Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

ЭММАНУИЛ М. ДИМИТРОВ, ВЛАДИМИР Л. ЧАКАЛОВ

В настоящей работе рассматриваются конечномерные пространства X, элементы которых являются непрерывными функциями вида $x: T \to E$, где T — компактное пространство, а E — нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_E$. В X вводится норма $\|x\| = \sin_{t\in T} \|x(t)\|_E$. Решается следующая экстремальная задача: задан линейный функционал l $(l \neq 0)$ на X. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция $x' \in X$ $(x' \neq)$ была экстремальной для l, т. е. чтобы $l(x') = \|l\| \cdot \|x'\|$. Эта задача решается для действительных и комплексных пространств E и X и обобщает одну теорему Е. Ремеза [3], [4]. Решение использует обычный аппарат выпуклых тел в конечномерных пространствах. На этой основе даются приложения, относящиеся к одной линейной задаче оптимального управления.

1. Здесь мы дадим некоторые известные факты, связанные с элементарной теорией выпуклых тел.

Сначала напомним, что вектор $l \in R^n$ неотделим от множества $M \subset R^n$, если неравенство $(a, x) \geqq \beta$, выполняющееся для некоторых $a \in R^n$, $\beta = R^1$ и всех $x \in M$, всегда влечет за собой неравенство $(a, l) \geqq \beta$ (здесь (p, q) — скалярное произведение векторов p, q).

Т е о р е м а (Г. М и н к о в с к и й). *Если $M \subset R^n$ — выпуклое замкнутое множество, а вектор $l \in R^n$ неотделим от M, то $l \in M$.*

Дальше мы пользуемся следующим критерием неотделимости.

(К) *Если $M \subset R^n$ — симметрическое множество относительно начала координат, то вектор $l \in R^n$ неотделим от M тогда и только тогда, когда из неравенства $|(a, x)| \leqq 1$, которое выполняется для некоторого $a \in R^n$ и любого $x \in M$, всегда следует неравенство $|(a, l)| \leqq 1$.*

Л е м м а (Е. Щ е й н и ц [1]). *Пусть дана линейная комбинация*

$$y = \lambda_1 y^1 + \ldots + \lambda_k y^k \quad (\lambda_i > 0,\ i = 1, \ldots, k) \tag{1}$$

линейно зависимых векторов $y^1, \ldots, y^k$. Тогда существует представление y вида $y = \mu_1 y^1 + \ldots + \mu_k y^k$, где $\mu_i \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, k)$, $\sum_{i=1}^{k} \mu_i \leqq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$, причем хотя бы один из коэффициентов μ_i равняется нулю.

З а м е ч а н и е. Лемма Е. Щейница утверждает, что в случае линейной зависимости векторов $y^1, \ldots, y^k$, вектор $y \neq 0$ можно представить в виде линейной комбинации с положительными коэффициентами не более чем $k-1$ из векторов $y^1, \ldots, y^k$. Применяя несколько раз эту лемму, получим, наконец, представление y вида (1), правая часть которого содержит r $(1 \leqq r$ $r \leqq k-1)$, линейно независимых из векторов $y^1, \ldots, y^k$. Притом сумма коэффициентов этого представления не больше, чем сумма коэффициентов исходного представления.

Основываясь на перечисленные выше факты, мы уточним утверждение одной известной теоремы.

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 10, 1984, с. 384—396.

Пусть Q — компактное топологическое пространство и $g=(g_1,\ldots,g_n)$ $Q\to R^n$ — непрерывная ненулевая векторная функция, значения которой образуют симметрическое множество относительно начала координат пространства R^n (или, короче, симметрическое множество). Обозначим через $C\subset R^n$ множество, составленное из нулевого вектора R^n и всех векторов $c\in R^n$, допускающих представление вида

$$(2)\qquad c=\mu_1 g(q_1)+\ldots+\mu_r g(q_r)\,(\mu_i>0,\ q_i\in Q,\ i=1,\ldots,r,\ \sum_{i=1}^{r}\mu_i\leqq 1),$$

где $g(q_1),\ldots,g(q_r)$ — линейно независимые векторы $g(Q)$. Очевидно, что $r\leqq n$, а C — симметрическое множество. Из компактности Q, непрерывности g и ограниченности коэффициентов μ_i сразу следует компактность C.

Покажем, что C — выпуклое множество. Пусть $c'=\mu_1' g(q_1')+\ldots+\mu_p' g(q_p')$ и $c''=\mu_1'' g(q_1'')+\ldots+\mu_l'' g(q_l'')$ — два вектора C и пусть $0<\alpha<1$. Тогда для вектора

$$c=\alpha c'+(1-\alpha)c''=\alpha\mu_1' g(q_1')+\ldots+\alpha\mu_p' g(q_p')+(1-\alpha)\mu_1'' g(q_1'')+\ldots+(1-\alpha)\mu_l'' g(q_l'')$$

будем иметь $\alpha\mu_1'+\ldots+\alpha\mu_p'+(1-\alpha)\mu_l''+\ldots+(1-\alpha)\mu_l''\leqq 1$. Если $c=0$, то очевидно $c\in C$. Если $c\neq 0$, то пренебрегая в правой части представления c, всеми членами с нулевыми коэффициентами и изменяя означения, можно написать, что

$$(3)\qquad c=\lambda_1 g(q_1)+\ldots+\lambda_k g(q_k)\quad(\lambda_i>0,\ i=1,\ldots,k,\ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\leqq 1).$$

Если векторы $g(q_1),\ldots,g(q_k)$ линейно зависимые, то, применяя к (3) сделанное выше замечание, получаем, что c имеет представление вида

$$c=\mu_1 g(q_{i1})+\ldots+\mu_r g(q_{ir})\quad(\mu_i>0,\ q_{il}\in Q,\ l=1,\ldots,r,\ \sum_{i=1}^{r}\mu_i\leqq 1),$$

где $g(q_{i1}),\ldots,g(q_{ir})$ — r линейно независимые векторы из векторов $g(q_1),\ldots,g_k(q_k)$, т. е. $c\in C$. Итак, C — выпуклое множество.

Пользуясь критерием (К), легко видеть, что вектор $l\in R^n$ неотделим от $g(Q)$ тогда и только тогда, когда он неотделим от C. На самом деле, очевидно, что неравенство $|(a,g(q))|\leqq 1$ выполняется для некоторого $a\in R^n$ и любого $q\in Q$ тогда и только тогда, когда имеет место неравенство $|(a,c)|\leqq 1$ для любого $c\in C$. Но тогда из теоремы Минковского следует, что любой неотделимый от $g(Q)$ вектор l принадлежит множеству C. Отметим еще тот очевидный факт, что векторы $g^1=(g_1^1,\ldots,g_n^1),\ldots,g^r=(g_1^r,\ldots,g_n^r)$ линейно независимы тогда и только тогда, когда матрица

$$\begin{Vmatrix} g_1^1 & g_1^2 & \cdots & g_1^r \\ g_2^1 & g_2^2 & \cdots & g_2^r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_n^1 & g_n^2 & \cdots & g_n^r \end{Vmatrix}$$

имеет ранг r.

Из сказанного выше следует, что имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть Q — компактное топологическое пространство и пусть $g=(g_1, \dots, g_n): Q \to R^n$ — непрерывная векторная функция со значениями, симметрично расположенными относительно начала R^n. Тогда каждый ненулевой, неотделимый от $g(Q)$ вектор $l \in R^n$ имеет представление*

$$l=\mu_1 g(q_1)+ \dots +\mu_r g(q_r) \ (\mu_i>0,\ q_i \in Q,\ i=1, \dots, r,\ \sum_{i=1}^{r} \mu_i \leq 1,\ r \leq n), \tag{4}$$

причем матрица

$$\begin{Vmatrix} g_1(q_1) & g_1(q_2) & \dots & g_1(q_r) \\ g_2(q_1) & g_2(q_2) & \dots & g_2(q_r) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n(q_1) & g_n(q_2) & \dots & g_n(q_2) \end{Vmatrix} \tag{5}$$

имеет ранг r.

Замечание. Теорема 1 уточняет хорошо известный факт, что любой неотделимый от множества $g(Q)$ вектор допускает представление (4), где $r \leq n$. Уточнение состоит в том, что среди всех представлений этого вида имеются и такие, для которых векторы $g(q_1), \dots, g(q_r)$ — линейно независимые, т. е. матрица (5) имеет ранг r.

2. Ниже мы дадим одно следствие теоремы 1. Предварительно введем некоторые обозначения и предположения.

Всюду дальше через T будем обозначать компактное топологическое пространство, через E — нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_E$, а через X — n-мерное линейное пространство непрерывных функций $x: T \to E$ с нормой $\|x\|=\sup_{t\in T} \|x(t)\|_E$. Соответствующие сопряженные пространства обозначим через E^* и X^*. Наконец, через S будем обозначать единичный шэр пространства, E^*, т. е. $S=\{L \in E^*: \|L\| \leq 1\}$. Притом будем предполагать, что S наделен слабой* топологией $\sigma(E^*, E)$, относительно которой S — компактное множество.

В этом пункте все пространства рассматриваются над полем действительных чисел, а $x_1, \dots, x_n$ означает какой-нибудь базис пространства X.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *При введенных выше обозначениях для любого $l \in X^*$ ($l \neq 0$) существуют элементы $t_i \in T$, $L_i \in S$ и числа $\mu_i>0$ ($i=1, \dots, r; r \leq n$) так, что:*

а) *для любого $x \in X$ имеет место представление*

$$l(x)=\mu_1 L_1(x(t_1))+ \dots +\mu_r L_r(x(t_r)) \ \Big(\sum_{i=1}^{r} \mu_i=\sup_{\|x\|=1} |l(x)|=\|l\|\Big); \tag{6}$$

б) *ранг матрицы*

$$\begin{Vmatrix} L_1(x_1(t_1)) & L_2(x_1(t_2)) & \dots & L_r(x_1(t_r)) \\ L_1(x_2(t_1)) & L_2(x_2(t_2)) & \dots & L_r(x_2(t_r)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_1(x_n(t_1)) & L_2(x_n(t_2)) & \dots & L_r(x_n(t_r)) \end{Vmatrix}$$

равен r;

в) *если* $x' \in X$ $(x' \neq 0)$ — *экстремальная функция по отношении функционала* l, *т. е.* $l(x') = \| l \| \cdot \| x' \|$ (Существование x' следует из конечномерности X), *то*

$$L_i(x'(t_i)) = \| x'(t_i) \|_E = \sup_{t \in T} \| x'(t) \|_E = \| x' \|.$$

Доказательство. Для доказательства нам понадобятся некоторые известные факты. Отметим сначала, что

$$(7) \qquad \| x \| = \sup_{L \in S, t \in T} L(x(t)).$$

Чтобы доказать это, достаточно использовать хорошо известный факт, что для любого $a \in E$

$$(8) \qquad \sup_{L \in S} L(a) = \| a \|_E,$$

и заметить, что

$$\sup_{L \in S, t \in T} L(x(t)) = \sup_{t \in T} [\sup_{L \in S} L(x(t))] = \sup_{t \in T} \| x(t) \|_E = \| x \|.$$

Нетрудно показать также, что для фиксированного $x \in X$ функция φ_x, заданная для любого $L \in S$ и $t \in T$ равенством $\varphi_x(L, t) = L(x(t))$, непрерывна в $S \times T$. Действительно, если последовательность $\{(L_\alpha; t_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ (здесь A — направленность, а $(L_\alpha; t_\alpha) \in S \times T$) сходится к элементу $(L_0; t_0) \in S \times T$, то

$$| \varphi_x(L_\alpha, t_\alpha) - \varphi_x(L_0, t_0) | = | L_\alpha(x(t_\alpha)) - L_0(x(t_0)) | \leqq | L_\alpha(x(t_\alpha)) - L_\alpha(x(t_0)) |$$
$$+ | L_\alpha(x(t_0)) - L_0(x(t_0)) | \leqq \| L_\alpha \| \cdot \| x(t_\alpha) - x(t_0) \|_E + | L_\alpha(x(t_0)) - L_0(x(t_0)) |.$$

Но $\lim_\alpha \| x(t_\alpha) - x(t_0) \|_E = 0$, $\lim_\alpha L_\alpha(x(t_0)) = L_0(x(t_0))$ и $\| L_\alpha \| \leqq 1$, следовательно, $\lim_\alpha \varphi_x(L_\alpha, t_\alpha) = \varphi_x(L_0, t_0)$.

После этих замечаний перейдем к доказательству теоремы. Положим $Q = S \times T$. Очевидно, что Q — компактное пространство относительно топологии в $S \times T$. Положим дальше $g(q) = g(L, t) = (L(x_1(t)), \ldots, L(x_n(t)))$. Согласно доказанному выше, g — непрерывная функция на Q. Так как S — симметрическое множество, то же самое свойство имеет и $g(Q)$.

Пусть $l \in X^*$ и $l \neq 0$. Через $\tilde{l}$ обозначим функционал $\frac{l}{\| l \|}$, а также и вектор $(\tilde{l}(x_1), \ldots, \tilde{l}(x_n))$. Очевидно, если $a = (a_1, \ldots, a_n) \in R^n$, то $(a, \tilde{l}) = a_1 \tilde{l}(x_1) + \ldots + a_n \tilde{l}(x_n) = \tilde{l}(x)$, где $x = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$. Ясно, что если

$$| (a, g(q)) | = | a_1 L(x_1(t)) + \ldots + a_n L(x_n(t)) | = | L(x(t)) | \leqq 1,$$

для любого $q = (L; t) \in Q$, то из за (7) будем иметь

$$| (a, \tilde{l}) | = | \tilde{l}(x) | \leqq \| x \| = \sup_{L \in S, t \in T} L(x(t)) \leqq 1.$$

Отсюда, имея в виду критерий (К), заключаем, что вектор $\tilde{l}$ неотделим от $g(Q)$. Так как Q, g и $\tilde{l}$ удовлетворяют условиям теоремы 1, то $\tilde{l}$ допускает представление (4) с выполнением условия (5). В нашем случае (5) совпадает с условием б). Дадим представлению (4) следующий вид:

$$(9) \qquad \tilde{l} = \nu_1 g(q_1) + \ldots + \nu_r g(q_r) \quad \left(\sum_{i=1}^{r} \nu_i \leqq 1, \ \nu_i > 0, \ i = 1, \ldots, r \right),$$

где $g(q_i)=(L_1(x_1(t_i))\ldots, L_i(x_n(t_i)))$, $i=1,\ldots,r$. Умножая скалярно (9) на $a=(a_1,\ldots,a_n)\in R^n$, получим равенство

$$(10)\qquad \tilde{l}(x)=\nu_1 L_1(x(t_1))+\ldots+\nu_r L_r(x(t_r))\ \left(\sum_{i=1}^{r}\nu_i\leqq 1,\ \nu_i>0,\ i=1,\ldots,r\right),$$

выполняющееся для любого $x=a_1x_1+\ldots+a_nx_n\in X$. Выбирая $x'\in X\ (x'\neq 0)$, так чтобы имело место равенство $\|x'\|=\tilde{l}(x')$, получим

$$\|x'\|=\tilde{l}(x')=\nu_1 L_1(x'(t_1))+\ldots+\nu_r L_r(x'(t_r))\leqq(\nu_1+\ldots+\nu_r)\sup_{L\in S,t\in T}L(x'(t))$$
$$=(\nu_1+\ldots+\nu_r)\|x'\|,$$

откуда следует неравенство $\sum_{i=1}^{r}\nu_i\geqq 1$, что вместе с неравенством $\sum_{i=1}^{r}\nu_i\leqq 1$ дает $\sum_{i=1}^{r}\nu_i=1$. Имея в виду, что $\tilde{l}(x)=\frac{l(x)}{\|l\|}$ и полагая $\mu_i=\nu_i\|l\|\ (i=1,\ldots,r)$, получим условие а). Доказательство в) проводим как в [2, стр. 474]. Действительно, если $x'\in X$ — экстремальный элемент относительно l, то имеют место соотношения

$$\|l\|\cdot\|x'\|=l(x')=\mu_1 L_1(x'(t_1))+\ldots+\mu_r L_2(x'(t_r))=|\mu_1 L_1(x'(t_1))+\ldots+\mu_r L_r(x'(t_r))|\leqq\mu_1|L_1(x'(t_1))|+\ldots+\mu_r|L_r(x'(t_r))|\leqq\mu_1\|x'(t_1)\|_E+\ldots+\mu_r\|x'(t_r)\|_E$$
$$\leqq(\mu_1+\ldots+\mu_r)\sup_{t\in T}\|x'(t)\|_E=\|l\|\cdot\|x'\|.$$

Из этих соотношений видно, что неравенства переходят в равенства, а это возможно тогда и только тогда, когда выполняются утверждения в). Этим завершается доказательство теоремы 2.

Замечание. Теорема 2 уточняет хорошо известную теорему [2, стр. 473, теорема 4.2]. Действительно, мы получим указанную теорему, если в теореме 2 положим $E=R^1$ и выключим условие б). Теорему 2 можно доказать (без условия б)), следуя изложению книги И. Зингера [5, гл. II, стр. 166—170 и 191—201], притом не только для действительных, но и для комплексных пространств E и X (что мы сделаем ниже). Как нам кажется‘ однако, изложенное нами доказательство значительно проще.

Здесь мы дадим в качестве следствия теоремы 2 решение экстремальной задачи, упомянутой в самом начале этой работы.

Теорема 3. *При введенных выше обозначениях, для того чтобы функция $x'\in X(x'\neq 0)$ была экстремальной относительно $l\in X^*\ (l\neq 0)$, т. е. $l(x')=\|l\|\cdot\|x'\|$, необходимо и достаточно, чтобы среди точек $t\in T$, в которых $\|x'(t)\|_E$ принимает наибольшее значение $\|x'\|$, существовали точки $t_i\in T$ и соответствующие им $L_i\in S\ (i=1,\ldots,r;r\leqq n)$ так, что:*

(*i*) *имеют место равенства* $L_i(x'(t_i))=\|x'(t_i)\|_E=\|x'\|\ (i=1,\ldots,r)$;

(*ii*) *ранг матриц*

$$\begin{pmatrix} L_1(x_1(t_1)) & L_2(x_1(t_2)) & \ldots & L_r(x_1(t_r))\\ L_1(x_2(t_1)) & L_2(x_2(t_2)) & \ldots & L_r(x_2(t_r))\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ L_1(x_n(t_1)) & L_2(x_n(t_2)) & \ldots & L_r(x_n(t_r)) \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} L_1(x_1(t_1))\,L_2(x_1(t_2)) & \ldots & L_r(x_1(t_r))\,l(x_1) \\ L_1(x_2(t_1))\,L_2(x_2(t_2)) & \ldots & L_r(x_2(t_r))\,l(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ L_1(x_n(t_1))\,L_2(x_n(t_2)) & \ldots & L_r(x_n(t_r))\,l(x_n) \end{vmatrix}$$

равен r;

(iii) *если определитель*

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1(x_{k_1}(t_1)) & L_2(x_{k_1}(t_2)) & \ldots & L_2(x_{k_1}(t_r)) \\ L_1(x_{k_2}(t_1)) & L_2(x_{k_2}(t_2)) & \ldots & L_r(x_{k_2}(t_r)) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ L_1(x_{k_r}(t_1)) & L_2(x_{k_r}(t_2)) & \ldots & L_r(x_{k_r}(t_r)) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то определители Δ_i $(i=1,\ldots,r)$, *получающиеся из* Δ *заменой элементов* i*-того столбца* Δ *элементами* $l(x_{k_1}), l(x_{k_2}),\ldots, l(x_{k_r})$, *тоже отличны от нуля и имеют знак* Δ.

Доказательство. Пусть $x'\in X$ $(x'\neq 0)$ — экстремальная функция для l. Из точки в) теоремы 2 следует существование $t_i\in T$ и $L_i\in S$ $(i=1,\ldots,r)$, для которых $L_i(x'(t_i))=\|x'(t_i)\|_E\|X'\|$, что доказывает ($i$). Из а) и б) той же теоремы видно, что матрицы (ii) имеют ранг r. Условие (iii) следует из факта, что в (6) имеем $\mu_i=\frac{\Delta_i}{\Delta}>0$ $(i=1,\ldots,r)$.

Пусть теперь $x'\in X$ $(x'\neq 0)$ — функция, удовлетворяющая условиям теоремы. Покажем, что $l(x')=\|l\|.\|x'\|$. Действительно, условие (ii) гарантирует существование решения системы

$$l(x_k)=\mu_1 L_1(x_k(t_1))+\ldots+\mu_r L_r(x_k(t_r)) \quad (k=1,\ldots n) \tag{11}$$

относительно $\mu_1,\ldots,\mu_r$, а из (iii) следует, что $\mu_i>0$ $(i=1,\ldots,r)$. Обозначим через $x''\in X$ экстремальную функцию для l. Ввиду очевидных соотношений

$$\|l\|.\|x''\|=l(x'')=\mu_1 L_1(x''(t_1))+\ldots+\mu_r L_r(x''(t_r))\leq(\mu_1+\ldots+\mu_r)\|x''\|$$

имеет место неравенство $\mu_i+\ldots+\mu_r\geq\|l\|$. С другой стороны, используя последнее неравенство и равенства $L_i(x'(t_i))=\|x'\|$ $(i=1,\ldots,r)$, имеем

$$\|l\|\;\|x'\|\geq L(x'(t_1))+\ldots+\mu_r L_r(x'(t_r))=(\mu_1+\ldots+\mu_r)\|x'\|\geq\|l\|.\|x'\|,$$

откуда получим, что $\mu_1+\ldots+\mu_r=\|l\|$ и $\|l\|.\|x'\|=l(x')$, т. е. что x' — экстремальная функция для l, чем завершается доказательство теоремы.

Ниже мы проиллюстрируем на двух примерах теоремы 2 и 3. Покажем сначала, что теорема Е. Ремеза [3], [4] является частным случаем теоремы 3. Чтобы доказать это, рассмотрим частный случай, когда $E=R^1$ и $\|a\|_E=|a|$ для $a\in E$. Тогда каждому $L\in E^*$ соответствует единственное действительное число λ так, что $L(a)=\lambda a$ для $a\in E$. Это соответствие является изометрическим изоморфизмом, так что отождествляя каждый функционал L с соответствующим числом λ, можно считать, что $E^*=R^1$. Единичная сфера E^* тогда состоит из чисел -1 и 1, а X совпадает с конечномерным пространством непрерывных действительных функций переменной $t \in T$ и $\|x\| = \sup_{t \in T} |x(t)|$.

Здесь для удобства будем считать, что размерность X равна $n+1$. Обозначим через $x_1, \ldots, x_n, \Omega$ базис X. Рассмотрим задачу о наилучшем равномерном приближении Ω многочленами вида $x = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$. Известно, что $x' = a_1' x_1 + \ldots + a_n' x_n$ есть многочлен наилучшего равномерного приближения Ω тогда и только тогда, когда функция $x'' = \Omega - x'$ является экстремальной для функционала l, определенного на X равенствами $l(x_1) = \ldots = l(x_n) = 0$, $l(\Omega) = 1$. Согласно теореме 3 и сказанному выше, функция $x'' = \Omega - x'$ является экстремальной для l в том и только в том случае, когда среди точек $t \in T$, в которых $|x''(t)|$ принимает наибольшее значение $\|x''\| = \sup_{t \in T} |x''(t)|$, существуют такие точки $t_1, \ldots, t_r$ $(1 \leq r \leq n+1)$ и соответствующие им числа $\varepsilon_i = \pm 1$ $(i = 1, \ldots, r)$, что:

(*) $$\varepsilon_i x''(t_i) = |x''(t_i)| = \|x''\| \quad (i = 1, \ldots, r);$$

(**) ранг матриц

$$\begin{pmatrix} x_1(t_1) & x_1(t_2) & \ldots & x_1(t_r) \\ x_2(t_1) & x_2(t_2) & \ldots & x_2(t_r) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n(t_1) & x_n(t_2) & \ldots & x_n(t_r) \\ \Omega(t_1) & \Omega(t_2) & \ldots & \Omega(t_r) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1(t_1) & x_1(t_2) & \ldots & x_1(t_r) & 0 \\ x_2(t_1) & x_2(t_2) & \ldots & x_2(t_r) & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n(t_1) & x_n(t_2) & \ldots & x_n(t_r) & 0 \\ \Omega(t_1) & \Omega(t_2) & \ldots & \Omega(t_r) & 1 \end{pmatrix}$$

равен r; {Отметим, что в матрицах мы заменили $\varepsilon_i x_k(t_1)$ на $x_k(t_i)$ $(k = 1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, r)$, что, впрочем, не меняет их ранг. Отметим еще, что каждый ненулевой определитель порядка r первой матрицы содержит последнюю строку $\Omega(t_1)\, \Omega(t_2) \ldots \Omega(t_r)$, так как в противном случае вторая матрица имела бы ранг $r+1$.}

$({}_*{}^*{}_*)$ если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 x_{k_1}(t_1) & \varepsilon_2 x_{k_1}(t_2) & \ldots & \varepsilon_r x_{k_1}(t_r) \\ \varepsilon_1 x_{k_2}(t_1) & \varepsilon_2 x_{k_2}(t_2) & \ldots & \varepsilon_r x_{k_2}(t_r) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_1 x_{k_{r-1}}(t_1) & \varepsilon_2 x_{k_{r-1}}(t_2) & \ldots & \varepsilon_r x_{k_{r-1}}(t_r) \\ \varepsilon_1 \Omega(t_1) & \varepsilon_2 \Omega(t_2) & \ldots & \varepsilon_r \Omega(t_r) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то определители Δ_i $(i = 1, \ldots, r)$, получающиеся от Δ заменой i-того столбца Δ элементами $0, 0, \ldots, 0, 1$, тоже отличны от нуля и имеют знак Δ.

Легко проверить, что условия (*), (**) и $({}_*{}^*{}_*)$ эквивалентны условиям теоремы Е. Ремеза [3], [4].

Следующий пример является непосредственным применением теоремы 2 для решения одной задачи линейного оптимального управления.

Пусть $C_E(T)$ — пространство всех непрерывных функций $x: T \to E$ с нормой $\|x\| = \sup_{t \in T} \|x(t)\|_E$. Предположим, что каждый линейный функционал $l\,(l \in C_E^*(T))$ является управлением, а его норма — минимизируемым функционалом. Тогда, как известно, задаче линейного оптимального управления можно дать следующую форму.

(0) Среди всех функционалов (управлений) $l \in C_E^*(T)$ найти функционал l', принимающий для заданных функций $x_i \in C_E(T)$ $(i=1, \ldots, n)$ наперед заданные значения $l'(x_1) = c_1, \ldots, l'(x_n) = c_n$ и обладающий минимальной нормой.

Обозначим через C_n подпространство $C_E(T)$, порожденное $x_1, \ldots, x_n$, а через $l \neq 0$ элемент C_n^*, определенный равенствами $l(x_i) = c_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда $\|l\| = \sup_{x = C_n,\ \|x\| = 1} l(x)$. Из теоремы 2 следует, что l допускает представление (6). При помощи этого представления продолжим l, полагая для любого $x \in C_E(T)$

$$l'(x) = \mu_1 L_1(x(t_1)) + \ldots \mu_r L_r(x(t_r)) \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_i = \|l\|\right). \tag{12}$$

Так как $l'(x) = l(x)$ для $x \in C_n$, то $l'(x_i) = c_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Очевидно также, что $\|l'\| = \|l\|$. Действительно, с одной стороны $\|l'\| \sup_{\substack{x \in C_E(T) \\ \|x\| = 1}} l'(x) \geq \sup_{\substack{x \in C_n \\ \|x\| = 1}} l'(x)$ $= \|l\|$, а, с другой стороны, для $x \in C_E(T)$ имеют место соотношения

$$|l'(x)| \leq \mu_1 |L_1(x(t_1))| + \ldots + \mu_r |L_r(x(t_r))| \leq (\mu_1 + \ldots + \mu_r) \sup_{L \in S, t \in T} L(x(t)) = \|l\| . \|x\|.$$

Этим мы доказали, что среди управлений пространства $C_E^*(T)$, для которых $l(x_i) = c_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, l' обладает минимальной нормой. Итак, среди всех решений задачи (0) имеются и решения вида (12), которые называют импульсными. Для этих решений, конечно, имеют место остальные утверждения теоремы 2, что в некоторых случаях дает возможность найти их.

Отметим наконец, что тот же самый результат доказан аналогично в [2, стр. 513—515] в частном случае, когда $T = [0, \tau]$, $E = R^k$, $\|a\|_E = \max \{|a_1|, \ldots, |a_k|\}$ (здесь $a = (a_1, \ldots, a_k) \in E$ и $\|x\| = \sup_{t \in T} \|x(t)\|_E$).

3. В этом пункте рассмотрим случай, когда E и X — пространства над полем комплексных чисел. Сначала сделаем несколько замечаний.

Пусть Y — нормированное пространство над полем комплексных чисел. Через Y^R обозначим пространство Y, рассматриваемое как пространство над полем действительных чисел. Если $l \in Y^*$, то через l^R и l^J обозначим действительную и мнимую часть l, так что для любого $y \in Y$ получим $l(y) = l^R(y) + il^J(y)$, где $i^2 = -1$. Как хорошо известно, $l^R \in Y^{R*}$, $\|l^R\| = \|l\|$ и $l^R(iy) = -l^J(y)$, так что для $y \in Y$ имеем

$$l(y) = l^R(y) - il^R(iy), \tag{13}$$

Пусть $l \in Y^*$, $l \neq 0$. Будем говорить что элемент $y' \in Y$ — экстремальный для l, если $y' \neq 0$ и $l(y') = \|l\| . \|y'\|$.

З а м е ч а н и е 1. Данное здесь определение (которым мы пользовались уже в действительном случае) отличается от общепринятого тем, что среди всех экстремальных в обычном смысле элементов y', для которых $|l(y')| = \|l\| . \|y'\|$ мы выбираем только те, для которых $l(y') > 0$. Таким образом мы несколько сужаем множество экстремальных элементов. Это сужение однако, несущественно, так как каждый обычный экстремальный элемент получается из некоторого экстремального в нашем смысле элемента умножением подходящим комплексным числом. Удобство нашего определения заключается в том, что множества экстремальных элементов l и l^R совпадают.

Замечание 2. Отметим, что если Y — n-мерное пространство над полем комплексных чисел, то X^R — $2n$-мерное действительное пространство.

После этих замечаний перейдем к рассмотрению случая комплексных пространств.

Пусть $l \in X^*$, $l \neq 0$ и пусть $x_1, \ldots, x_{2n}$ — базис X^R. Применяя к $l^R \in X^{R^*}$ теорему 2, получим следующее предложение.

Предложение. *Существуют элементы $t_i \in T$, $L_i^R \in S^R \subset E^{R^*}$ и числа $\mu_i > 0$ $(i = 1, \ldots, r;\ r \leqq 2n)$ так, что*

α) *для любого $x \in X^R$ имеет место равенство*

$$l^R(x) = \mu_1 L_1^R(x(t_1)) + \ldots + \mu_r L_r^R(x(t_r)) \ \Big(\sum_{s=1}^{r} \mu_s = \sup_{\|x\|=1} |l^R(x)| = \|l^R\|\Big);$$

β) *ранг матрицы*

$$(14) \qquad \begin{Vmatrix} L_1^R(x_1(t_1)) & L_2^R(x_1(t_2)) & \ldots & L_r^R(x_1(t_r)) \\ L_1^R(x_2(t_1)) & L_2^R(x_2(t_2)) & \ldots & L_r^R(x_2(t_r)) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ L_1^R(t_{2n}(t_1)) & L_2^R(x_{2n}(t_2)) & \ldots & L_2^R(x_{2n}(t_r)) \end{Vmatrix}$$

равен r;

γ) *если $x' \in X^R$ — экстремальный элемент для l^R, т. е. если $l^R(x') = \|l^R\| . \|x'\|$, то выполняются равенства*

$$L_s^R(x'(t_s)) = |x'(t_s)|_E = \sup_{t \in T} \|x'(t)\|_E = \|x'\| \quad (s = 1, \ldots, r).$$

Легко видеть что в этом предложении $r \leqq 2n-1$. Чтобы доказать это, выберем экстремальную функцию x' для l^R. Положим дальше для любого $a \in E$

$$L_s(a) = L_s^R(a) - i\, L_s^R(ia) \quad (s = 1, \ldots, r).$$

Очевидно, что $L_s \in E^*$ и $\|L_s\| = \|L_s^R\| = 1$ $(s = 1, \ldots, r)$, так что $L_s \in S$. Из точки γ последнего предложения следует, что $x'(t_s)$ является экстремальным элементом для L_s^R, а согласно замечанию 1, $x'(t_s)$, является экстремальным и для L_s. Так как $L_s(x'(t_s)) > 0$, то

$$(15) \qquad L_s^R(ix'(t_s)) = 0 \quad (s = 1, \ldots, r).$$

Допустим, что $r = 2n$. В этом случае матрица (14) является квадратной и имеет ранг $r = 2n$, следовательно, определитель Δ, составленный из элементов матрицы (14), отличен от нуля. Определим действительные числа $a_1, \ldots, a_{2n}$ так, что

$$ix'(t_s) = a_1 x_1(t_s) + \ldots + a_{2n} x_{2n}(t_s) \quad (s=1, \ldots, r=2n)$$

(здесь хотя бы одно из чисел $a_1, \ldots, a_{2n}$, например a_1, отлично от нуля), умножим первую строку (14) на a_1, добавим к ней p-тую строку, умноженную на a_p и дадим p последовательно значения $2, \ldots, 2n$. С одной стороны, полученная матрица имеет как и матрица (14) ранг $r=2n$. С другой стороны, согласно (15), все элементы первой строки равны нулю. Полученное противоречие показывает, что $r \leq 2n-1$.

Имея в виду сказанное выше, легко доказать следующий аналог теоремы 2.

Теорема 2′. *При введенных означениях и предположениях, если $l \in X^*$ и $l \neq 0$, то существуют элементы $t_s \in T$, $L_s \in S \subset F^*$ и числа $\mu_s > 0$ ($s=1, \ldots, r$; $1 \leq r \leq 2n-1$) так, что*

а′) *для любого $x \in X$ имеет место представление*

$$(16) \qquad l(x) = \mu_1 L_1(x(t_1)) + \ldots + \mu_r L_r(x(t_r)) \left(\sum_{s=1}^{r} \mu_s = \sup_{\|x\|=1} |l(x)| = \|l\|\right);$$

б′) *ранг матрицы*

$$\begin{Vmatrix} L_1^R(x_1(t_1)) & L_2^R(x_1(t_2)) & \ldots & L_r^R(x_1(t_r)) \\ L_1^R(x_2(t_1)) & L_2^R(x_2(t_2)) & \ldots & L_r^R(x_r(t_r)) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ L_1^R(x_{2n}(t_1)) & L_2^R(x_{2n}(t_2)) & \ldots & L_r^R(x_{2n})t_r)) \end{Vmatrix}$$

равен r (здесь L_s^R — действительная часть L_s);

в′) *если $x' \in X$ — экстремальная функция для l, то*

$$L_s(x'(t_s)) = \|x'(t_s)\|_E = \sup_{t \in T} \|x'(t)\|_E = \|x'\| \quad (s=1, \ldots, r)$$

(равенство $L_s(x'(t_s)) = \|x'(t_s)\|_E$ показывает, что элемент $x'(t_s) \in E$ экстремален для L_s ($s=1, \ldots, r$)).

Чтобы доказать теорему 2′, отметим, что согласно точки α Предложения, для любого $x \in X^R$, следовательно, для любого $x \in X$ имеем

$$l^R(x) = \mu_1 L_1^R(x(t_1)) + \ldots + \mu_r L_r^R(x(t_r)),$$

$$l^R(ix) = \mu_1 L_1^R(ix(t_1)) + \ldots + \mu_r L_r^R(ix(t_r)) \left(\sum_{s=1}^{r} \mu_s = \|l^R\| = \|l\|\right),$$

откуда следует а′). Утверждение б′) доказано нами выше. Утверждение в′) доказывается таким же образом, как точка в) теоремы 2. Действительно, если $x' \in X$ — экстремальная функция для l, то

$$\|l\| . \|X'\| = l(x') = \mu_1 L_1(x'(t_1)) + \ldots + L_r(x'(t_r)) = |\mu_1 L_1(x'(t_1)) + \ldots + \mu_r$$
$$\times L_r(x'(t_r))| \leq \mu_1 |L_1(x'(t_1))| + \ldots + \mu_r |L_r(x'(t_r))| \leq \mu_1 \|x'(t_1)\|_E + \ldots + \mu_r$$
$$\times \|x'(t_r)\|_E \leq (\mu_1 + \ldots + \mu_r) \sup_{t \in T} \|x'(t)\|_E = \|l\| . \|x'\|,$$

откуда следует, что все неравенства переходят в равенства, что возможно тогда и только тогда, когда выполняется утверждение в′).

В качестве следствия теоремы 2′ можно доказать следующий аналог теоремы 3.

Теорема 3′. *Для экстремальности функции $x' \in X$ ($x' \neq 0$) относительно $l \in X^*$ ($l \neq 0$) необходимо и достаточно, чтобы среди точек $t \in T$, в которых $\| x'(t) \|_E$ принимает наибольшее значение $\| x' \|$, существовали точки $t_s \in T$ и соответствующие им $L_s \in S$ ($s = 1, \ldots, r \leq 2n-1$) так, что*

$$(i) \qquad L_s(x'(t_s)) = \| x'(t_s) \|_E = \| x' \| \quad (s = 1, \ldots r),$$

(*ii*) *ранг матриц*

$$\begin{pmatrix} L_1^R(x_1(t_1)) & L_2^R(x_1(t_2)) & \ldots & L_r^R(x_1(t_r)) \\ L_1^R(x_2(t_1)) & L_2^R(x_2(t_2)) & \ldots & L_r^R(x_2(t_r)) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ L_1^R(x_{2n}(t_1)) & L_2^R(x_{2n}(t_2)) & \ldots & L_r^R(x_{2n}(t_r)) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} L_1^R(x_1(t_1)) & L_2^R(x_1(t_2)) & \ldots & L_r^R(x_1(t_r)) & l^R(x_1) \\ L_1^R(x_2(t_1)) & L_2^R(x_2(t_2)) & \ldots & L_2^R(x_2(t_r)) & l^R(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ L_1^R(x_{2n}(t_1)) & L_2^R(x_{2n}(t_2)) & \ldots & L_r^R(x_{2n}(t_2)) & l^R(x_{2n}) \end{pmatrix}$$

равен r;
(*iii*) *если определитель*

$$\Delta = \begin{vmatrix} L_1^R(x_{k_1}(t_1)) & L_2^R(x_{k_1}(t_2)) & \ldots & L_r^R(x_{k_1}(t_r)) \\ L_1^R(x_{k_2}(t_1)) & L_2^R(x_{k_2}(t_2)) & \ldots & L_r^R(x_{k_2}(t_r)) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ L_1^R(x_{k_r}(t_1)) & L_2^R(x_{k_r}(t_2)) & \ldots & L_r^R(x_{k_r}(t_r)) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то определители Δ_s ($s = 1, \ldots, r$), *получаемые от* Δ *заменой элементов s-того столбца элементами* $l^R(x_{k_1}), l^R(x_{k_2}) \ldots l^R(x_{k_r})$ *тоже отличны от нуля и имеют знак* Δ.

Доказательство этой теоремы совершенно просто, и мы его опускаем.

В следующем изложении мы проллюстрируем теоремы 2′ и 3′ на двух примерах.

Пусть $C_E(T)$ — комплексное пространство всех непрерывных функций $x: T \to E$ с нормой $\| x \| = \sup_{t \in T} \| x(t) \|_E$. Рассмотрим задачу оптимального управления:

(0′) Среди всех функционалов (управлений) $l \in C_E^*(T)$ найти функционал l', принимающий для n данных функций $x_1, \ldots, x_n$ ($x_s \in C_E(t)$) наперед заданные значения $l'(x_1)=c_1, \ldots, l'(x_n)=c_n$, $\left(\sum_{s=1}^{n} |c_s|>0\right)$ и обладающий минимальной нормой.

Как в действительном случае, из теоремы 2′ следует, что эта задача имеет решение. Притом, среди решений найдется импульсное решение l' вида (16), для которого выполняются и все остальные утверждения теоремы 2′.

Следующий пример переносит теорему Е. Ремеза [3], [4] на комплекснозначные функции.

Пусть E — пространство комплексных чисел C с нормой $\|a\|_E=|a|$ для $a\in\mathsf{C}$. Тогда каждому $L\in E^*$ соответствует комплексное число ω так, что для любого $a\in E$ имеем $L(a)=\omega a$. Это соответствие является изометрическим изоморфизмом, так что можно отождествить E^* и C. При этом отождествлении единичный шар $S\subset E^*$ состоит из всех комплексных чисел единичного круга C. Здесь для удобства (как в действительном случае) будем считать, что размерность X — $n+1$, и обозначим через $x_1, \ldots, x_n$, Ω базис X. Рассмотрим задачу наилучшего равномерного приближения Ω с многочленами $x=a_1x_1+\ldots+a_n x_n$ $(a_s\in\mathsf{C},\ s=1,\ldots,n)$. Конечно, и здесь $x'=a_1' x_1+\ldots+a_n' x_n$ является многочленом наилучшего приближения Ω тогда и только тогда, когда функция $x''=\Omega-x'$ — экстремальная для функционала l, определенного на X равенствами $l(x_1)=l(x_2)=\ldots=l(x_n)=0$, $l(\Omega)=1$. Тогда для l^R будем иметь $l^R(x_1)=\ldots=l^R(x_n)=l^R(ix_1)=\ldots=l^R(ix_n)=l^R(i\Omega)=0$, $l^R(\Omega)=1$. Здесь функции $x_1,\ldots,x_n, \Omega, ix_1,\ldots,ix_n, i\Omega$ задают базис в X^R. Имея в виду сказанного выше, сформулируем следующий частный случай теоремы 3′.

Теорема 4. *Для того чтобы функция $x'=a_1' x_1+\ldots+a_n' x_n$ была многочленом наилучшего равномерного приближения функции Ω, необходимо и достаточно, чтобы среди точек t, в которых $|x''(t)|$ $(x''=\Omega-x')$ принимает наибольшее значение $\|x'\|$, находились точки $t_s\in T$ и соответствующие им комплексные числа ω_s $(|\omega_s|=1,\ s=1,\ldots,r;\ 1\leq r\leq 2n+1)$, так что*

$$(*)\qquad \omega_s x''(t_s)=|x''(t_s)|=\|x''\|\quad (s=1,\ldots,r);$$

(**) *ранг матриц*

$$(17)\qquad \left\|\begin{matrix}
\operatorname{Re}\omega_1 x_1(t_1) & \operatorname{Re}\omega_2 x_1(t_2) & \ldots & \operatorname{Re}\omega_r x_1(t_r)\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\operatorname{Re}\omega_1 x_n(t_1) & \operatorname{Re}\omega_2 x_n(t_2) & \ldots & \operatorname{Re}\omega_r x_n(t_r)\\
\operatorname{Re}\omega_1 \Omega(t_1) & \operatorname{Re}\omega_2 \Omega(t_2) & \ldots & \operatorname{Re}\omega_r \Omega(t_r)\\
\operatorname{Re}\omega_1 ix_1(t_1) & \operatorname{Re}\omega_2 ix_1(t_2) & \ldots & \operatorname{Re}\Omega_r ix_1(t_r)\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\operatorname{Re}\omega_1 ix_n(t_1) & \operatorname{Re}\omega_2 ix_n(t_2) & \ldots & \operatorname{Re}\omega_r ix_n(t_r)\\
\operatorname{Re}\omega_1 i\Omega(t_1) & \operatorname{Re}\omega_2 i\Omega(t_2) & \ldots & \operatorname{Re}\omega_r i\Omega(t_r)
\end{matrix}\right\|$$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}\omega_1 x_1(t_1) & \operatorname{Re}\omega_2 x_1(t_2) & \ldots & \operatorname{Re}\omega_r x_1(t_r) & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \operatorname{Re}\omega_1 x_n(t_1) & \operatorname{Re}\omega_2 x_n(t_2) & \ldots & \operatorname{Re}\omega_r x_n(t_r) & 0 \\ \operatorname{Re}\omega_1 \Omega(t_1) & \operatorname{Re}\omega_2 \Omega(t_2) & \ldots & \operatorname{Re}\omega_r \Omega(t_r) & 1 \\ \operatorname{Re}\omega_1 ix_1(t_1) & \operatorname{Re}\omega_2 ix_1(t_2) & \ldots & \operatorname{Re}\omega_r ix_1(t_r) & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \operatorname{Re}\omega_1 ix_n(t_1) & \operatorname{Re}\omega_2 ix_n(t_2) & \ldots & \operatorname{Re}\omega_r ix_n(t_r) & 0 \\ \operatorname{Re}\omega_1 i\Omega(t_1) & \operatorname{Re}\omega_2 i\Omega(t_2) & \ldots & \operatorname{Re}\omega_r i\Omega(t_r) & 0 \end{pmatrix}$$

равен r (здесь $\operatorname{Re} a$ означает действительную часть числа a);
$({}_*{}^*{}_*)$ *пусть* Δ — *отличный от нуля определитель порядка* r, *составленный из* r *строк первой матрицы* (17) *и пусть для определенности* $k_1, \ldots, k_r$ $(1 \leqq k_1 < \ldots < k_r \leqq 2n+2)$ *номера этих строк. Обозначим через* Δ_s $(s=1, \ldots, r)$ *определитель, полученный из* Δ *заменой элементов* s-*того столбца элементами последнего столбца второй матрицы* (17), *которые находятся на* k_1- *ой*, ..., k_r-*ой строках. Тогда* Δ_s *отличен от нуля и имеет знак* Δ.

Наш коллега С. Троянский прочел рукопись и сделал ряд полезных замечаний. Считаем своим приятным долгом выразить нашу сердечную благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Steinitz. Über bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme. *J. reine und angew. Math.*, **143**, 1913, 128—175.
2. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Москва, 1973.
3. Е. Я. Ремез. Про методи найкращого в розумінні Чебишева, наближенного представлення функцій. Київ, 1935.
4. С. И. Зуховицкий. О приближении действительных функций в смысле П. Л. Чебышева. *УМН*, 11, вып. 2, 1956, 124—159.
5. I. Singer. Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces. Berlin — Heidelberg — New York, 1970.

Единый центр математики и механики
София 1090 *П. Я. 373*

Поступила 24.6.1982