Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

ПРОСТРАНСТВА СО СЧЕТНЫМИ ТОЧНЫМИ ГОМОЛОГИЯМИ С ТОРЗИОННОЙ ГРУППОЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ

СТАНИСЛАВА В. ПЕТКОВА

В работе рассматривается естественное преобразование точных гомологий в индуцированные ими гомологии Уеха на категории локально компактных пространств и их собственных отображений. Показано, что оно — изоморфизм в данной размерности для пары (X, A), если точные гомологии (X, A) — счетные в этой размерности, а группа коэффициентов — торзионная.

Пусть $\mathscr{B}$ — категория локально компактных пространств, удовлетворяющих вторую аксиому счетности и их собственные отображения, H_* — точные (Стинродовские) гомологии на $\mathscr{B}$, а $\gamma_*: H_* \to \check{H}_*$ — естественный эпиморфизм этих гомологий в гомологии Чеха, индуцированные H_* [4].

В [1] Е. Г. Скляренко доказал, что если G и $H_n(X, A, G)$ — счетные группы, $(X, A) \in \mathscr{B}$, то $\gamma_n: H_n(X, A, G) \to \check{H}_n(X, A, G)$ — изоморфизм.

В [2] В. И. Кузьминов и И. А. Шведов показали, что для изоморфности γ_n на категории компактных метризуемых пар достаточно потребовать счетность группы G и $\operatorname{Ker}\gamma_n = \operatorname{Pext}(\check{H}^{n+1}(X, A), G)$($\check{H}^*$ — когомологии Чеха). Напомним, что $\operatorname{Pext}(\check{H}^{n+1}(X, A), G)$ — группа сервантных расширений G при помощи $\check{H}^{n+1}(X, A)$, т. е. группа тех элементов из $\operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), G)$, которые делятся на все натуральные числа. Фактически, доказательство из [2] проведено для теории гомологий, которая удовлетворяет функториальной точной последовательности

$$0 \to \operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), G) \to H_n(X, A, G) \to \operatorname{Hom}(\check{H}^n(X, A), G) \to 0.$$

На самом деле, по доказанному Н. А. Берикашвили [3], каждая такая теория на категории компактных пар совпадает с гомологиями Стинрода.

Условие о счетности G существенно. В [2] построен пример компактного метризуемого пространства X и (несчетной) группы G, таких, что $\operatorname{Pext}(\check{H}^1(X), G) = Q$ (Q — группа рациональных чисел), но $\operatorname{Ker}\gamma_0 \neq 0$. Легко перефразировать этот пример в примере, где точные гомологии пространства — счетные для некоторого n, но неизоморфные гомологиям Чеха. Берем ту же самую группу G. Подробнее, если $\widehat{Z}$ — пополнение группы Z в Z-адической топологии, а $\sigma: \widehat{Z} \to Q$ — эпиморфизм группы $\widehat{Z}$ на Q, то $G = \operatorname{Ker}\sigma$. Для G, $\operatorname{Pext}(Q, G) = Q$. Обозначим через X соленоид, являющийся обратным пределом спектра двумерных сфер S_n^2 и отображений $f_n: S_{n+1}^2 \to S_n^2$, где f_n — надстройка n-кратного наворачивания экватора одной сферы в другой. Имеем $\check{H}^0(X) = Z$, $\check{H}^1(X) = 0$ и $\check{H}^2(X) = Q$. Тогда из формулы универсальных коэффициентов получаем, что $H_1(X, G) = \operatorname{Ext}(Q, G)$. Но Q — торзионно свободная, следовательно $\operatorname{Ext}(Q, G)$ — делимая. Тогда $\operatorname{Ext}(Q, G) = \operatorname{Pext}(Q, G)$, откуда видно, что $H_1(X, G)$ — счетная, но $\operatorname{Ker}\gamma_1 = \operatorname{Pext}(Q, G) \neq 0$.

Цель настоящей работы показать, что если группа $H_n(X, A, B)$ — счетная (точнее, если ее подгруппа $\operatorname{Ext}(\check{H}_c^{n+1}(X, A), B)$, где $\check{H}_c^*$ — когомологии Чеха с компактными носителями — счетная), а B — торзионная, то $\gamma_n : H_n(X, A, B) \to \check{H}_n(X, A, B)$ — изоморфизм, $(X, A) \in \mathscr{B}$.

Отметим специально [1]. что на категории $\mathscr{B}$ точные гомологии удовлетворяют формуле универсальных коэффициентов

$$0 \to \operatorname{Ext}(\check{H}_c^{n+1}(X, A), G) \to H_n(X, A, G) \to \operatorname{Hom}(\check{H}_c^n(X, A), G) \to 0.$$

Доказательство изоморфности γ_n при вышеупомянутых условиях сведем к доказательству следующих трех алгебраических предложений.

Предложение 1. *Если* $|\operatorname{Ext}(^+H, B)| < 2^{\aleph_0}$, *где* ^+H — *торзионная группа, то* $\operatorname{Pext}(^+H, B) = 0$.

Доказательство. Пусть $^+H = \Sigma_p {}^+H_p$, где ^+H_p — p-примарная компонента ^+H. Тогда $\operatorname{Ext}(^+H, B) = \Pi_p \operatorname{Ext}(^+H_p, H)$. Но так как $|\operatorname{Ext}(^+H, B)| < 2^{\aleph_0}$, то $\operatorname{Ext}(^+H_p, B) \neq 0$ только для конечного числа p. Для них $|\operatorname{Ext}(^+H_p, B)| < 2^{\aleph_0}$, откуда получаем, что группы $\operatorname{Ext}(^+H_p, B)$ — торзионные. Действительно, ^+H_p, а, следовательно, и $\operatorname{Ext}(^+H_p, B)$ являются Z_p-модулями (Z_p — модуль целых p-адических чисел). Если тогда в $\operatorname{Ext}(^+H_p, B)$ существовал торзионно свободный элемент a, то обобщенная циклическая группа $\{\alpha a\}_{\alpha \in Z_p}$ была бы изоморфной, группе Z_p [4], что противоречит условию $|\operatorname{Ext}(^+H_p, B)| < 2^{\aleph_0}$.

Итак, $\operatorname{Ext}(^+H_p, B)$ — как конечная сумма торзионных групп — торзионная. Но она — редуцированная (^+H—торзионная) и копериодическая. Тогда $\operatorname{Ext}(^+H, B)$ — ограниченная [5], откуда следует, что в ней нет элементов бесконечной высоты, т. е. что $\operatorname{Pext}(^+H, B) = 0$.

На основании предложения 1 докажем

Предложение 2. *Если* $|\operatorname{Ext}(H, B)| < 2^{\aleph_0}$, *где* H — *счетная, а* B — *торзионная, то* $\operatorname{Pext}(H, B) = \operatorname{Pext}(H/_{^+H}, B)$, ^+H — *торзионная часть* H.

Доказательство. Так как группа расширений данной группы совпадает с группой расширений ее редуцированной части, то будем предполагать, что B — редуцированная.

Сервантно точная последовательность $0 \to {}^+H \to H \to H/_{^+H} \to 0$ индуцирует точные последовательности

$$\ldots \operatorname{Ext}(H, B) \to \operatorname{Ext}(^+H, B) \to 0$$

$$\ldots \operatorname{Hom}(^+H, B) \xrightarrow{\sigma} \operatorname{Pext}(H/_{^+H}, B) \to \operatorname{Pext}(H, B) \to \operatorname{Pext}(^+H, B) \to 0.$$

Из первой из них видно, что $|\operatorname{Ext}(^+H, B)| < 2^{\aleph_0}$, следовательно, по предложению 1, $\operatorname{Pext}(^+H, B) = 0$. Тогда вторая последовательность принимает вид

$$\ldots \operatorname{Hom}(^+H, B) \xrightarrow{\sigma} \operatorname{Pext}(H/_{^+H}, B) \to \operatorname{Pext}(H, B) \to 0. \tag{1}$$

Покажем, что группа $\operatorname{Hom}(^+H, B)$ в ней — торзионная.

Пусть C — базисная подгруппа группы ^+H, $C = \Sigma_{p,k} Z(p^k)$. Тогда в точной последовательности $0 \to C \to {}^+H \to D \to 0$ имеем, что D — делимая группа.

Рассмотрим индуцированную точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(D, B) \to \mathrm{Hom}({}^{+}H, B) \to \mathrm{Hom}(C, B).$$

В ней группа D — делимая, а B — редуцированная, следовательно, $\mathrm{Hom}(D, B) = 0$ и $\mathrm{Hom}({}^{+}H, B) \subset \mathrm{Hom}(C, B)$. С другой стороны, $\mathrm{Hom}(C, B) = \Pi_{p,k} \mathrm{Hom}(Z(p^k), B) = \Pi_{p,k} B_{[p^k]}$

Покажем, что в произведении $\Pi_{p,k} B_{[p^k]}$ только конечное число групп не равны нулю. Отметим сначала, что из $0 \to C \to {}^{+}H$ и $|\mathrm{Ext}({}^{+}H, B)| < 2^{\aleph_0}$, как и выше получаем, что $|\mathrm{Ext}(C, B)| < 2^{\aleph_0}$. Но

$$\mathrm{Ext}(C, B) = \prod_{p,k} \mathrm{Ext}(Z(p^k), B) = \prod_{p,k} B/p^k B.$$

Отсюда видно, что почти все группы $B/p^k B$ равны нулю, т. е. что B делится на почти все p из C. Для таких p, p — примарная компонента B_p группы B равна нулю. Действительно, так как p делит все B_q, если $q \neq p$, то p делит и B_p, откуда получается, что B_p — делимая группа. Но B — редуцированная, следовательно $B_p = 0$.

Таким образом, если p делит B, то $B_{[p^k]}$, как подгруппа B_p, равна нулю. Итак, не более чем для конечного числа $B_{[p^k]}$, $B_{[p^k]} \neq 0$. Отсюда получаем, что группа $\mathrm{Hom}(C, B) = \Pi_{d,k} B_{[p^k]}$ — торзионная, следовательно, ее подгруппа $\mathrm{Hom}({}^{+}H, B)$ — тоже торзионная.

Вернемся теперь к последовательности (1).

В ней $\mathrm{Im}\,\sigma$ — торзионная группа, а $\mathrm{Pext}(H/_{+H}, B) = \mathrm{Ext}(H/_{+H}, B)$ — торзионно свободная, делимая группа ($H/{}^{+}H$ — счетная, торзионно свободная группа, B — торзионная), [6]. Тогда $\mathrm{Im}\,\sigma = 0$ и $\mathrm{Pext}\, H/_{+H}, B) = \mathrm{Pext}(H, B)$.

Дальше, из-за равенства $\mathrm{Pext}(H, B) = \mathrm{Pext}(H/_{+H}, B)$ будем предполагать, что H — торзионно свободная.

П р е д л о ж е н и е 3. *Если* $|\mathrm{Ext}(H, B)| < 2^{\aleph_0}$, *где* H — *счетная, торзионно свободная группа, а* B — *торзионная, то* $\mathrm{Ext}(H, B) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. П е р в ы й ш а г. $B = B_p$, где B_p — p-примарная группа для некоторого простого p. В этом случае B является Z_p модулем, откуда, как в предложении 1, следует, что $\mathrm{Ext}(H, B)$ — торзионная группа. Но $\mathrm{Ext}(H, B)$ — торзионно свободная (H — счетная, торзионно свободная, B — торзионная). Тогда $\mathrm{Ext}(H, B) = 0$.

В т о р о й ш а г. Ранг группы H конечен. Обозначим ранг H через r, $r < \infty$. Тогда $\Sigma_r Z$ изоморфна существенной подгруппе в H, следовательно, в точной последовательности $0 \to \Sigma_r Z \to H \to T \to 0$ имеем, что T — торзионная.

Рассмотрим индуцированную последовательность

$$(2) \qquad \ldots \mathrm{Hom}(\sum_r Z, B) \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Ext}(T, B) \to \mathrm{Ext}(H, B) \to 0.$$

В ней $\mathrm{Hom}(\Sigma_r Z, B) = \Pi_r B$ — торзионная. При этом $\mathrm{Im}\,\sigma$ — максимальная торзионная подгрупа в $\mathrm{Ext}(T, B)$, так как $\mathrm{Ext}(H, B)$ — торзионно свободная.

Пусть $T = \Sigma_p T_p$, $B = \Sigma_p B_p$, где T_p и B_p соответственно p-примарные компоненты T и B. Тогда

$$\mathrm{Ext}(T, B) = \prod_p \mathrm{Ext}(T_p, \sum_q B_q) = \prod_p \mathrm{Ext}(T_p, B_p),$$

так как $\mathrm{Ext}(T_p, \Sigma_{q \neq p} B_q) = 0$ (T_p — p-примарная, а $\Sigma_{q \neq p} B_q$ — p-делимая группа). Аналогично $\mathrm{Ext}(T_p, B_p) = \mathrm{Ext}(T, B_p)$, так что имеем

$$\mathrm{Ext}^n(T, B) = \prod_p \mathrm{Ext}(T, B_p)$$

В произведении $\Pi_p \mathrm{Ext}(T, B_p)$, $\mathrm{Ext}(T, B_p)$ — p-примарные. Действительно, группа $\mathrm{Ext}(H, B_p)$, как прямое слагаемое в $\mathrm{Ext}(H, B)$, имеет мощность меньше $2^{\aleph_0}$. Но тогда по доказанному в первом шаге, $\mathrm{Ext}(H, B_p) = 0$, и из последовательности (2), для B_p видно, что $\mathrm{Ext}(T, B_p)$ — торзионная. Кроме того, $\mathrm{Ext}(T, B_p)$ — Z_p-модуль, следовательно, она — p-примарная группа.

Из (2) ясно, что $\mathrm{Ext}(H, B) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ext}(T, B)$ — торзионная. А это выполнено тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ext}(T, B_p) = 0$ почти для всех p. Достаточность последнего утверждения очевидна. Докажем необходимость. Пусть $\Pi_p \mathrm{Ext}(T, B_p)$ — торзионная и пусть существует бесконечная последовательность простых чисел $p_1, p_2, p_3, \ldots$, таких, что $\mathrm{Ext}(T, B_{p_i}) \neq 0$. Выберем по элементу $a_{p_i} \neq 0$ из $\mathrm{Ext}(T, B_{p_i})$, $i = 1, 2, 3 \ldots$ и рассмотрим элемент $c = (c_p)_p \in \Pi_p \mathrm{Ext}(T, B_p)$, для которого $c_{p_i} = a_{p_i}$. Обозначим его период через n, $n \neq 0$. Из $na_{p_i} = 0$, $a_{p_i} \neq 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ и из того факта, что $\mathrm{Ext}(T, B_{p_i})$ — p_i-примарные группы, следует, что n делится на все p_i Это невозможно, откуда получаем, что $\mathrm{Ext}(T, B_p) = 0$ для почти всех p.

Итак, $\mathrm{Ext}(H, B) = 0$ тогда и только, тогда, когда почти все $\mathrm{Ext}(T, B_p)$ равны нулю.

Покажем теперь, что из условия о счетности группы $\mathrm{Ext}(H, B)$ следует, что $\mathrm{Ext}(T, B_p) \neq 0$ только для конечного числа p, т. е. что $\mathrm{Ext}(H, B) = 0$.

Отметим сначала, что максимальная торзионная подгруппа $\mathrm{Im}\,\sigma$ в $\Pi_p \mathrm{Ext}(T, B_p)$ совпадает с группой $\Sigma_p \mathrm{Ext}(T, B_p)$. Действительно, $\mathrm{Ext}(T, B_p)$ — p-примарные группы, и период каждого торзионного элемента $(c_p)_p$ из $\Pi_p \mathrm{Ext}(T, B_p)$ должен делиться на все p, для которых $c_p \neq 0$. Но это возможно тогда и только тогда, когда число этих p — конечное.

Имеем $\mathrm{Ext}(H, B) = \Pi_p \mathrm{Ext}(T, B_p) / \Sigma_p \mathrm{Ext}(T, B_p)$.

Допустим теперь, что бесконечное число $\mathrm{Ext}(T, B_p) \neq 0$. Тогда возможно выбрать бесконечную последовательность простых чисел $p_1, p_2, p_3, \ldots$, таких, что $p_i > i!$ и $\mathrm{Ext}(T, B_{p_i}) \neq 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots$. В таком случае в $\mathrm{Ext}(T, B_{p_i})$ будет существовать элемент порядком больше, чем $i!$. Но тогда окажется, что в группе $\Pi_p \mathrm{Ext}(T, B_p) / \Sigma_p \mathrm{Ext}(T, B_p)$ имеется делимая подгруппа мощностью $2^{\aleph_0}$, [7], что противоречит условию $|\mathrm{Ext}(H, B)| < 2^{\aleph_0}$, Этим показано, что $\mathrm{Ext}(H, B) = 0$.

Третий шаг. Ранг счетной группы H бесконечен. Отметим сначала что если H_α — подгруппа в H конечного ранга, то $\mathrm{Ext}(H_\alpha, B) = 0$. Действительно, из эпиморфизма $\mathrm{Ext}(H, B) \to \mathrm{Ext}(H_\alpha, B) \to 0$, индуцированного мономорфизмом $0 \to H_\alpha \to H$, видно, что $|\mathrm{Ext}(H_\alpha, B)| < 2^{\aleph_0}$. Тогда, по доказанному во втором шаге, $\mathrm{Ext}(H_\alpha, B) = 0$.

Теперь докажем обратно, что из равенств $\mathrm{Ext}(H_\alpha, B) = 0$ следует $\mathrm{Ext}(H, B) = 0$. С этой целью представим H как объединение своих подгрупп конечного ранга, $H = \cup_n H_n$, где $H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset H_4 \subset \ldots$ и ранг H_n равен n.

Воспользуемся теперь необходимым и достаточным условием Бэра [8] для выполнения равенства $\mathrm{Ext}(H, B) = 0$, когда H — счетная, торзионно свободная группа, а B — торзионная. Оно состоит из двух пунктов:

а) Если для бесконечного множества простых чисел $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_i$-примарная компонента B_{p_i} редуцированной группы B неравна нулю, то H не содержит такой сервантной подгруппы S конечного ранга, чтобы в факторе H/S существовали ненулевые элементы, делящиеся на все p_i.

б) Если для некоторого p, B_p — неограниченная, то H не содержит такой сервантной подгруппы S конечного ранга, чтобы в факторе H/S существовали ненулевые элементы, делящиеся на все степени числа p.

Проверим сначала условие а). Допустим противное. Пусть S — сервантная подгруппа H конечного ранга и h — такой элемент из H, что класс $[h]$ из H/S делится на все p_i в H/S. Обозначим через h_i, $i=1, 2, 3, \ldots$ элементы из H, для которых $[h]=p_i[h_i]$, т. е. $h-p_ih_i \in S$.

Дальше покажем, что S содержится в некоторой из групп H_n. При доказательстве этого включения воспользуемся следующим замечанием:

Если H_n — сервантная подгруппа торзионно свободной группы H и некоторое кратное элемента h из H принадлежит H_n, то и $h \in H_n$.

Действительно, пусть $kh \in H_n \subset H$ для некоторого $k \in Z$, $k \neq 0$. Очевидно kh делится на k в H, следовательно, оно делится на k и в сервантной подгруппе H_n, т. е. существует $g \in H_n$ такое, что $kh=kg$. Но тогда $k(h-g)=0$ в торзионно свободной группе H_n, откуда получается, что $h=g$, $h \in H_n$.

Вернемся к группе S. Пусть $s_1, s_2 \ldots s_l$ — базис в S. Он содержится в некоторой H_{n_1}. Покажем, что и $S \subset H_{n_1}$. Пусть $s \in S$ и k — такое натуральное число, что ks — линейная комбинация базисных элементов s_i. Тогда $ks \in H_{n_1} \subset H$, где H_{n_1} — сервантная группа в H и, по сделанному выше замечанию, $s \in H_{n_1}$.

Имеем $h-p_ih_i \in S \subset H_{n_1} \subset H$, $i=1, 2, 3 \ldots$.

Обозначим теперь через H_{n_2} группу из $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$, содержащую H_{n_1} и h. Тогда $h-p_ih_i \in S \subset H_{n_2} \subset H$, $i=1, 2, 3 \ldots$ и $h \in H_{n_2}$. Отсюда видно, что $p_ih_i \in H_{n_2}$, а, следовательно, и $h_i \in H_{n_2}$. Рассмотрим классы эквивалентности элементов h и h_i в H_{n_2}/S. Из-за $h-p_ih_i \in S$ окажется, что для них выполнено равенство $[p]=p_i[h_i]$ в H_{n_2}/S. Но это невозможно, по необходимости условия Бэра, так как $\operatorname{Ext}(H_{n_2}, B)=0$, а S — сервантная подгруппа в H_{n_2} конечного ранга. Таким образом условие а) для $\operatorname{Ext}(H, B)=0$ выполнено.

Перейдем теперь ко второму условию. Допустим опять, что в H существует сервантная подгруппа конечного ранга, для которой имеются h и h_i из H такие, что $[h]=p^i[h_i]$ в H/S, $i=1, 2, 3, \ldots$. Тогда, как в а), можно найти группу H_n из $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$, содержащую S как сервантную подгруппу, и такую, что $[h]=p^i[h_i]$ в факторе H_n/S. Но это противоречит необходимости условия б) Бэра для равенства $\operatorname{Ext}(H_n, B)=0$. Этим предложение 3 доказано.

Вернемся теперь к гомологиям Стинрода на категории $\mathscr{B}$. Для них верна следующая

Теорема. *Если для* $(X, A) \in \mathscr{B}$, $|\operatorname{Ext}(\check{H}_c^{n+1}(X, A), B)| < 2^{\aleph_0}$ (*в частности* $|H_n(X, A, B)| < 2\aleph_0$), *где* B — *торзионная группа, то* $\gamma_n : H_n(X, A, B) \to H_n(X, A, B)$ — *изоморфизм.*

Доказательство. Пользуясь тем, что $\check{H}_c^*(X, A) = \check{H}^*(\bar{X}, \bar{A})$, где $\bar{X}$, $\bar{A})$ — одноточечная компактификация пары (X, A) и что γ_n — изоморфизм для (X, A), если γ_n — изоморфизм для $(\bar{X}, \bar{A})$, можем ограничиться рассмотрением компактных пар. Но для них $\operatorname{Ker}\gamma_n = \operatorname{Pext}(\check{H}^{n+1}(X, A), B$ и группа $\check{H}^{n+1}(X, A)$ — счетная. Тогда, по предложению 2, $\operatorname{Pext}(\check{H}^{n+1}(X, A), B) = \operatorname{Pext}(\check{H}^{n+1}(X, A)/{}^{+}\check{H}^{n+1}(X, A), B)$, где ${}^{+}H^{n+1}(X, A)$ — торзионная часть группы

$\check{H}^{n+1}(X, A)$. Отметим еще, что $\operatorname{Pext}(\check{H}^{n+1}(X, A)/{}^{+}\check{H}^{n+1}(X, A), B) = \operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A)/{}^{+}\check{H}^{n+1}(X, A), B)$, так как фактор $\check{H}^{n+1}(X, A)/{}^{+}\check{H}^{n+1}(X, A)$ — торзионно свободная группа. Из этой цепочки равенств и из включения $\operatorname{Pext}(\check{H}^{n+1}(X, A), B) \subset \operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), B)$ видно, что мощность группы $\operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A)/{}^{+}\check{H}^{n+1}(X, A), B)$ меньше $2^{\aleph_0}$. Тогда, по предложению 3, она, а, следовательно, и $\operatorname{Pext}(\check{H}^{n+1}(X, A), B)$, равна нулю. Таким образом $\operatorname{Ker}\gamma_n = 0$, т. е. $\gamma_n: H_n(X, A, B) \to \check{H}_n(X, A, B)$ — изоморфизм. Этим теорема доказана.

Утверждение, аналогичное доказанной теореме в случае, когда группа коэффициентов гомологий — торзионно свободная, неверно. Это видно из упомянутого вначале примера — $G = \operatorname{Ker}\sigma$, как подгруппа группы $\hat{Z} = \Pi_p Z_p$, торзионно свободна.

Наконец отметим, что из счетности группы $\operatorname{Ext}(\check{H}_c^{n+1}(X, A, G)$ следует, что $\operatorname{Pext}(\check{H}_c^{n+1}(X, A), G)$ — делимая.

Действительно, верно

Предложение 4. *Если* $|\operatorname{Ext}(H, G)| < 2^{\aleph_0}$, *то* $\operatorname{Pext}(H, G)$ — *делимая*.

Доказательство. Из последовательности $\ldots \operatorname{Ext}(H, G) \to \operatorname{Ext}({}^{+}H, G) \to 0$, индуцированной последовательностью $0 \to {}^{+}H \to H \to H/{}_{+H} \to 0$ видно, что мощность группы $\operatorname{Ext}({}^{+}H, G)$ меньше $2^{\aleph_0}$. Тогда, по предложению 1, $\operatorname{Pext}({}^{+}H, G) = 0$. Но это является необходимым и достаточным условием [9] для того, чтобы группа $\operatorname{Pext}(H, G)$ была делимой.

Очевидными следствиями предложения 4 являются

Утверждение 1. *Если для компактной пары* (X, A) *мощность группы* $\operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), G)$ *меньше* $2^{\aleph_0}$, *то* $\gamma_n: H_n(X, A, G) \to \check{H}_n(X, A, G)$ — *изоморфизм тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ext}(\check{H}^{n+1}(X, A), G)$ — *редуцированая.*

Утверждение 2. *Если для* $(X, A) \in \mathscr{B}$ *группа* $\operatorname{Ext}(\check{H}_c^{n+1}(X, A), G)$, *имеющая мощность меньше* $2^{\aleph_0}$, *редуцированна, то* γ_n — *изоморфизм.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Г. Скляренко. Теория гомологий и аксиома точности. *Успехи мат. наук*, **24**, 1969, вып. 5(149), 87—140.
2. В. И. Кузьминов, И. А. Шведов. Гипергомологии предела прямого спектра комплексов и группы гомологий топологических пространств. *Сиб. мат. ж.*, **16**, 1975, 62—74.
3. Н. А. Берикашвили. Теория гомологий Стинрода— Ситникова на категории компактных пространств. *Доклады АН СССР*, **254**, 1980, 1289—1291.
4. Л. Я. Куликов. Обобщенные примарные группы I. *Труды Моск. мат. общества*, **1**, 1952, 217—326.
5. Л. Фукс. Бесконечные абелевы группы, т. I. Москва, 1974.
6. R. Baer. Die Torsionsuntergruppe einer abelschen Gruppe. *Math. Ann.*, **135**, 1958, 219—234.
7. J. Łoś. On the complete direct sum of countable abelian groups. *Publ. Math. Debrecen*, **3**, 1954, 269—272.
8. R. Baer. The subgroups of the elements of finite order of an abelian group. *Ann. of Math.*, **37**, 1936, 766—781.
9. M. Huber, W. Meier. Cohomology theories and infinite *CW*-complexes, *Comment. Math. Helvetici*, **53**, 1978, 239—257.

Единый центр математики и механики
1090 София *П.Я. 373*

Поступила 27. I. 1983