Serdica
Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика
Българско математическо списание

БАЗИСНЫЙ РАНГ МНОГООБРАЗИЙ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР

Ю. А. МАЛЬЦЕВ

В работе рассматриваются многообразия ассоциативных алгебр над фиксированным бесконечным полем Φ. Известно, что каждое многообразие $\mathfrak{M}$ порождается своими конечнопорожденными алгебрами. Если мы обозначим через $F_k(\mathfrak{M})$ приведенно свободную алгебру ранга k многообразия $\mathfrak{M}$, то базисным рангом $r_b(\mathfrak{M})$ называется такое наименьшее число n, что $\mathfrak{M}=\operatorname{var} F_n(\mathfrak{M})$ (или ∞, если такого числа не существует). В настоящей работе доказаны следующие основные результаты.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — собственное многообразие алгебр. Тогда не существует целых чисел $m, k\geq 1$ таких, что $F_{m+k}(\mathfrak{M})\subseteq F_k(\mathfrak{M})$. Более того, если $m, k\geq 1$, то не существуют целые числа $m, k\geq 1$, такие, что $F_{m+k}(\mathfrak{M})$ является подалгеброй конечной прямой степени $F_k(\mathfrak{M})$.*

Теорема 2. *Пусть $K=\operatorname{var}\langle [x, y]=0\rangle$ и $K_p=\operatorname{var}\langle [x, y]=x^p=0\rangle$, $p=\operatorname{char}\Phi>0$. Тогда $r_b(\mathfrak{M})=4$, где $\mathfrak{M}=K_p\,.\,K=K\,.\,K$, $\operatorname{var} F_2(\mathfrak{M})=\operatorname{var} F_3(\mathfrak{M})$ и $T(F_2(\mathfrak{M}))=T(\mathfrak{M})+\{S_4(x_i)\}^T$.*

Теорема 2 отвечает на следующие вопросы:

1. Если $r_b(\mathfrak{M}\,.\,\mathfrak{N})<\infty$, то верно ли, что $r_b(\mathfrak{M})<\infty$, $r_b(\mathfrak{N})<\infty$?

2. Если в цепочке $\operatorname{var} F_1(\mathfrak{L})\subseteq \operatorname{var} F_2(\mathfrak{L})\subseteq\cdots\subseteq\mathfrak{L}$ имеет место равенство $\operatorname{var} F_n(\mathfrak{L})=\operatorname{var} F_{n+1}(\mathfrak{L})$, то верно ли, что $r_b(\mathfrak{L})\leq n$?

Кроме того, в процессе доказательства теоремы 2 строится база $F_1(\mathfrak{M})$.

Указанные результаты аннонсированы в [1].

Введем некоторые определения и обозначения. Через $J(R)$ и $C(R)$ будем обозначать соответственно радикал Джекобсона и коммутаторный идеал кольца R.

Если Q — идеал тождеств многообразия $\mathfrak{M}$, порожденный многочленами $\{f_i \mid i\in I\}\subseteq F$($F$ — свободная ассоциативная алгебра от счетного числа образующих), то положим $Q=T(\mathfrak{M})=\{f_i \mid i\in I\}^T$ или $\mathfrak{M}=\operatorname{var}\langle f_i=0\,;\, i\in I\rangle$.

Если $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{L}$ — многообразия, то $\mathfrak{A}\,.\,\mathfrak{L}$ — класс всех алгебр, которые являются расширением алгебры из $\mathfrak{A}$ с помощью алгебры из $\mathfrak{L}$. Право нормированный коммутатор длины $n\geq 2$ определим индуктивно:

$$[x_1, x_2]=x_1x_2-x_2x_1,\ \ [x_1, \ldots x_n]=[[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n].$$

Обозначим через $[x, y]_n=[x, y, y, \ldots, y]$.

Доказательство теоремы 1. Допустим противное и пусть φ: $F_{m+k}(\mathfrak{M})\to F_k(\mathfrak{M})$ — вложение алгебр. Из работы [2] следует, что $I=J(F(\mathfrak{M}))$ — множество всех нильпотентных элементов $F(\mathfrak{M})$ и существует целое число n такое, что $I=I(M_n(\Phi))$. При этом, $F(\mathfrak{M})/I$ имеет тело частных. Обозначим через D_k и D_{m+k} соответственно тела частных следующих алгебр: $F_k(\mathfrak{M})/F_k(\mathfrak{M})\cap I$ и $\varphi(F_{m+k}(\mathfrak{M}))/\varphi(F_{m+k}(\mathfrak{M}))\cap I$. Тогда $D_{m+k}\subseteq D_k$ и по теореме Прочези ([3]) $\operatorname{tr\,deg}_\Phi \operatorname{Cent} D_k=(k-1)n^2+1$, $\operatorname{tr\,deg}_\Phi \operatorname{Cent} D_{m+k}=(m+k-1)n^2+1$.

Так как $\operatorname{Cent} D_{m+k}$ содержится в некотором максимальном поле D_k и степень трансцендентности последнего равна $(k-1)n^2+1$, то получаем противоречие. Следовательно, $F(\mathfrak{M})=I$ и $x^t \in T(F(\mathfrak{M}))$. По теореме Левицкого [4] это означает локальную нильпотентность (конечномерность) алгебр из $\mathfrak{M}$. В частности, $\dim_\Phi F_k(\mathfrak{M})<\dim_\Phi F_{m+k}(\mathfrak{M})$ и $F_{m+k}(\mathfrak{M})\urcorner\subset F_k(\mathfrak{M})$. Докажем вторую часть утверждения. Пусть $\mathfrak{M}\in\Phi$ и для некоторых $m, k\geqq 1$ существуат целое число $s\geqq 1$ такое, что $F_{m+k}(\mathfrak{M})\subseteq\bigoplus_{i=1}^s F_k(\mathfrak{M})$. Тогда $J(F_{m+k}(\mathfrak{M}))=F_{m+k}(\mathfrak{M})\cap(\bigoplus_{i=1}^s J(F_k(\mathfrak{M})))$ и тело частных D_{m+k} вложим в алгебру $\bigoplus_{i=1}^s D_k$. Проектируя на нулевую компоненту, получим, что $D_{m+k}\subseteq D_k$. Ранее было доказано, что последнее включение невозможно. Следовательно, $F_k(\mathfrak{M})=J(F_k(\mathfrak{M}))$ и $x^t\in T(\mathfrak{M})$. Это противоречит тому, что $\Phi\in\mathfrak{M}$. Теорема доказана.

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — нильпотентное многообразие индекса q. Тогда* 1) $_b(\mathfrak{M})=m>\infty$, 2) *для любого числа $k\geqq h\geqq m+q$, $F_k(\mathfrak{M})$ является подалгеброй некоторой конечной прямой степени алгебры $F_n(\mathfrak{M})$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 35, II из [5]. Пусть $x_1x_2\cdots x_q\in T(\mathfrak{M})$ и $Q_i=T(F_t(\mathfrak{M}))$. Тогда $Q_1\supseteq Q_2\supseteq\cdots\supseteq T(\mathfrak{M})\supseteq F^q$. Идеалы Q_i и $T(\mathfrak{M})$ однозначно определяются (как Т-идеалы) многочленами от $(q-1)$-й переменной. Следовательно, длина указанной цепи $\leqq\dim F_q/F_q^q<\infty$. Итак, доказано, что $r_b(\mathfrak{M})=m<\infty$. Пусть $I=\{j=(m_1,\ldots,m_n)/m_1\leqq\cdots\leqq m_n;\ m_i\leqq k\}$. Рассмотрим $F_n^I=\bigoplus_{i=1}^{(I)} F_n(\mathfrak{M})$. Определим следующие элементы $t_1,\ldots,t_k\in F_n^I$:

$$t_i(j)=\begin{cases}0, & i\notin j;\\ x_t, & i=m_t\in j;\end{cases}$$

где $x_1,\ldots,x_n$ — свободные образующие $F_n(\mathfrak{M})$. Докажем, что $F_k(\mathfrak{M})\cong\Phi[t_1,\ldots,t_k]$. Пусть $g(t_1,\ldots,t_k)=0$ — некоторое соотношение между $t_1,\ldots,t_k$. Докажем, что $g=0$ — тождество $F_n(\mathfrak{M})$ и, следовательно, $g\in T(\mathfrak{M})$. Действительно, $g=\Sigma_{s\leqq q-1\leqq n}\, g_{(i)}(y_1,\ldots,y_{i_s})$ и $g(t_1,\ldots,t_k)(j)=g(t_1(j),\ldots,t_k(j))=g(0,\ldots,x_1,0,\ldots,x_2,\ldots,x_n,0,\ldots)=0$. Отсюда следует, что $g_{(i)}(x_{i_1},\ldots,x_{i_s})=0$ и $g=0$ — тождество в $F_n(\mathfrak{M})$. Следовательно, $g=0$ — тождество в $\Phi[t_1,\ldots,t_k]$ и $\Phi[t_1,\ldots,t_k]\cong F_k(\mathfrak{M})$. Предложение доказано.

Предложение 2. *Пусть* $\operatorname{char}\Phi=0$. *$\mathfrak{M}$ — Нильпотентное многообразие тогда и только тогда, когда существуют целые числа $m, k\geqq 1$ такие, что $F_{m+k}(\mathfrak{M})\subseteq\bigoplus_{i=1}^s F_k(\mathfrak{M})$ для некоторого целого числа $s\geqq 1$.*

Доказательство следует из теоремы 1, предложения 1 и того, что если $\mathfrak{M}\notin\Phi$, то $T(\mathfrak{M})\urcorner\subset\{[x,y]\}^T$, $x^n\in T(\mathfrak{M})$, $x_1\ldots x_{2^n-1}\in T(\mathfrak{M})$.

Пример 1. Пусть $p=\operatorname{char}\Phi>0$ и $K_p=\operatorname{var}\langle[x,y]=x^p=0\rangle$. Тогда K_p — не нильпотентное многообразие, и если $R\in K_p$, то R — локально нильпотентная алгебра. Поэтому, $r_b(K_p)=\infty$ и для любого $k\geqq 1$ существует $m>k$ такое, что $F_m(K_p)\not\subset\bigoplus_{i=1}^s F_k(K_p)$.

Пример 2. Пусть $N_m=\{(a_{ij})\in M_m(\Phi);\ a_{ij}=0,\ i\geqq j\}$ и $\mathfrak{N}_m=\operatorname{var} N_m$. Тогда $r_b(\mathfrak{N}_m)=m-1$ и $T(\mathfrak{N}_m)=\{x_1\ldots x_m\}^T$.

Так как матричные единицы e_{ii+1}, $i=1,\ldots,m-1$ являются образующими N_m, то $r_b(N_m)\leqq m-1$. Если $\mathfrak{N}_m=\operatorname{var}F_k(\mathfrak{N}_m)$, где $k=m-2$, то $S_{m-1}(x_1,\ldots,x_{m-1})=0$ — тождество в $F_k(\mathfrak{N}_m)$. Это следует из разложения $F_k(\mathfrak{N}_m)=\Sigma_{i=1}^k\Phi y_i+F_k(\mathfrak{N}_m)^2$, кососимметричности многочлена $S_{m-1}(x_i)$ и равенства $F_k^m(\mathfrak{N}_m)=0$. С другой стороны, $S_{n-1}(e_{12},e_{23},\ldots,e_{m-1m})\neq 0$, т. е. $S_{m-1}\notin T(\mathfrak{N}_m)$. Противоречие доказывает, что $r_b(\mathfrak{N}_m)=m-1$. Если существует многочлен $f(x_1,\ldots,x_d)\in T(\mathfrak{N}_m)\setminus\{x_1\ldots x_m\}^T$, то можно f считать полилинейным, причем $\alpha\leq m-1$. Так как $f(e_{12}, e_{23},\ldots, e_{dd+1})=e_{1d+1}\neq 0$, то имеем противоречие. Итак, $T(\mathfrak{N}_m)=F^m$.

Следующий результат А. Р. Кемера является важнейшим для изучения многообразий алгебр [6]:

Пусть $\operatorname{char}\Phi=0$. Тогда следующие условия на многообразие $\mathfrak{M}$ эквивалентны: 1) $r_b(\mathfrak{M})<\infty$ 2) $G\notin\mathfrak{M}$, где G — счетнопорожденная алгебра Грассмана, 3) $S_n(x_1,\ldots,x_n)\in T(\mathfrak{M})$.

Предложение 3. *Следующие многообразия являются единственными минимальными многообразиями с бесконечным базисным рангом:* 1) $\operatorname{char}\Phi=0$, $\mathfrak{M}=\operatorname{var}G$; 2) $\operatorname{char}\Phi=p>0$, $\mathfrak{M}=\operatorname{var}\langle[x,y]=x^p=0\rangle$.

Если $\operatorname{char}\Phi=0$, то утверждение следует из результата А. Р. Кемера. Если $\operatorname{char}\Phi=p>0$ и пусть $\mathfrak{M}$ — минимальное многообразие бесконечного базисного ранга. Тогда ввиду предложения 1, $\mathfrak{M}$ — ненильпотентное многообразие. Из работы [7] следует, что оно содержит единственное почти нильпотентное многообразие K_p, причем $r_b(K_p)=\infty$. Следовательно, $\mathfrak{M}=K_p$. Предложение доказано.

Замечание. Пусть $K=\operatorname{var}\langle[x,y]=0\rangle$. Тогда $r_b(K)=1$ и если $\operatorname{char}\Phi=p>0$, то $K\supset K_p$. Таким образом, в отличие от результата А. Р. Кемера, условие конечности базисного ранга (в случае, $\operatorname{char}\Phi>0$) не является наследственным на многообразие. Более того, из доказанного следует, что указанной наследственностью обладают только нильпотентные многообразия.

Предложение 4. 1) *Если* $r_b(\mathfrak{M}\,.\,\mathfrak{N})=n<\infty$, *то* $r_b(\mathfrak{N})\leq n$. 2) *Если* $\operatorname{char}\Phi=0$, *то* $r_b(\mathfrak{M}\,.\,\mathfrak{N})<\infty$ *тогда и только тогда, когда* $r_b(\mathfrak{M})<\infty$ *и* $r_b(\mathfrak{N})<\infty$.

Доказательство. Имеют место следующие включения: $\mathfrak{M}\,.\,\mathfrak{N}=\operatorname{var}F_n(\mathfrak{M}\,.\,\mathfrak{N})\subseteq\mathfrak{M}\,.\operatorname{var}F_n(\mathfrak{N})\subseteq\mathfrak{M}\,.\,\mathfrak{N}$. Следовательно, $\mathfrak{M},\mathfrak{N}=\mathfrak{M}\,,\operatorname{var}F_n(\mathfrak{N})$. Согласно работе [8], в группоиде всех многообразий имеет место закон левого сокращения, т. е. $\mathfrak{N}=\operatorname{var}F_n(F_n(\mathfrak{N})$ и $r_b(\mathfrak{N})\leq n$. Предположим, что $\operatorname{char}\Phi=0$. Если $r_b(\mathfrak{M}\,.\,\mathfrak{N})<\infty$, то $G\notin\mathfrak{M}\,.\,\mathfrak{N}$ и, следовательно, $G\notin\mathfrak{M}\vee\mathfrak{N}$. Поэтому $r_b(\mathfrak{M})<\infty$ и $r_b(\mathfrak{N})<\infty$. Докажом обратное утверждение. Пусть $S_m(x_i)\in T(\mathfrak{M})$ и $S_n(x_i)\in T(\mathfrak{N})$. Тогда G не удовлетворяет тождеству $S_m(S_n(x_i), S_n(y_i),\ldots)=0$. Поэтому, $G\notin\mathfrak{M}\,.\,\mathfrak{N}$ и $r_b(\mathfrak{M}\,.\,\mathfrak{N})<\infty$. Предложение доказано.

Автору неизвестен следующий вопрос: *Пусть* $\operatorname{char}\Phi>0$ *и* $r_b(\mathfrak{M}_i)<\infty$, $i=1,2$. *Верно ли, что* $r_b(\mathfrak{M}_1\,.\,\mathfrak{M}_2)<\infty$?

Доказательство теоремы 2. Пусть $R=F_2(\mathfrak{M})=\Phi[a,b]$, где $\mathfrak{M}=K_p.K$. Заметим, что $T(\mathfrak{M})=\{[x,y,z][u,v], [[u,v],[x,y]], [u,v][x,y,z], [x_1,x_2][x_3,x_4][x_5,x_6]\}^T$. Докажем, что $\cup_{i=1}^4 I_i$ — база Φ — пространства R, где $I_1=\{a^ib^j\}$, $I_2=\{[a,b]\,a^ib^j\}$, $I_3=\{[a,b]^2a^ib^j\}$, $I_4=\{[[a,b]_s,a]_t\,a^ib^j;\ s+t\geq 2\}$. Для доказательства того, что $\bigcup_{i=1}^4 I_i$ — система линейных образующих R, достаточно показать, что элементы вида a^ib^ja линейно выражаются через $\bigcup_{i=1}^4 I_i$. Имеем, $a^ib^ja=a^{i+1}b^j-a^i[a,b^j]=a^{i+1}b^j+\Sigma_{t=0}^{j-1}[[a,b],a^ib^t]\,b^{j-t+1}-j[a,b]\,a^ib^{j-1}$. Ввиду тождеств $x[y,z,t]=-[y,z,t,x]+[y,z,t]x$, $[x,y,z,t]=[x,y,t,z]$, $[x,y,z][u,v]=0$, $[u,v][x,y,z]=0$, $[u,xy]=x[u,y]+[u,x]y$, элементы $[a,b,a^ib^j]$ линейно выражаются через $\cup_{i=1}^4 I_i$. В свободной алгебре R каждое соотношение между образующими a, b является тождеством. Поэтому все соотношения можно считать однородными относительно a и b. Предположим, что $\cup_{i=1}^4 I_i$ — линейно зависимое множество. Тогда, ввиду однородности, имеет место следующее равенство:

$$(1)\quad \alpha a^n b^m+\beta[a, b]a^{n-1}b^{m-1}+\gamma[a, b]^2a^{n-2}b^{m-2}+\sum_{s+t\geqq 2}\gamma_{st}[[a, b]_s, a]_t\, a^{n-t-1}b^{m-s}=0.$$

Если $\alpha\neq 0$, то полагая $a=b=x$, получим, что $x^{n+m}\in T(\mathfrak{M})$. Противоречие. Если $\beta\neq 0$, то умножив (1) на $[a, b]$, получим, что $[a, b]^2a^{n-1}b^{m-1}=0$. Ввиду однородности многообразия $\mathfrak{M}$, сделав подстановку $a=x+y$, $b=y$, имеем $[x, y]^2y^k=0$, где $k=n+m-2$. Если $k=0$, то очевидно, что $[x, y]^2\notin T(\mathfrak{M})$. Если $k>0$, то получаем следующее равенство в F:

$$2)\quad [x, y]^3y^k=\sum_{i+j+t=k-1}\alpha_{ijt}\, y^i[x, y, y]\, y^j[x, y]\, y^t+\sum_{i+j+k=k-1}\beta_{ijt}\, y^i[x, y]y^j[x, y, y]\, y^t.$$

Алгебра $S=\{(a_{ij})\in M_5(\Phi);\ a_{ij}=0,\ i>j,\ a_{11}=\cdots=a_{55}\}$ удовлетворяет тождествам $[x, y, z][u, v]=[u, v][x, y, z]=0$, но при $x=e_{12}+e_{13}+e_{34}$, $y=1+z$, где $z=e_{13}+e_{23}+e_{24}+e_{45}$, $z^2=e_{25}$, $z^3=0$, $[x, z]=e_{13}+e_{35}-e_{24}$, $[x, z]^2=e_{15}$. Следовательно, $[x, y]^2y^k=e_{15}\,(1+kz+\frac{k(k-1)}{2}z^2)=e_{15}\neq 0$. Противоречие доказывает, что $\beta=0$. Пусть в равенстве $(+)\gamma\neq 0$. Сделав подстановку, $b=y$, $a=x+y$, ввиду однородности, получим следующее тождество в $\mathfrak{M}$:

$$(3)\qquad [x, y]^2y^k+\sum_{s\geqq 1}\mu_s\,[[x, y]_s, x]\, y^{k+2-s}+\sum_{s\geqq 2}\delta_s\,[x, y]_s\, xy^{k+2-s}=0.$$

Пусть P — алгебра верхних треугольных матриц порядка два над полем Φ. Тогда $P\in\mathfrak{M}$ и $[x, y][u, v]=0$ — тождество в P. Пусть $\mu_t\neq 0$, $\mu_i=0$, $i\leqq t-1$, $\delta_e\neq 0$, $\delta_i=0$, $i\leqq l-1$. Рассмотрим два случая:

1) $t\leqq l$ Тогда (3) — тождество в алгебре P, содержащей единицу. Положим $y=1+u$, мы получим новое тождество $[[x, u]_t, x]+\delta_t\,[x, u]_t\, x=0$ в P. Пусть $x=e_{11}$, $u=e_{11}+e_{12}$. Тогда $[[e_{11}, e_{11}+e_{12}]_t, e_{11}]+\delta_t[e_{11}, e_{11}+e_{12}]_t\, e_{11}=\pm e_{12}\pm 0$. Противоречие.

2) $t>e$. Полагая $y=1+u$, имеем, что $[x, u]_e\, x=0$ — тождество алгебры P. Полагая $x=e_{22}$, $u=e_{11}+e_{12}$, имеем противоречие. Итак, доказано, что в (1) $\alpha=\beta=\gamma=0$. Если не все коэффициенты γ_{st} в (1) равны нулю, то $\Sigma_{s+t\geq 2}\,\gamma_{st}\,[[x, y]_s, x]_t\, x^{n-t-1}y^{m-s}=0$ — нетривиальное тождество в $\mathfrak{M}$ и, следовательно, в P. Пусть $x=1+u$, $y=1+v$, $k=\min\{i/\gamma_{si}\neq 0\}$ и $l=\min\{s/\gamma_{sk}\neq 0\}\geqq 1$. Тогда, ввиду однородности, алгебра P удовлетворяет тождеству $\gamma_{ek}\,[[u, v]_e, u]_k=0$. Полагая $u=e_{11}$, $v=e_{11}+e_{12}$, получаем противоречие. Итак, мы доказали, что $\cup_{i=1}^{4} I_i$ — база алгебры $R=F_2(\mathfrak{M})$. Докажем, что $T(R)=T(\mathfrak{M})+\{S_4(x_i)\}^T$.

Лемма 1. $S_4(x_1, x_2, x_3, x_4)\equiv 2\ \{[x_1, x_2]\ [x_3, x_4]-[x_1, x_3][x_2, x_4]+[x_1, x_4][x_2, x_3]\}\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ T(\mathfrak{M}))$.

Доказательство следует из разложения $S_4(x_1, x_2, x_3, x_4)=[x_1, x_2]\circ[x_3, x_4]-[x_1, x_3]\circ[x_2, x_4]+[x_1, x_4]\circ[x_2\, x_4]$, где $x\circ y=xy+yx$ и противоречивости следующего равенства в $F: f=[x_1, x_2]\,[x_3, x_4]-[x_1, x_3]\,[x_2, x_4]+[x_1, x_4]\,[x_2, x_3]=\Sigma\alpha_{(i)}\,[[x_{i1}, x_{i2}], [x_{i3}, x_{i4}]]$. Действительно, алгебра G удовлетворяет правой части, но не удовлетворяет левой части этого равенства.

Лемма 2. $S_4(x_1, x_2, x_3, x_4)\in T(R)$.

Доказательство. Ввиду полилинейности и определяющих тождеств многообразия $\mathfrak{M}$, достаточно проверить справедливость этого тождества для базисных элементов из I_1. По лемме 1, исходя из обозначений в ней, достаточно показать, что $f(a^{i_1}b^{j_1}, a^{i_2}b^{j_2}, a^{i_3}b^{j_3}, a^{i_4}b^{j_4})=0$, $x_k=a^{i_k}b^{j_k}$, $k\leqq 4$. Пусть $n=\Sigma i_k$, $m=\Sigma j_k$. Тогда можно проверить, что

$$[x_1, x_2]\,[x_3, x_4]=[a, b]^2a^{n-2}b^{m-2}\,\{(i_2i_4)(j_1\, j_3)+i_1i_3)(j_2\, j_4)-(i_2i_3)(j_1\, j_4)-(i_1i_4)\,(j_2\, j_3)\},$$

$$[x_1, x_4][x_2, x_3] = [a, b]^2 a^{n-2} b^{m-2} \{(i_4 i_3)(j_1 j_2) + (i_1 i_2)(j_3 j_4) - (i_4 i_2)(j_1 j_3) - (i_1 i_3)(j_2 j_4)\},$$

$$-[x_1, x_3][x_2, x_4] = [a, b]^2 a^{n-2} b^{m-2} \{-(i_3 i_4)(j_1 j_2) - (i_1 i_2)(j_3 j_4) + (i_2 i_3)(j_1 j_4) + (i_1 i_4)(j_2 j_3)\}.$$

Следовательно, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$. Лемма доказана.

Лемма 3. $T(R) = T(\mathfrak{M}) + \{S_4(x_i)\}^T$.

Доказательство. Пусть $Q = T(\mathfrak{M}) + \{S_4(x_i)\}^T$, $g(x_i) \in T(R) \setminus Q$ и $k_i = \deg_{x_i} g$. Тогда

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_d) \equiv \Sigma \alpha_{ij} [x_i, x_j] x_1^{k_1} \ldots x_i^{k_i - 1} \ldots x_j^{k_j - 1} \ldots x_d^{k_d} \tag{4}$$

$$+ \Sigma b_{(i)} [x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_4}] x_1^{k_1} \ldots x_d^{k_d} + \sum_{t \geq 3} \gamma_{(i)} [x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}] x_1^{k_1} \ldots x_{i_1}^{k_{i_1} - 1} \ldots x_d^{k_d} (\operatorname{mod} Q).$$

Если, например, $\alpha_{12} \neq 0$, то, умножив g слева на $[x, y]$ и положив $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = \cdots = x_d = y^p$, получим следующее равенство:

$$\alpha_{12} [x, y]^2 x^s y^t + \sum_{(ij) \neq (12)} \alpha_{ij} [x, y][x, y^p] x^{\beta_i} \cdot y^{\gamma_j} \equiv 0 (\operatorname{mod} T(R)).$$

Так как $[x, y][x, y^p] \equiv p[x, y]^p y^{p-1} \equiv 0 \operatorname{mod} T(R))$, то подставляя вместо $x = a$, $y = b$, имеем противоречие с тем, что базисный элемент $[a, b]^2 a^s b^t \neq 0$. Итак, можно считать, что все коэффициенты $\alpha_{ij} = 0$. Пусть в (4) $\beta_{(1212)} \neq 0$ и $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_i = a^p$, $i \geq 3$. Ввиду тождества $[u, v]_p = [u, v^p]$, получаем следующую линейную зависимость базисных элементов $\beta_{(1212)} [a, b]^2 a^s b^t + \Sigma \gamma_i c_i = 0$, где $c_i \in I_4$. Поэтому $\beta_{(ijij)} = 0$. Если $\beta_{(1213)} \neq 0$, то полагая $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = b$, $x_4 = \cdots = x_d = b^p$ и учитывая, что $\beta_{(1312)} = 0$ (в силу тождества $[[x, y], [u, v]] \in T(\mathfrak{M})$), имеем равенство $\beta_{(1213)} [a, b]^2 a^i b^j + \Sigma \gamma_t c_t = 0$, где $c_t \in I_4$. Противоречие доказывает, что $\beta_{(i_1 i_2 i_3 i_4)} = 0$, если $i_k = i_l$, $k \neq e$. Пусть, наконец, $\beta = \beta_{(1234)} \neq 0$. Положим $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = a$, $x_4 = b$, $y_i = b^p$, $i \geq 5$. Тогда предполагая в (4) $i_1 < i_2$, $i_3 < i_4$, имеем, что $(\beta - \beta_{(1423)} [a, b]^2 a^i b^j + \Sigma \gamma_i c_i = 0$, где $c_i \in I_4$ и, следовательно, $\beta = \beta_{(1423)}$. Аналогично, сделав следующую подстановку $x_1 = x_4 = a$, $x_2 = x_3 = b$, $x_5 = \cdots = x_d = b^p$, получаем, что $\beta_{(1234)} + \beta_{(1324)} = 0$ и $g(x_1, \ldots, x_d) \equiv \beta \{[x_1, x_2][x_3, x_4] - [x_1, x_3][x_2, x_4] + [x_1, x_4][x_2, x_3]) x_1^{k_1 - 1} \cdots + \varphi (\operatorname{mod} Q)$, где φ — сумма остальных слагаемых. Так как многочлен f, стоящий в скобке по лемме 1, сравним с S_4 по модулю Q, то можно считать, что $\beta = 0$ и

$$g(x_1, \ldots, x_d) \equiv \sum_{t \geq 3} \gamma_{(i)} [x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}] x_1^{k_1} \ldots (\operatorname{mod} Q). \tag{5}$$

В сравнении (5) можно предполагать, что $i_1 \leq i_3 \leq i_4 \leq \cdots \leq i_t$ и $i_1 < i_2$. Рассмотрим следующее слагаемое правой части (5):

$$\psi = \sum_{l=2}^{s} \gamma_e [x_{i_1}, x_{i_e}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_e}, \ldots, x_{i_s}] x_1^{k_1} \ldots,$$

где $s = \min \{t / \gamma_{(i)} \neq 0\}$ и $\gamma_e = \gamma_{(i)}$ при $(i) = (i_1, i_e, \ldots, i_s)$. Если, например, $\gamma_2 \neq 0$, то, полагая $x_{i_1} = b$, $x_{i_2} = a$, $x_{i_j} = b$, $j \neq 2$, $y_m = b^p$, если $m \neq i_j$, $j \leq s$, имеем, что $\psi = \gamma_2 \underbrace{[b, a, \ldots]}_{s} a^u b^v \neq 0$. При подстановке указанных значений в остальные слагаемые g, каждый раз мы получаем коммутаторы большей длины, т. к. $[\ldots, b^p, \ldots] = [\ldots, \underbrace{b, \ldots, b}_{p} \ldots,]$. Это влечет линейную зависимость базисных элементов из I_4. Таким образом, $\gamma_{(i)} = 0$ и $g \in Q$. Лемма доказана.

Пусть $F_3(\mathfrak{M})=\Phi[a, b, c]$, $T_i=T(F_i(\mathfrak{M}))$, $i\leqq 4$.

Лемма 4. $T_2=T_3$.

Доказательство. Так как $T_2\supseteq T_3\supseteq T(\mathfrak{M})$, то ввиду леммы 3, достаточно, что $S_4(x_i)\in T_3$. Это равносильно по лемме 1 включению $f=[x_1, x_2][x_3, x_4]-[x_1, x_3][x_2, x_4]+[x_1, x_4][x_2, x_3]\in T_3$. Аналогично доказательству леммы 2, достаточно проверить выполнимость тождества $f=0$ на элементах вида $x_k=a^{i_k}b^{j_k}c^{\mu_k}$. Пусть $\lambda=\Sigma i_k$, $\beta=\Sigma j_k$, $\mu=\Sigma\mu_k$. Тогда

$$[x_1, x_2][x_3, x_4]=a^{\lambda-2}b^{\beta-2}c^{\mu-2}\{[a, b]^2c^2(i_1 j_2-i_2 j_1)(i_3 j_4-i_4 j_3)+[a, c]^2b^2$$
$$\times(i_1\mu_2-i_2\mu_1)(i_3\mu_4-i_4\mu_3)+[b, c]^2a^2(j_1\mu_2-j_2\mu_1)(j_3\mu_4-j_4\mu_3)+[a, b][a, c]bc$$
$$\times[(i_1 j_2-i_2 j_1)(i_3\mu_4-i_4\mu_3)+(i_1\mu_2-i_2\mu_1)(i_3 j_4-i_4 j_3)]+[a, b][b, c]ac[(i_1 j_2-i_2 j_1)$$
$$\times(j_3\mu_4-j_4\mu_3)+(j_1\mu_2-j_2\mu_1)\cdot(i_3 j_4-i_4 j_3)]+[a, c][b, c]ab[(i_1\mu_2-i_2\mu_1)$$
$$\times(j_3\mu_4-j_4\mu_3)+(j_1\mu_2-j_2\mu_1)(i_3\mu_4-i_4\mu_3)]\}.$$

Аналогично, вычисляя $[x_1, x_4][x_2, x_3]$, $-[x_1, x_3][x_2, x_4]$, получим, что $f=0$. Лемма доказана.

Лемма 5. $r_b(\mathfrak{M})=4$.

Доказательство. Согласно лемме 1, $S_4(x_i)\notin T_4$. Пусть существует многочлен $\varphi(x_1, \ldots, x_d)\in T_4\setminus T(\mathfrak{M})$, причем $\alpha_i=\deg_{x_i}\varphi$. Так как $\varphi\in T_2$, то согласно лемме 2, его можно представить в виде

$$\varphi=\beta f(x_1, \ldots, x_4)x_1^{\alpha_1-1}\ldots x_d^{\alpha_d}+\sum_{(i)\neq(1234)}\beta_{(i)}f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_4})\,\omega(x_i)$$
$$+\sum_{t\geqq 3}\gamma_{(i)}[x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}]\,\omega'(x_i),$$

где f — многочлен из леммы 4, β, $\beta_{(i)}$, $\gamma_{(i)}\in\Phi$ и ω, ω' — слова от образующих $x_1, \ldots, x_d$. Если $\beta=\beta_{(j)}=0$, то по лемме 3, $\gamma_{(i)}=0$, и $\varphi\in T(\mathfrak{M})$. Поэтому будем считать, что, например, $\beta\neq 0$. Сделаем подстановку $x_i=y_i$, $i\leqq 4$, $x_i=y_1^p$. Тогда, ввиду включения $[u, v][x, y^p]\in T(\mathfrak{M})$ имеем, что

$$\psi(y_i)=\varphi(y_1, \ldots, y_4, y_1^p, \ldots)=\beta f(y_1, \ldots, y_4)\,y_1^{\delta_1}\ldots y_4^{\delta_4}+\sum_{t\geqq 3}\gamma'_{(i)}[y_{i_1}, \ldots, y_{i_t}]\omega''(y_i)$$

— тождество в $F_4(\mathfrak{M})$. Пусть $y_i=u_1+u_i$, $i=2, 3, 4$ и $y_1=u_1$. Тогда однородная компонента многочлена $\psi(u_1, u_1+u_2, u_1+u_3, u_1+u_3)$ степени один относительно u_2, u_3, u_4 $(\delta=\Sigma\delta_i)$ равна

$$\chi(u_1, u_2, u_3, u_4)=\beta f(u_i)\,u_1^{\delta}+\sum_{t\geqq 3}\gamma''_{(i)}[u_{i_1}, \ldots, u_{i_t}]\,\omega''(u_i)$$

и принадлежит T_4. Пусть $B=\Phi[1, e_1, e_2, e_3, e_4]$, где $l_il_j=-l_jl_i$, $l_i^2=0$, $i\neq j$, $i, j=1, \ldots, 4$. Тогда, ввиду равенства $(1+e_1)^p=1$, элементы $b_1=1+e_1$, $b_i=e_i$, $i=2, 3, 4$ являются образующими алгебры B. Так как $C(B)$ порождается как линейное пространство элементами e_ie_j, $e_ie_je_k$, $e_1e_2e_3e_4$, то $C(B)^3=0$, $C(B)^2\neq 0$, $C(B)$ — коммутативное кольцо и $B\in\mathfrak{M}$. Так как B — 4 — порожденная алгебра, то $\chi=0$ — тождество в $B\in\mathfrak{M}$. Далее нетрудно проверить, что $[x, y, z]=0$ — тождество в $B\in\mathfrak{M}$ и $\chi(1+e_1, e_2, e_3, e_4)=24\beta e_1e_2e_3e_4\neq 0\,(p\geqq 5)$. Противоречие доказывает, что лемма доказана.

Доказательство теоремы 2, очевидно, следует теперь из лемм 2, 3, 4, 5.

Автор благодарит Л. А. Бокутя и И. В. Львова за обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Мальцев. Приведенно свободные алгебры многообразий ассоцитивных алгебр над бесконечным полем. *16-я Всесоюзн. алгебр. конф., Тезисы*, Ленинград, 1981, ч. 2, с. 86.
2. S. Amitsur. The T-ideals of the free rings. *J. London Math. Soc.*, 1955, **30**, 470—475.
3. C. Procesi. Rings with polynomial identities. New York, 1973.
4. Н. Джекобсон. Строение колец. Москва, 1960.
5. Х. Нейман. Многообразие групп. Москва, 1969.
6. А. Р. Кемер. Нематричные многообразия со степенным ростом и конечнопорожденные PI-алгебры. Канд. дисс., Новосибирск, 1981.
7. И. К. Львов. О многообразиях ассоциативной алгебры. 1973, **12**, № 6, 667—689.
8. И. К. Тонов. Многообразия ассоциативной алгебры. Канд. дисс., София, Софийский университет, 1980.

Алтайский государственный университет
г. Барнаул — СССР

Поступила 21. 10. 1983