Serdica

Bulgariacae mathematicae publicationes

Сердика

Българско математическо списание

МОНОТОННАЯ ПРОГОНКА ДЛЯ ШЕСТИТОЧЕЧНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

ЛЮБЕН Г. ВОЛКОВ

В работе предлагается вариант метода монотонной прогонки для шестидиагональной системы алгебраических уравнений и исследуется его устойчивость.

Введение. При численном решении дифференциальных уравнений высокого порядка приходится решать сложные разностные уравнения (как скалярные, так и векторные) [1]. Например, для задач нелинейной упругости возможны два подхода. Первый способ заключается в непосредственной аппроксимации уравнений второго порядка, записанных в перемещениях. Получаются многоточечные уравнения специальной структуры. Второй способ состоит в переходе к системам уравнений первого порядка и использовании теории квазилинейных систем. В этом случае приходим к трехточечным системам, которые можо свести и к скалярным шеститочечным.

В этой работе рассматриваем шеститочечную систему

$$(0.1)\quad a_1^1 y_1 + b_1^1 y_2 + c_1^1 y_3 + d_1^1 y_4 = g_1^1,$$

$$(0.2)\quad a_1^2 y_1 + b_1^2 y_2 + c_1^2 y_3 + d_1^2 y_4 = g_1^2,$$

$$(0.3)\quad a_i^1 y_{2i-3} + b_i^1 y_{2i-2} + c_i^1 y_{2i-1} + d_i^1 y_{2i} + e_i^1 y_{2i+1} + f_i^1 y_{2i+2} = g_i^1,$$

$$(0.4)\quad a_i^2 y_{2i-3} + b_i^2 y_{2i-2} + c_i^2 y_{2i-1} + d_i^2 y_{2i} + e_i^2 y_{2i+1} + f_i^2 y_{2i+2} = g_i^2,\quad 2\le i\le n-1,$$

$$(0.5)\quad a_n^1 y_{2n-3} + b_n^1 y_{2n-2} + c_n^1 y_{2n-1} + d_n^1 y_{2n} = g_n^1,$$

$$(0.6)\quad a_n^2 y_{2n-3} + b_n^2 y_{2n-2} + c_n^2 y_{2n-1} + d_n^2 y_{2n} = g_n^2.$$

Системы такого вида возникают при решении некоторых задач из нелинейной упругости с помощью полностью консервативных разностных схем.

Для системы (0.1)—(0.6) предлагаем вариант монотонной прогонки и исследуем его устойчивость.

1. Алгоритм варианта монотонной прогонки. Матрица системы (0.1)—(0.6) является шестидиагональной квадратной матрицей размерности $2n\times 2n$ и имеет не более $6n+4$ ненулевых элементов. Для этого варианта используем метод исключения Гауса. Учитывая структуру системы (0.1)—(0.6), легко получим, что обратный ход метода Гаусса осуществляется по формулам

$$(1.1)\quad y_{2i-1} = \alpha_i^1 y_{2i} + \beta_i^1 y_{2i+1} + \gamma_i^1 y_{2i+2} + \delta_i^1,$$

$$(1.2)\quad y_{2i} = \beta_i^2 y_{2i+1} + \gamma_i^2 y_{2i+2} + \delta_i^2,\quad 1\le i\le n-1,$$

СЕРДИКА Българско математическо списание. Том 11, 1985, с. 116—120

$$y_{2n-1}=\alpha^1_n y_{2n}+\delta^1_n. \tag{1.3}$$

Для реализации (1.1)—(1.3) необходимо определить y_{2n} и коэффициенты α^1_i, $\beta^1_i, \gamma^1_i, \delta^1_i, \beta^2_i, \gamma^2_i, \delta^2_i$. Сначала найдем формулы для α^1_i, β^1_i, γ^1_i, β^2_i, γ^2_i, δ^2_i, $2\leqq i\leqq n-1$. Используя (1.1), (1.2), выразим y_{2i-3} и y_{2i-2} через y_{2i-1}, y_{2i}. Получим

$$y_{2i-3}=(\alpha^1_{i-1}\beta^2_{i-1}+\beta^1_{i-1})y_{2i-1}+(\alpha^1_{i-1}\gamma^2_{i-1}+\gamma^1_{i-1})y_{2i}+\alpha^1_{i-1}\delta^2_{i-1}+\delta^1_{i-1}, \tag{1.4}$$

$$y_{2i-2}=\beta^2_{i-1}y_{2i-1}+\gamma^2_{i-1}y_{2i}+\delta^2_{i-1} \tag{1.5}$$

для $2\leqq i\leqq n-2$. Подставляя (1.4), (1.5) в (0.3), (0.4), получим

$$\begin{gathered}[a^1_i(\alpha^1_{i-1}\beta^2_{i-1}+\beta^1_{i-1})+b^1_i\beta^2_{i-1}+c^1_i]y_{2i-1}+[a^1_i(\alpha^1_{i-1}\gamma^2_{i-1}+\gamma^1_{i-1})\\ +b^1_i\gamma^2_{i-1}+d^1_i]y_{2i}+e^1_iy_{2i+1}+f^1_iy_{2i+2}=g^1_i-a^1_i(\alpha^1_{i-1}\delta^2_{i-1}+\delta^1_{i-1})-b^1_i\delta^2_{i-1},\end{gathered} \tag{1.6}$$

$$\begin{gathered}\{\alpha^1_i[a^2_i(\alpha^1_{i-1}\beta^2_{i-1}+\beta^1_{i-1})+b^2_i\beta^2_{i-1}+c^2_i]+a^1_i(\alpha^1_{i-1}\gamma^2_{i-1}+\gamma^1_{i-1})+b^2_i\gamma^2_{i-1}\\ +d^2_i\}y_{2i}+\{\beta^1_i[a^2_i(\alpha^1_{i-1}\beta^2_{i-1}+\beta^1_{i-1})+b^2_i\beta^2_{i-1}+c^2_i]+e^2_i\}y_{2i+1}\\ +\{\gamma^1_i[a^2_i(\alpha^1_{i-1}\beta^2_{i-1}+\beta^1_{i-1})+b^2_i\beta^2_{i-1}+c^2_i]+f^2_i\}y_{2i+2}\\ =g^2_i-a^2_i(\alpha^1_{i-1}\delta^2_{i-1}+\delta^1_{i-1})-b^2_i\delta^2_{i-1}-\delta^1_i[a^2_i(\alpha^1_{i-1}\beta^2_{i-1}+\beta^1_{i-1})+b^2_i\beta^2_{i-1}+c^2_i].\end{gathered} \tag{1.7}$$

Сравнивая (1.6) с (0.3), полагаем

$$\begin{gathered}\alpha^1_i=-[a^1_i(\alpha^1_{i-1}\gamma^2_{i-1}+\gamma^1_{i-1})+b^1_i\gamma^2_{i-1}+d^1_i]/\Delta^1_i,\ \beta^1_i=-e^1_i/\Delta^1_i,\\ \gamma^1_i=-f^1_i/\Delta^1_i,\ \delta^1_i=[g^1_i-a^1_i(\alpha^1_{i-1}\delta^2_{i-1}+\delta^1_{i-1})-b^1_i\delta^2_{i-1}]/\Delta^1_i,\end{gathered} \tag{1.8}$$

где $\Delta^1_i=a^1_i(\alpha^1_{i-1}\beta^2_{i-1}+\beta^1_{i-1})+b^1_i\beta^2_{i-1}+c^1_i$.

Сравнивая (1.7) с (0.4), полагаем

$$\begin{gathered}\beta^2_i=-\{\beta^1_i[a^2_i(\alpha^1_{i-1}\beta^2_{i-1}+\beta^1_{i-1})+b^2_i\beta^2_{i-1}+c^2_i]+e^2_i\}/\Delta^2_i,\\ \gamma^2_i=-\{\gamma^1_i[a^2_i(\alpha^1_{i-1}\beta^2_{i-1}+\beta^1_{i-1})+b^2_i\beta^2_{i-1}+c^2_i]+f^2_i\}/\Delta^2_i,\\ \delta^2_i=\{g^2_i-a^2_i(\alpha^1_{i-1}\delta^2_{i-1}+\delta^1_{i-1})-b^2_i\delta^2_{i-1},\\ -\delta^1_i[a^2_i(\alpha^1_{i-1}\beta^2_{i-1}+\beta^1_{i-1})+b^2_i\beta^2_{i-1}+c^2_1]\}/\Delta^2_i,\end{gathered} \tag{1.9}$$

где $\Delta^2_i=\alpha^1_i[a^2_i(\alpha^1_{i-1}\beta^2_{i-1}+\beta^1_{i-1})+b^2_i\beta^2_{i-1}+c^2_i]+a^2_i(\alpha^1_{i-1}\gamma^2_{i-1}+\gamma^1_{i-1})+b^2_i\beta^2_{i-1}+d^2_i$.

Теперь ясно, что уравнения системы (0.3), (0.4) будут удовлетворены.

Рекуррентные соотношения (1.8) связывают α^1_i, β^1_i, γ^1_i, δ^1_i с α^1_{i-1}, β^1_{i-1}, β^2_{i-1}, γ^1_{i-1}, γ^2_{i-1}, δ^1_{i-1}, δ^2_{i-1}, а (1.8) — β^2_i, γ^2_i, δ^2_i с α^1_{i-1}, α^1_i, β^1_{i-1}, β^1_i, β^2_{i-1}, γ^1_{i-1}, γ^1_i, γ^2_{i-1}, δ^1_{i-1}, δ^1_i, δ^2_{i-1}. Поэтому, если будут определены α^1_1, β^1_1, γ^1_1, δ^1_1, β^2_1, γ^2_1, δ^2_1, то по формулам (1.8), (1.9) последовательно можно найти коэффициенты α^1_i, β^1_i, γ^1_i, β^2_i, γ^2_i, δ^2_i для $2\leqq i\leqq n-1$.

Чтобы найти α_1^1, β_1^1, γ_1^1, δ_1^1 и β_1^2, γ_1^2, δ_1^2, надо сравнить соответственно (0.1) с (1.1) и (0.2) с (1.2). Получим

$$\alpha_1^1=-b_1^1/a_1^1,\quad \beta_1^1=-c_1^1/a_1^1,\quad \gamma_1^1=-d_1^1/a_1^1,\quad \delta_1^1=g_1^1/a_1^1, \tag{1.10}$$

$$\beta_1^2=-(a_1^2\beta_1^2+c_1^2)/\Delta_1^1,\quad \gamma_1^2=-(a_1^2\gamma_1^1+d_1^2)/\Delta_1^1,\quad \Delta_1^1=a_1^2\alpha_1^1+b_1^2,\ \delta_1^2=g_1^2-a_1\delta_1^1. \tag{1.11}$$

Осталось определить α_n^1, δ_n^1 и y_{2n}, входящие в формулу (1.3). Воспользуемся для этого уравнениями (0.5), (0.6). Получим соответственно

$$\begin{gathered}[a_n^1(\alpha_{n-1}^1\,\beta_{n-1}^2+\beta_{n-1}^1)+d_n^1\,b_{n-1}^2+c_n^1]\,y_{2n-1}+[a_n^1(\alpha_{n-1}^1\,\gamma_{n-1}^2+\gamma_{n-1}^1)\\ +b_n\gamma_{n-1}^2+d_n^1]\,y_{2n}=g_n^1-a_n^1(\alpha_{n-1}^1\delta_{n-1}^2+\delta_{n-1}^1)-b_n^1\delta_{n-1}^2\end{gathered} \tag{1.12}$$

$$\begin{gathered}[a_n^2(\alpha_{n-1}^1\,\beta_{n-1}^2+\beta_{n-1}^1)+d_n^2\,b_{n-1}^2+c_n^2]\,y_{2n-1}+[a_n^2(\alpha_{n-1}^1\,\gamma_{n-1}^2+\gamma_{n-1}^1)\\ +b_n^2\gamma_{n-1}^n+d_n^2]\,y_{2n}=g_n^2-a_n^2(\alpha_{n-1}^1\delta_{n-1}^2+\delta_{n-1}^1)-b_n^2\,\delta_{n-1}^2.\end{gathered} \tag{1.13}$$

Сравнивая (1.12) с (1.3), найдем, что α_n^1 и δ_n^1 определяются по формулам (1.8) для $i=n$. . Чтобы найти y_{2n}, подставляем (1.3) в (1.13). Получим

$$y_{2n}=\delta_n^2, \tag{1.14}$$

где δ_n^2 определяется по формуле (1.9) при $i=n$.

Для реализации предложенного алгоритма на ЭВМ надо провести прямой ход последовательно по формулам (1.10), (1.11), (1.8), (1.9), а обратный — по формулам (1.1)—(1.3). Если не делать различий между временем выполнения арифметических операций на ЭВМ, то общее число действий для этого алгоритма $46n-30$.

2. Обоснование метода. Построенный выше алгоритм будем называть корректным, если верны неравенства $\Delta_i^1\neq 0$, $\Delta_i^2\neq 0$, $i=1, 2, \ldots, n$, где Δ_n^1, Δ_n^2 получаются соответственно по формулам (1.8) и (1.9), см [1].

Теорема. *Пусть коэффициенты системы* (0.1)—(0.6) *удовлетворяют условиям*

$$\begin{gathered}|a_i^s|>0,\quad s=1,\ 2,\quad 2\le i\le n-1,\quad |a_1^2|>0,\\ |b_i^s|>0,\quad s=1,\ 2,\quad 1\le i\le n-1,\\ |c_i^2|>0,\quad 1\le i\le n,\quad |c_1^1|>0,\quad |c_n^1|>0,\\ |d_i^1|>0,\quad 1\le i\le n,\quad |d_i^2|>0,\quad |d_n^2|>0,\\ |e_i^s|>0,\quad |f_i^s|>0,\quad s=1,\ 2,\quad 1\le i\le n-1;\quad |e_n^2|>0,\ |f_n^1|>0,\end{gathered}$$

и условиям

$$\begin{gathered}|a_1^1|\ge|b_1^1|+|e_1^1|+|d_1^1|,\quad |b_1^2|\ge|a_1^2|+|c_1^2|+|d_1^2|,\\ |c_i^1|\ge|a_i^1|+|b_i^1|+|d_i^1|+|e_i^1|+|f_i^1|,\\ |d_i^2|\ge|a_i^2|+|b_i^2|+|c_i^2|+|e_i^2|+|f_i^2|,\quad 2\le i\le n-1,\\ |c_n^1|\ge|a_n^1|+|b_n^1|+|d_n^1|,\quad |d_n^2|\ge|a_n^2|+|b_n^2|+|c_n^2|,\end{gathered} \tag{2.1}$$

причем хотя бы в одном из неравенств (2.1) *достигается строгое неравенство. Тогда алгоритм* (1.1)—(1.3), (1.8)—(1.10), (1.14) *корректный и, кроме того, имеют место неравенства*

$$|\alpha_i^1|+|\beta_i^1|+|\gamma_i^1|\leqq 1,\quad |\beta_i^2|+|\gamma_i^2|\leq 1,\quad 1\leq i\leq n-1 \tag{2.2}$$

$$|\alpha_n^1|\leqq 1. \tag{2.3}$$

Доказательство. Утверждения для $i=1$ проверяются легко. Далее доказательство проведем по индукции. Пусть выполнены неравенства

$$|\alpha_{i-1}^1|+|\beta_{i-1}^1|+|\gamma_{i-1}^1|\leqq 1,\quad |\beta_{i-1}^2|+|\gamma_{i-1}^2|\leqq 1. \tag{2.4}$$

Покажем, что тогда будут справедливы неравенства

$$|\alpha_i^1|+|\beta_i^1|+|\gamma_i^1|\leq 1,\quad \Delta_i^1\neq 0, \tag{2.5}$$

$$|\beta_i^2|+|\gamma_i^2|\leqq 1,\quad \Delta_i^2\neq 0. \tag{2.6}$$

Докажем сначала (2.5). Действительно, из (2.2), (2.4) получаем

$$\begin{aligned}
\Delta_i^1 &\geq |c_i^1|-|a_i^1||\alpha_{i-1}^1||\beta_{i-1}^2|-|a_i^1||\beta_{i-1}^1|-|b_i^1||\beta_{i-1}^2|\\
&\geq |a_i^1|+|b_i^1|+|d_i^1|+|e_i^1|+|f_i^1|-|a_i^1||\alpha_{i-1}^1||\beta_{i-1}^2|-|b_i^1||\beta_{i-1}^2|-|a_i^1||\beta_{i-1}^1|\\
&=|a_i^1|(1-|\beta_{i-1}^1|)-|a_i^1||\alpha_{i-1}^1||\beta_{i-1}^2|+|b_i^1|(1-|\beta_{i-1}^2|)+|d_i^1|+|e_i^1|+|f_i^1|\\
&\geq |a_i^1|(|\alpha_i^1|+|\gamma_{i-1}^1|)-|a_i^1||\alpha_{i-1}^1||\beta_{i-1}^2|+|b_i^1||\gamma_i^2|+|d_i^1|+|e_i^1|+|f_i^1|\\
&=|a_i^1||\alpha_{i-1}^1|(1-|\beta_{i-1}^2|)+|b_i^1||\gamma_i^2|+|d_i^1|+|e_i^1|+|f_i^1|\\
&\geq |a_i^1||\alpha_{i-1}^1||\gamma_i^2|+|a_i^1||\gamma_{i-1}^1|+|b_i^1||\gamma_{i-1}^2|+|d_i^1|+|e_i^1|+|f_i^1|\\
&\geq |a_i^1|(\alpha_{i-1}^1\gamma_{i-1}^2+\gamma_{i-1}^1)+b_i^1\gamma_{i-1}^2+d_i^1|+|e_i^1|+|f_i^1|>0,\quad \leq i\leq n-1.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (1.8) следует (2.5).

Докажем (2.6):

$$\begin{aligned}
|\Delta_i^2| &\geqq |d_i^2|-|\alpha_i^1||a_i^2||\alpha_{i-1}^1||\beta_{i-1}^2|-|\alpha_i^1||a_i^2||\beta_{i-1}^1|-\alpha_i^1||\beta_i^2||\beta_{i-1}^2|\\
&-|\alpha_i^1||c_i^2|-|a_i^2||\alpha_{i-1}^1||\gamma_{i-1}^2|-|a_i^2||\gamma_{i-1}^1|-|b_i^2||\gamma_{i-1}^2|\\
&\geqq |a_i^2|+|b_i^2|+|c_i^2|+e_i^2+|f_i^2|-|\alpha_i^1||a_i^2||\alpha_{i-1}^1||\beta_{i-1}^2|\\
&-|\alpha_i^1||a_i^2||\beta_{i-1}^1|-|\alpha_i^1||b_i^2||\beta_{i-1}^2|-|\alpha_i^1||c_i^2|-|a_i^2||\alpha_{i-1}^1||\gamma_{i-1}^2|\\
&-|a_i^2||\gamma_{i-1}^1|-|b_i^2||\gamma_{i-1}^2|\geq |a_i^2|+|b_i^2|+|c_i^2|+|e_i^2|+|f_i^2|\\
&-|\alpha_i^1||a_i^2||\alpha_{i-1}^1||\beta_{i-1}^2|-|\alpha_i^1||a_i^2||\beta_{i-1}^2|-|\alpha_i^1||b_i^2||\beta_{i-1}^2|-|\alpha_i^1||c_i^2|\\
&-a_i^2||\alpha_{i-1}^1||\gamma_{i-1}^2|-|a_i^2||\gamma_{i-1}^2|-b_i^2||\gamma_{i-1}^2|=|a_i^2|(1-|\gamma_{i-1}^1|)+|b_i^2|(1-|\gamma_{i-1}^2|)\\
&+|c_i^2|(1-|\alpha_i^1|)+e_i^2+|f_i^2|-\alpha_i^1||a_i^2||\alpha_{i-1}^1||\beta_{i-1}^2|-\alpha_i^1||a_i^2||\beta_{i-1}^1|\\
&-|\alpha_i^1||b_i^2||\beta_{i-1}^2|-a_i^2||\alpha_{i-1}^1||\gamma_{i-1}^2|\geq |d_i^2||\alpha_{i-1}^1|+|a_i^2||\beta_{i-1}^1|+|b_i^2||\beta_{i-1}^2|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+|c_i^2||\beta_i^1|+|c_i^2|\,|\gamma_i^1|+|e_i^2|+|f_i^2|-|\alpha_i^1||a_i^2||\alpha_{i-1}^1||\beta_{i-1}^2|-|\alpha_i^1||a_i^2||\beta_{i-1}^1|\\
&-|\alpha_i^1||b_i^2||\beta_{i-1}^2|-|a_i^2||\alpha_{i-1}^1||\gamma_{i-1}^2|=|a_i^2||\alpha_{i-1}^1|(1-|\gamma_{i-1}^2|)\\
&+|a_i^2||\beta_{i-1}^1|(1-|\alpha_i^1|)+|b_i^2||\beta_{i-1}^2|(1-|\alpha_i^1|)+|e_i^2||\beta_i^1|+|c_i^2||\gamma_i^1|\\
&+|e_i^2|+|f_i^2|-|\alpha_i^1||a_i^2||\alpha_{i-1}^2||\beta_{i-1}^2|\geqq|a_i^2||\alpha_{i-1}^1||\beta_{i-1}^2|+|\alpha_i^2||\beta_{i-1}^1||\beta_i^1|\\
&-|a_i^2||\beta_{i-1}^1||\gamma_i^1|+|b_i^2||\beta_{i-1}^2||\gamma_i^1|+|b_i^2||\beta_{i-1}^2||\beta_i^1|+|c_i^2||\beta_i^1|\\
&+|c_i^2||\gamma_i^1|+|e_i^2|+|f_i^2|-|\alpha_i^1||a_i^2||\alpha_{i-1}^1||\beta_{i-1}^2|\\
&=|a_i^2||\alpha_{i-1}^1||\beta_{i-1}^2|(1-|\alpha_i^1|)+|a_i^2||\beta_{i-1}^1||\beta_i^1|+|\alpha_i^2||\beta_{i-1}^1||\gamma_i^1|\\
&+|b_i^2||\beta_{i-1}^2||\gamma_i^1|+|b_i^2||\beta_{i-1}^2||\beta_i^1|+|e_i^2||\beta_i^1|+|c_i^2||\gamma_i^1|+|e_i^2|+|f_i^2|\\
&\geqq|a_i^1||\alpha_{i-1}^1||\beta_{i-1}^2||\beta_i^1|+|a_i^2||\alpha_{i-1}^1||\beta_{i-1}^2||\gamma_i^1|+|a_1^2||\beta_{i-1}^1||\beta_i^1|\\
&+|a_i^2||\beta_{i-1}^1||\gamma_i^1|+|b_i^2||\beta_{i-1}^2||\gamma_i^1|+|b_i^2||\beta_{i-1}^1||\beta_i^1|+|c_i^2||\beta_i^1|\\
&+|c_i^2||\gamma_i^2|+|e_i^2|+|f_i^2|\geqq|\beta_i^1[a_i^2(\alpha_{i-1}^1\beta_{i-1}^2+\beta_{i-1}^1)+b_i^2\beta_{i-1}^2+c_i^2]|\\
&+|e_i^2|+|\gamma_i^1[\alpha_i^2(\alpha_{i-1}^1\beta_{i-1}^2+\beta_{i-1}^1)+b_i^2\beta_{i-1}^2+c_i^2]|+|f_i^2|>0.
\end{aligned}
$$

Отсюда и из (1.5) следует (2.6),

Дальше нетрудно показать, что $\Delta_n^1>0$, откуда и получается (2.3),

Теперь из (2.1) следует

$$
\begin{aligned}
&|\Delta_n^2|\geqq|d_n^2|-|\alpha_n^1||\alpha_n^2||\alpha_{n-1}^1||\beta_{n-1}^2|-|\alpha_n^1||a_n^2||\beta_{n-1}^2|\\
&-|\alpha_n^1||c_n^2|-|a_n^2||\alpha_{n-1}^1||\gamma_{n-1}^2|-|a_n^2||\gamma_{n-1}^2|-|b_n^2||\gamma_{n-1}^2|\\
&=|d_n^2|-|a_n^2|-|b_n^2|-|c_n^2|+|a_n^2|(1-|\gamma_{n-1}^1|)+|b_n^2|(1-|\gamma_{n-1}^2|)\\
&+|c_n^2|(1-|\alpha_n^1|)-|\alpha_n^1||a_n^2||\alpha_{n-1}^1||\beta_{n-1}^2|-|\alpha_n^1||a_n^2||\beta_{n-1}^2|-|a_n^2||\alpha_{n-1}^1||\gamma_{n-1}^2|\\
&\geqq|d_n^2|-|a_n^2|-|b_n^2|-|c_n^2|+(1-|\alpha_n|)(|c_n^2|+|a_n^2||\alpha_{n-1}^1||\beta_{n-1}^2|)\\
&+|a_n^2||\beta_{n-1}^1|+|b_n^2||\beta_{n-1}^2|.
\end{aligned}
$$

В силу (2.1) легко получить, что хотя бы в одном из неравенств $|d_n^2|-|a_n^2|-|b_n^2|-|c_n^2|\geqq 0$, $|\alpha_n^1|\leqq 1$ достигается строгое неравенство. Отсюда следует, что $\Delta_n^2 \neq 0$. Теорема доказана.

Замечание. Из оценок (2.2), (2.3) следует, что если при вычислении y_{2n} допущена погрешность, то она не будет расти при счетам по формулам (1.2), (1.3).

Автор выражает благодарность Р. Лазарову за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Самарский, Е. С. Николаев. Методы решения сеточных уравнений. Москва, 1978.

ВТУ „А. Кънчев", Центр математики
7004 Русе, Болгария

Поступила 22. 2. 1983