности одной вершине из a_i, $1 \leqq i \leqq 4$. Обозначим через c_i именно ту вершину из $A(v_0)$, которая смежна вершине a_i, $1 \leqq i \leqq 4$. Вершина c_1, кроме вершине a_1, смежна еще двум вершинам из $\overline{A}(v_0)$ Вершина c_1 несмежна вершине b_2, так как иначе $[a_1, b_2, c_1]$ будет треугольником. Если допустим, что c_1 несмежна и вершине b_1, тогда она обязательно будет смежна вершинам b_3 и b_4, и в графе G будет треугольник $[c_1, b_3, b_4]$. Следовательно, вершина c_1 смежна вершине b_1. Аналогично получаем, что $[c_2, b_2]$, $[c_3, b_3]$ и $[c_4, b_4]$ — ребра графа G.

Вершина c_1, кроме вершинам a_1 и b_1, смежна еще одной вершине из $\overline{A}(v_0)$. Это может быть только b_3 или b_4. Оба случая равнозначны, в чем можно убедится, замечая, что отображение, оставляющее на месте вершины a_1, a_2, b_1, b_2 и меняющее местами вершин b_3 и b_4, а также a_3 и a_4, является автоморфизмом подграфа Γ (см. рис. 9).

Будем считать, что вершина c_1 смежна вершине b_4. Тогда c_2 смежна вершине b_3. Вершина c_3 смежна некоторой из вершин b_1, b_2. Представляются две возможности:

I. Вершина c_3 смежна вершине b_2. Теперь c_4 смежна b_1, и получаем граф, изображенный на рис. 8.

II. Вершина c_3 смежна вершине b_1. Теперь c_4 смежна b_2. Полученный граф изоморфен графу на рис. 6. В самом деле, изоморфизмом между этими двумя графами является отображение:

$$\begin{pmatrix} v_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 1 & 9 & 6 & 2 & 13 & 4 & 11 & 3 & 12 & 10 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

3. О 13-вершинных графах без треугольников и минимальной степени вершин больше 3. В этом пункте продолжаем доказательство теоремы. Докажем следующее:

Предложение 2. *Пусть G — 13-вершинный граф без треугольников и степень любой вершины графа G больше 3, а $\pi(G; 5) \leqq 2$. При этих предположениях граф G изоморфен либо графу G_1 на рис. 6, либо графу G_2 на рис. 7.*

Прежде всего докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *Пусть G — 13-вершинный граф без треугольников, $d(v) \geqq 4$ для любой вершины v и $\pi(G; 5) \leqq 2$. При этих предположениях, если граф G не изоморфен графу G_1 на рис. 6, он имеет ровно две вершины v_1 и v_2, которые несмежны, $d(v_1) = d(v_2) = 5$, $A(v_1) \neq A(v_2)$, а все остальные вершины графа G имеют степень 4.*

Доказательство леммы 1. Для любой вершины v имеет место неравенство $d(v) \leqq 5$, так как $\pi(G; 5) \leqq 2$. Обязательно существуют вершины степени 5, потому что в противном случае с помощью предложения 1 заключим, что граф G изоморфен графу G_1. Число вершин нечетной степени должно быть четным, так что имеется хотя бы две вершины степени 5.

Докажем, что любые две вершины v_1 и v_2 степени 5 удовлетворяют неравенству $A(v_1) \neq A(v_2)$. Отсюда и из неравенства $\pi(G; 5) \leqq 2$ очевидно следует, что имеются ровно две вершины степени 5. Допустим, что $A(v_1) = A(v_2)$. Тогда $|\overline{A}(v_1) \cap \overline{A}(v_2)| = 6$. Согласно (2), вершины v_1 и v_2 входят одновременно хотя бы в два 5-вершинных независимых множества, отличных от $A(v_1)$, что противоречит неравенству $\pi(G; 5) \leqq 2$.

Чтобы завершить доказательство леммы, остается показать, что единственные две вершины степени 5 несмежны. Допустим, что это не так.

Тогда $\overline{A}(v_1) \cap \overline{A}(v_2)$ — 3-элементное множество; обозначим его элементы через v^1, v^2, v^3. Вершина v^i смежна хотя бы двум вершинам из $A(v_1)$, так как иначе она будет содержаться в 5-вершинном независимом множестве, что невозможно, потому что $A(v_1)$ и $A(v_2)$ — 5-вершинные независимые множества, $v^i \notin A(v_1)$, $v^i \notin A(v_2)$ и $\pi(G; 2) \leq 2$. Аналогично, вершина v^i смежна хотя бы двум вершинам из $A(v_2)$, и так как $d(v^i)=4$, то v^i смежна ровно двум вершинам из $A(v_1)$ и двум вершинам из $A(v_2)$, и эти 4 вершины, разумеется, отличны от v_1 и v_2. Ясно также, что множество $\{v^1, v^2, v^3\}$ — независимое. Через $A_1(v^i)$ обозначим пару вершин из $A(v_1)$, смежных вершине v^i, а через $A_2(v^i)$ — аналогичную пару из $A(v_2)$.

Если допустим, что все три множества $A_1(v^i)$ имеют общий элемент u, так как $d(u)=4$, вершина u не смежна вершинам из $A(v_2)$, отличных от v_1, и получается, что в G есть 5-вершинное независимое множество, отличное от $A(v_1)$ и $A(v_2)$, что невозможно.

Итак, можно считать, что в $A(v_1)$ нет вершины, принадлежащей одновременно всем трем множествам $A_1(v^i)$, $1 \leq i \leq 3$. Если допустим, что любые два из множеств $A_1(v^i)$ пересекаются, то их объединение будет иметь не более трех элементов, так что найдется вершина v из $A(v_1)$, которая не принадлежит ни одному из множеств $A_1(v^i)$, $1 \leq i \leq 3$. Эта вершина v, вместе с v^1, v^2, v^3 и v_2, составляет 5-вершинное независимое множество, отличное от $A(v_1)$ и $A(v_2)$.

Окончательно будем считать, что, например, $A_1(v^1) \cap A_1(v^2) = \varnothing$. Если допустим, что $A_2(v^1), \cap A_2(v^2) \neq \varnothing$ и возьмем вершину w из этого пересечения, то очевидно w не смежна ни одной вершине из множества $A_1(v^1) \cup A_1(v^2)$, $= A(v_1) \setminus v_2$ и, следовательно, вместе с вершинами этого объединения составляет 5-вершинное независимое множество, отличное от $A(v_1)$ и $A(v_2)$.

Итак, $A_1(v^1) \cap A_1(v^2) = \varnothing$ и $A_2(v^1) \cap A_2(v^2) = \varnothing$. Теперь вершина v^2, присоединенная к множеству $A_1(v^1) \cup A_2(v^1)$, дает 5-вершинное независимое множество, отличное от $A(v_1)$ и $A(v_2)$.

Итак, допустив, что v_1 и v_2 смежны, получаем противоречие. Доказательство леммы завершено.

Лемма 2. *Пусть G — 13-вершинный граф без треугольников, $\pi(G; 5) \leq 2$, $d(v_1)=d(v_2)=5$ и $d(v)=4$, $v \neq v_1$, v_2. Тогда $|A(v_1) \cap \overline{A}(v_2)| = 2$.*

Доказательство леммы 2. Согласно лемме 1, $|A(v_1) \cap A(v_2)| \leq 4$. С другой стороны, $|A(v_1) \cap A(v_2)| \geq 2$, так как иначе v_1 вместе с 4 несмежными ей вершинами из $A(v_2)$ составляют независимое 5-вершинное множество, отличное от $A(v_1)$ и $A(v_2)$. Итак, мы доказали, что $2 \leq |A(v_1) \cap A(v_1)| \leq 4$.

Допустим, что $|A(v_1) \cap A(v_2)| = 4$. Вершины v_1 и v_2 несмежны и, следовательно, в 5-вершинном множестве $\overline{A}(v_1) \cap \overline{A}(v_2)$ нет ни одного 3-вершинного независимого множества, потому что иначе получим 5-вершинное независимое множество, содержащее одновременно v_1 и v_2 и, значит, отличное от $A(v_1)$ и $A(v_2)$. Итак, множество $\overline{A}(v_1) \cap \overline{A}(v_2)$ не содержит треугольников и 3-вершинных независимых множеств графа G. Согласно (1), это множество порождает простой цикл длины 5. Следовательно, любая вершина из $\overline{A}(v_1) \cap \overline{A}(v_2)$ смежна ровно двум вершинам из множества $M = A(v_1) \cup A(v_2) \setminus \{v_1, v_2\}$. Таким образом число ребер между множествами $\overline{A}(v_1) \cap \overline{A}(v_2)$ и M должно быть 10. Так как любая вершина из $A(v_1) \cap A(v_2)$ не смежна другим вершинам из M, она смежна ровно двум вершинам из $\overline{A}(v_1) \cap \overline{A}(v_2)$. Таким образом между $A(v_1) \cap A(v_2)$ и $\overline{A}(v_1) \cap \overline{A}(v_2)$ имеются 8 ребер. Через u_1 и u_2 обозначим вершины множества $M \setminus (A(v_1) \cap A(v_2))$. Из доказанного выше следует, что между $\bar{A}(v_1) \cap \bar{A}(v_2)$ и $\{u_1, u_2\}$ имеются 2 ребра. Так как u_i несмежна вершинам из $A(v_1) \cap A(v_2)$, $i=1, 2$, оказывается, что хотя бы одна из вершин, u_1, u_2 имеет степень не больше 3. Полученное противоречие показывает что $|A(v_1) \cap A(v_2)| \leq 3$.

А теперь допустим, что $|A(v_1) \cap A(v_2)|=3$. Пусть $A(v_1)=\{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, $A(v_2)=\{v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$, а v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13} — остальные вершины. Так как кроме $A(v_1)$ и $A(v_2)$, нет других независимых 5-вершинных подмножеств, то любая из вершин v_3 и v_4 смежна вершинам v_8 и v_9. В множестве $A(v_1) \cap A(v_2)$ нет других пар смежных вершин. Поэтому из множества $A(v_1) \cup A(v_2)$ к множеству $\{v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}\}$ выходят ровно 10 ребер. Тогда подграф Γ, порожденный вершинами v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, имеет ровно три ребра. Действительно, если l — число ребер подграфа Γ, тогда $16=d(v_{10})+d(v_{11})+d(v_{12})+d(v_{13})=2l+10$, т. е. $l=3$. В множестве $\{v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}\}$ нет 3-вершинных независимых подмножеств (иначе вместе с v_1 и v_2 получим 5-вершинное независимое множество, отличное от $A(v_1)$ и $A(v_2)$). Сделанные рассуждения дают нам право заключить, что подграф Γ является простой цепью длины 3. Вот почему можно считать, что вершины v_{11} и v_{12} смежны, и из них выходят ровно по двум ребрам к множеству $A(v_1) \cup A(v_2)$.

Покажем, что вершины v_{11} и v_3 несмежны. Допустим противное, т. е. что v_{11} и v_3 смежны. В $A(v_1) \cup A(v_2)$ имеется еще одна вершина, смежная вершине v_{11}. Она не может быть ни v_8, ни v_9, так как иначе получим треугольник, в который кроме нее входят еще и v_3 и v_{11}. Ясно, что хотя бы две из вершин v_5, v_6, v_7 несмежны вершине v_{11}. Тогда эти две вершины вместе с v_8, v_9 и v_{11} составляют 5-вершинное независимое множество, отличное от $A(v_1)$ и $A(v_2)$, что является противоречием.

Итак, вершина v_{11} несмежна вершине v_3. Из-за симметрии ясно, что вершина v_{11} не смежна и вершинам v_4, v_8 и v_9. То же самое относится и к v_{12}, т. е. она не смежна вершинам v_3, v_4, v_8 и v_9.

Окончательно, любая из вершин v_{11}, v_{12} должна быть смежной ровно двум из вершин v_5, v_6, v_7, так что получится треугольник, а это является противоречием.

Лемма 2 доказана.

Доказательство предложения 2. Согласно леммам 1 и 2, если граф G неизоморфен графу G_1, тогда имеются вершины v_1 и v_2, для которых $d(v_1)=d(v_2)=5$, $|A(v_1) \cap A(v_2)|=2$ и $d(v)=4$ для любой вершины v, отличной от v_1 и v_2. Пусть $A(v_1)=\{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ и $A(v_2)=\{v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$, а v_{11}, v_{12}, v_{13} — остальные три вершины. Так как $\{v_1, v_2, v_{11}, v_{12}, v_{13}\}$ не является независимым 5-вершинным множеством, хотя бы две из вершин v_{11}, v_{12}, v_{13} смежны; допустим, что v_{12} и v_{13} смежны. Вершина v_{12} смежна хотя бы одной из вершин v_3, v_4, v_5 (иначе $\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_{12}\}$ — независимое множество). Без ограничения общности можно считать, что v_{12} смежна v_4. Аналогично, v_{12} смежна v_9, v_{13} смежна v_5 и v_{13} смежна v_8. Вершина v_{12}, кроме вершинам v_{13}, v_4 и v_9, смежна еще ровно одной вершине. Это не может быть вершина v_3, так как если v_{12} смежна v_3, она уже не может быть смежной вершинам v_6, v_7, v_8 и v_{10}, так что вместе с ними будет составлять 5-вершинное независимое множество. Аналогично $v_5, v_8, v_{10}, v_{11} \in \bar{A}(v_{12})$, $v_3, v_4, v_9, v_{10}, v_{11} \in \bar{A}(v_{13})$. Тогда любая из вершин v_{12} и v_{13} смежна ровно одной из вершин v_6, v_7 и так как v_{12} и v_{13} смежны, можно считать, что, например, v_{12} смежна v_7, а v_{13} смежна v_6.

Вершина v_4, кроме вершинам v_1 и v_{12}, смежна еще ровно двум вершинам. Если допустим, что вершина v_4 несмежна двум вершинам из v_8, v_9, v_{10}, тогда v_4 вместе с этими двумя вершинами и v_6 и v_7 составляет 5-вершинное независимое множество. Следовательно, v_4 смежна хотя бы двум и значит ровно двум из вершин v_8, v_9, v_{10}. Тем самым v_4 несмежна вершине v_{11}. Вершины v_4 и v_9 несмежны, потому что любая из них смежна вершине v_{12} Следовательно, v_4 смежна вершинам v_8 и v_{10}. Аналогично, v_5 смежна v_9 и v_{10}, но несмежна вершине v_{11}.

Для вершины v_{11} остается, что она смежна v_3, v_6, v_7 и v_{10}. Для вершины v_3 остается, что она смежна вершинам v_8 и v_9.

Итак, если граф G удовлетворяет условию предложения 2 и не изоморфен графу G_1, то он изоморфен графу G_2 на рис. 7. Этим предложение 2 доказано.

4. О 13-вершинных графах без треугольников и минимальной степени вершин меньше 4. В этом пункте завершается доказательство теоремы. Здесь докажем следующее

Предложение 3. *Пусть G — 13-вершинный граф без треугольников, $\pi(G;5)\leq 2$ и G имеет вершину v_0, для которой $d(v)\leq 3$. Тогда граф G изоморфен графу G_3, который получается из графа G_2 на рис. 7 удалением ребра $[v_1, v_3]$.*

Сначала докажем следующее вспомагательное утверждение:

Лемма 3. *При предположениях предложения 3 вершина v_0 содержится в единственном 5-вершинном независимом множестве и $d(v_0)=3$.*

Доказательтво леммы 3. Так как $d(v_0)\leq 3$, то $|\bar{A}(v_0)|\geq 9$ и согласно (5), в $\bar{A}(v_0)$ имеется 4-вершинное независимое множество графа G. Следовательно, вершина v_0 содержится в 5-вершинном независимом множестве графа G. Отметим, что $d(v_0)=3$. Действительно, если $d(v_0)<3$, тогда $|\bar{A}(v_0)|\geq 10$ и, согласно (7), вершина v_0 содержится хотя бы в пяти 5-вершинных независимых множествах, что противоречит неравенству $\pi(G;5)\leq 2$.

Итак, $d(v_0)=3$ и v_0 содержится хотя бы в одном 5-вершинном независимом множестве. Допустим, что v_0 содержится в двух 5-вершинных независимых множествах Δ_1 и Δ_2. Так как $\pi(G;5)\leq 2$, то v_0 в других 5-вершинных независимых множествах не содержится. Следовательно, для 9-вершинного графа Γ, порожденного множеством вершин $\bar{A}(v_0)$, имеет место равенство $\pi(\Gamma;4)=2$. Ясно, что Γ не содержит треугольников. Согласно (6), граф Γ изоморфен графу на рис. 5.

Через w обозначим единственную вершину графа Γ, для которой $d_\Gamma(w)=2$. Вершина w содержится в Δ_1 и Δ_2 (см. рис. 5).

Если $v\in A(v_0)$, тогда $d(v)\geq 4$. Действительно, если допустим, что $d(v)\leq 3$, согласно доказанному выше, вершина v содержится в 5-вершинном независимом множестве Δ. Так как $v\in A(v_0)$, то $v\notin\Delta_1$ и $v\notin\Delta_2$. Следовательно $\Delta\neq\Delta_1$ и $\Delta\neq\Delta_2$, что противоречит неравенству $\pi(G;5)\leq 2$.

Если $u\in\bar{A}(v_0)$, то $d(u)\leq 4$. Действительно, множество $A(u)$ — независимое и $v_0\notin A(u)$, так что $\Delta_1\neq A(u)$ и $\Delta_2\neq A(u)$. Если допустим, что $d(u)\geq 5$, то получим противоречие с неравенством $\pi(G;5)\leq 2$.

Так как $d(w)\leq 4$, w смежна двум вершинам из $\bar{A}(v_0)$ и $A(v_0)=3$, то в $A(v_0)$ найдется вершина v_1, которая несмежна вершине w. Вершина v_1 смежна вершине v_0, но несмежна остальным вершинам из $A(v_0)$, так как $A(v_0)$ — независимое множество. С другой стороны, $d(v_1)\geq 4$. Следовательно, в $\bar{A}(v_0)$ найдутся вершины u_1, u_2 и u_3, смежные вершине v_1. Ясно, что вершины u_1, u_2 и u_3 отличны от w. Из вершин u_i, $1\leq i\leq 3$, уже выходят по 4 ребрам.

Выше мы заметили, что $d(u_i) \leq 4$, $1 \leq i \leq 3$. Следовательно, вершины u_i, $1 \leq i \leq 3$, несмежны обоим вершинам из $A(v_0)$, отличным от v_1. Вместе с этими двумя вершинами u_1, u_2 и u_3 составляют независимое 5-вершинное множество Δ. Ясно, что $\Delta \neq \Delta_1$ и $\Delta \neq \Delta_2$. Это противоречит неравенству $\pi(G;\ 5) \leq 2$.

Итак, допущение, что вершина v_0 содержится в двух 5-вершинных независимых множествах, привело к противоречию. Лемма 3 доказана.

Доказательство предложения 3. Согласно лемме 3, $d(v_0)=3$ и v_0 содержится в единственном 5-вершинном независимом множестве Δ. Это означает, что для 9-вершинного подграфа, порожденного множеством вершин $\overline{A}(v_0)$, имеет место равенство $\pi(\Gamma;\ 4)=1$. Граф Γ не содержит треугольников и, согласно (5), он изоморфен графу на рис. 4.

Через w обозначим единственную вершину степени 4 графа Γ (см. рис. 4). Так как $\pi(G;\ 5) \leq 2$, то степень любой вершины графа G меньше 6. Следовательно, вершина w смежна не более одной вершине из $A(v_0)$. Докажем, что вершина w несмежна ни одной вершине из $A(v_0)$. Допустим, что это, не так, и обозначим через v_1 вершину из $A(v_0)$, смежную вершине w. Через v_2 и v_3 обозначим остальные две вершины из $A(v_0)$. Покажем, что либо $d(v_2) \geq 4$, либо $d(v_3) \geq 4$. Допустим противное. Тогда $|\overline{A}(v_2) \cap \overline{A}(v_3)| \geq 6$, и так как v_2 и v_3 несмежны, то, согласно (2), они содержатся одновременно в двух независимых 5-вершинных множествах Δ_1 и Δ_2. Так как $v_2 \notin \Delta$ и $v_3 \notin \Delta$, то $\Delta \neq \Delta_1$ и $\Delta \neq \Delta_2$, что является противоречием.

Итак, мы можем предположить, что $d(v_2) \geq 4$. Пусть u_1, u_2 и u_3 — вершины из $\overline{A}(v_0)$, которые смежны v_2. Ясно, что $u_i \neq w$. Для вершин u_i верно $d(u_i) \leq 4$, $1 \leq i \leq 3$. Действительно, $A(u_i)$ и $A(w)$ — независимые множества, отличные между собой и отличные от Δ, так как $v_2 \in A(u_i)$, $v_2 \notin \Delta$ и $v_2 \notin A(w)$, $v_1 \notin \Delta$, $v_1 \in A(w)$. Следовательно, если допустим, что для некоторого i, $1 \leq i \leq 3$, $d(u_i) \geq 5$, тогда $\pi(G;\ 5) \geq 3$, что является противоречием.

Итак, $d(u_i) \leq 4$, $i=1,\ 2,\ 3$. Вершины u_i, $1 \leq i \leq 3$ имеют в графе Γ степени $d_\Gamma(u_i)=3$ и, кроме того, смежны вершине v_2. Следовательно, любая из вершин u_i, $1 \leq i \leq 3$, несмежна вершинам v_1 и v_3. Но тогда $\{u_1, u_2, u_3, v_1, v_3\}$ — независимое множество. Это множество отлично от Δ, потому что $\Delta \cap A(v_0)=\varnothing$. Оно отлично и от $A(w)$, так как $v_3 \notin A(w)$. Следовательно, $\pi(G;\ 5) \geq 3$. Полученное противоречие показывает, что вершина w несмежна вершинам из $A(v_0)$.

Теперь к графу G добавим новое ребро $[v_0, w]$. Новополученный 13-вершинный граф G' не имеет треугольников, так как w несмежна вершинам из $A(v_0)$. Ясно, что $\pi(G';\ 5) \leq 2$. Если в графе G' есть вершины степени меньше 4, мы повторяем эту операцию. В конечном счете получим граф $\overline{G}$, который имеет минимальную степень вершин больше 3, причем $\pi(\overline{G};\ 5) \leq 2$. Согласно предложению 2, граф $\overline{G}$ изоморфен графу G_2 на рис. 7.

Итак, граф G получается из графа G_2 посредством удаления некоторых ребер. Непосредственной проверкой устанавливается, что удаление произвольного ребра графа G_2, отличного от $[v_1, v_3]$ и $[v_2], v_{10}]$, приводит к графу $\widetilde{G}$, для которого $\pi(\widetilde{G};\ 5) > 2$. Подграфы $G_3 = G - [v_1, v_3]$ и $G - [v_2, v_{10}]$ изоморфны, и новое удаление ребра приводит к подграфу G_3', для которого $\pi(G_3';\ 5) > 2$.

Этим мы доказали, что граф G изоморфен графу G_3. Предложение 3 доказано.

Теорема тривиально вытекает из следствия к предложению 1 и предложений 2 и 3.

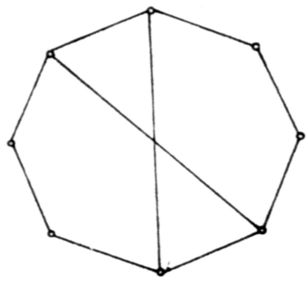

Рис. 1

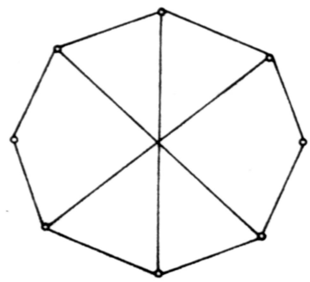

Рис. 2

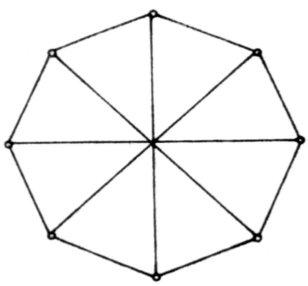

Рис. 3

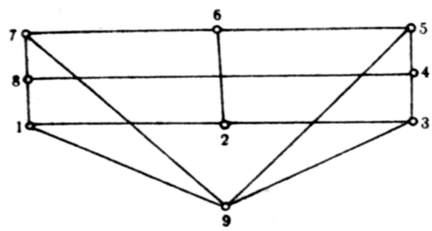

Рис. 4

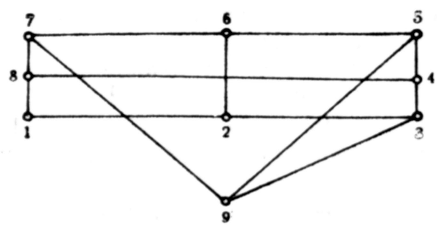

Рис. 5

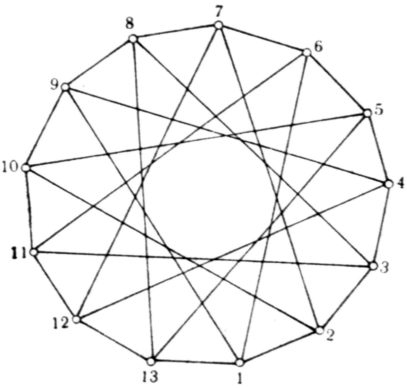

Рис. 6

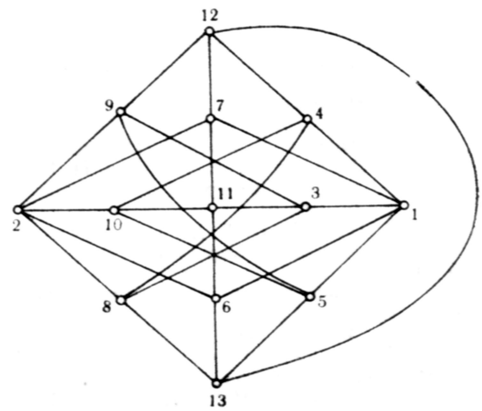

Рис. 7

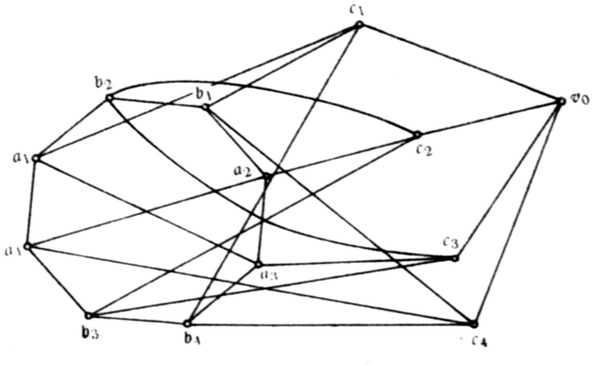

Рис. 8

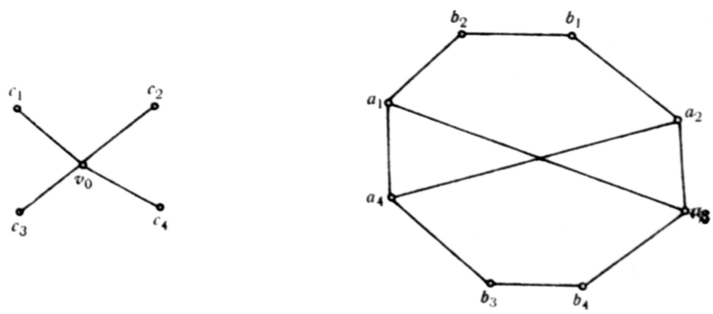

Рис. 9

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Хаджииванов, Н. Д. Ненов. Усиление одной теоремы Грийнвуда и Глиссона о раскрасках ребер полного графа с девятью вершинами. *Доклады БАН*, **31**, 1978, 631—633.
2. Н. Д. Ненов, Н. Г. Хаджииванов. О некоторых двуцветных раскрасках ребер полного графа с девятью вершинами. *Годишник Софийского университета, Факультет мат. и мех.*, **71** (в печати).
3. Н. Д. Ненов, И. Ж. Пашов, Н. Г. Хаджииванов. О некоторых экстремальных раскрасках ребер полного графа с 13 вершинами. *Год. ВПИ Шумен*, 1981—82 (в печати).
4. Н. Д. Ненов, Н. Г. Хаджииванов. Об одном экстремальном свойстве графа Петерсена. *Год. Соф. унив.. Факультет мат. и мех.* (в печати).
5. Н. Д. Ненов, Н. Г. Хаджииванов. О числе 5-вершинных дискретных подграфов графа без треугольников. *Доклады БАН*, **35**, 1982.
6. A. W. Goodman. On sets of acquaintances and strangers at any party. *Amer. Math. Monthly*, **66**, 1959, 778—783.
7. G. Kery. Ramsey egy grafelmeleti tetelrol. *Mat. Lapok*, **15**, 1964, 204—224.
8. R. E. Greenwood, A. M. Gleason. Combinatorial relations and chromatic graphs. *Canad. J. Math.*, **7**, 1955, 1—7.

Единый центр математики и механики
София 1090 П. Я. 373

Поступила 31. 5. 1982